HUGENII
OPERA
VARIA.

26. Vermischte math. Schriften.



LUGD. BAT. Apud JANSSONIOS VANDER Aa, Bibliopolas.

CHRISTIANI HUGENII

ZULICHEMII,

Dum viveret Zelemii Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN PRIMUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

G. J. 'sGRAVESANDE

L. S.

*I*Llos de re litteraria bene mereri, semper persuasum habui, qui doctorum virorum scripta dispersa colligunt; & minoribus, seorsim perituris, in majori volumine collocatis posteritatem quasi donant.

Hac de causa cùm Bibliopolæ hujus Urbis, Jansonii vander Aa, *mihi declararent, se in mente habere* Hugenii *opus, olim* Parisiis *editum*, de Horologio Oscillatorio *typis mandare, & hac de re quid sentirem ego quærerent, Ipsis Auctor fui, ut non modo in proposito perseverarent, sed ut omnia ante edita ejusdem Auctoris opera minora huic adjungerent.*

In me libenter ſuſcepi curam colligendi hæc, & diſponendi; ſchedaſque ſemel & altera vice a correctore examinatas, ipſe attente relegi, & cum figuris contuli; ſcripta etiam quædam, in Diariis non ſub Auctoris oculis edita, ſæpe mendis variis purgavi.

Opera quæ hic exſtant, in quatuor diſperſi tomos; quæ Mechanicam Machinaſque ſpectant tomo primo continentur: Geometrica ſecundo: Aſtronomica tertio: Miſcellanea pauca quarto.

Tractatus varios Auctor ſeparatim ediderat; ſcripta minora multa in Diariis diſperſa dantur: inter hæc quædam ſpectant controverſias quæ Auctori cum viris doctis intercedere, & quæ ad eandem controverſiam pertinent, aliquando in variis regionibus publicata exſtant, partim Gallicè conſcripta, partim Latinè.

In edendis libris, ſeparatim ab Auctore publici juris factis, exemplaria manu ipſius recognita, & in variis locis aucta, & emendata, ſecutus ſum; quod etiam referri debet ad ſcripta pauca ex iis quæ in Diariis fuere tradita.

Exemplaria hæc accepi à Nob. D[no] Hugenio *Zelemii Toparchâ, qui patrui* Chriſtiani *opera hæc*

cum

cum cura servaverat, & qui libenter mihi hæc ea lege concessit, ut absoluta editione in Bibliotheca publica Acad. Lugd. Bat. jungantur cum ejusdem Auctoris manuscriptis quæ ibi servantur.

In Indice, ad calcem libri adjecto, monui ubi scripta singula antea edita fuere. Tractatus separatos Latine Auctor conscripsit, præter Institutionem de Usu Horologiorum *, *quæ Belgico sermone in lucem prodiit. Ex Gallicis Diariis excerpta scripta Gallico sermone conscripta dantur. Illorum autem quæ inter opera Acad. Reg. Paris. Artium & Scient. cum publico communicata fuere, quædam Gallica sunt reliqua Latina, nempe;*

* pag. 193.

De potentiis funesve trahentibus *: (* pag. 287.)

Constructio loci ad Hyperbolam *: (* pag. 485.)

De maximis & minimis *: (* pag. 490.)

De inveniendis tangentibus *. (* pag. 498.)

Ut omnia Latino sermone exhiberentur, quæ Belgicè, aut Gallicè, edita fuere, Latinè reddidit Clariss. Hermanni Oosterdyk Schacht, *Med. Professoris in hac Acad. Celeberrimi, Filius Dignissimus* Johannes Oosterdyk Schacht, *qui ad studia subtiliora na-*

 tus,

tus, à naturâ acceptum, adhuc dum juvenis, diligentiâ pulcherrime excoluit ingenium.

Si collectioni huic volumen operum posthumorum Hugenii, *& tractatus duos de* Lumine *&* Gravitate, *addas, omnia B. L. habebis* Hugenii *opera.*

Hæc autem quæ hìc deficiunt, eâdem formâ cum hisce, brevi edituri sunt Bibliopolæ Amstelodamenses Waesbergii.

Dabam Lugd. Bat. 3°. *Id. Mart. MDCCXXIV.*

HUGENII VITA.

CHristianus Hugenius, natus est Hagæ Comitum in Hollandia, 14. April. 1629. Patrem habuit Constantinum Hugenium, Equitem, Toparcham Zulichemii, Zelhemi, & in Monikenlandt, qui tribus Auriacis Principibus a secretis & consiliis fuit. Mater erat Susanna van Baerle.

In studiis Mathematicis integram consumsit vitam, non tantum speculationibus deditus, sed harum disciplinarum subtilissima ad vitæ usum referens. Ab ipsa infantia huic studio applicavit animum, vix natus annos novem, ipso Patre duce, in Musicis, Arithmeticis, Geographicis, miros, & vix credibiles, progressus fecit, Latinis & Græcis litteris interim animum applicans.

Anno ætatis decimo tertio quàm ingenium studio Mechanices esset aptum, quod tanta deinde hominum utilitate excoluit, in examinandis machinis, hasque, quantum infanti liceret, imitando, demonstravit.

Anno 1644. studium Matheseos aggressus est, Mathematicumque Belgam Stampioen præceptorem habuit.

Sequenti anno Academiam petiit quæ Leidæ est apud Batavos. Ibi Vinnium jus civile explicantem audivit, & magistro Schotenio studium

Matheſeos continuavit, ingeniique ad hæc ſtudia nati varia tunc temporis dedit ſpecimina, brevique famam inter Mathematicos, annos ſuperantem, acquiſivit.

Studium autem Juridicum Bredæ proſecutus eſt annis 1646, 1647, 1648, occaſione ſcholæ illuſtris, tunc temporis ibi erectæ, & curæ Patris ipſius pro parte commiſſæ.

Hagam anno ſequenti redux, Henricum Comitem Naſſavium ſecutus, Holſatiam, & Daniam, inviſit. Vehementi tenebatur deſiderio in Sueciam uſque iter ſuum producendi, Carteſium ut videret, quod ipſi non licuit, brevi finitâ Comitis legatione.

Anno 1651. Tractatum edidit *de quadratura Hyperboles, Ellipſis, & Circuli, ex dato portionum gravitatis centro* *.

* *Vide pag.* 309.

Ut librum hunc perluſtrent Lectores rogo Mathematicos, & videant an non merito, in ipſa juventute, inter ſummos Mathematicos relatus fuerit Hugenius.

Eodem anno & ſequentibus varia de refractionibus & Dioptrica conſcripſit, quæ in operibus poſthumis edita exſtant.

Anno 1655. Galliam petiit, & Andegavi Doctor Juris renunciatus eſt.

Eodem anno cum fratre Conſtantino vitris formandis, quæ Teleſcopiis majoribus inſervirent ope-

operam dedit. Telescopium decem pedum construxit quod, ut ipse persuasum habebat, omnia illius temporis superabat. Hujus auxilio comitem Saturni detexit. Omnes hujus Planetæ satellites tunc temporis Astronomos latebant, & nisi multis annis serius, reliquos quatuor, inter quos unus Hugeniano à Saturno remotior, detexit Casinus.

Non statim sibi novum sidus cognitum dari cum Astronomis communicavit, ad quosdam tamen inventum, hisce verbis & litteris involutum, misit.

Admovere oculis distantia sidera nostris V V V V V V V C C C R R H N B Q X.

Quæ verba cum adjectis litteris ipso vitro inscripsit.

Explicatio est *Saturno Luna sua circumducitur diebus sexdecim horis quatuor*. Exactius tamen in sequentibus hujus Lunæ periodum determinavit*.

* Vide pag. 551.

Transpositione litterarum Ænigma explicatur.

Per multos annos vitris formandis quibus nova in cœlis detegeret sedulam cum fratre impendit operam, præcipuè ab anno 1681 ad annum 1687, artemque hanc perfectiorem reddidere; multa ex acuratè admodum elaboratis vitris majora construxere Telescopia. Inter vi-

tra hæc duo præ ceteris antecellunt, magnitudine Telescopiorum quibus inservire debent, &, si Auctori nostri fidem habeamus, excellentiâ *; majus destinatum erat Telescopio ducentorum & decem pedum, alterum Telescopio centum & septuaginta. Hæc duo nunc possidet Anglia. Multa alia Telescopiis, centum pedes excedentibus, ut & minoribus, inservientia apud heredes adhucdum supersunt.

* Vide pag. 698.

Anno 1656 tractatum conscripsit de ratiociniis in ludo aleæ *, editus hic fuit ad calcem Exercitationum Mathematicarum Schotenii. Methodum in hoc tractatu demonstravit ipsam sortem computationi Mathematicæ subjiciendi, primusque publici juris fecit principia artis post illum ad vix sperandam perfectionem prolatæ.

* Vide pag. 723.

Anno 1657 primus mortalium tempus exactissime mensuravit, pendula dum Horologiis applicavit. Ante illum Astronomi adhibitis pendulis tempus quidem mensurabant, sed ad exigua intervalla, cum pendula talia homine indigerent qui curaret ut in motu perseverarent. Ipse autem ope Horologiorum perpetuum quasi pendulis motum communicavit, ponderibus enim Horologia agitabantur, quæ, non mutata actione in Horologia, elevari poterant.

Persuasum habebat talia Horologia & mari usu venire posse, & nil præter hæc in nave requiri ad determinandas longitudines. No-

Notum enim est, utilis hujus longitudinum problematis diu desideratam, & forte desiderandam, solutionem, ab exacta temporis mensura pendere.

Non tamen satis erat Horologiorum motus legibus fixis adstrinxisse, sed ut ipse notabat, motum æquabilem servare, navim jactantibus austris, hoc opus, hic labor erat; difficultatem tamen superari posse semper speravit, multa tentavit, & ad mortem fere usque nova, ut ad scopum perveniret, molitus est; sed licet ad hunc pertingere non potuerit, quo ingenio, qua perspicacitate, rem prosecutus est, qui horum operum tomum primum perleget dijudicabit; non omnia tamen tentamina publici juris facta fuere.

Anno 1659. *Systema Saturnium* * edidit, in quo veram causam ansarum hujus planetæ tradidit, quam ante illum nemo ne suspicione quidem attingere potuerat, hancque invictis firmavit argumentis.

* Vide pag. 527.

Sequenti anno altera vice Galliam petiit, unde in Angliam anno 1661. profectus est. Ibi artem suam laborandi vitra demonstravit, cum inter omnes constaret, Hugenii Telescopia, longitudinem viginti quatuor pedum tunc temporis non excedentia, ceteris omnibus perfectiora esse.

Novum tunc temporis inventum erat Antlia pneumatica, hujus, ab ipso ex Anglia reduce per-

perfectioris redditæ, auxilio varia instituit experimenta *.

* Vide pag. 765.

Eodem anno regulas de collisione corporum Elasticorum detexit, quas easdem postea etiam detexere in Anglia viri celeberrimi Wallisius & Wrennius, cum quo tamen ultimo contentionem, super hoc invento, habuit Hugenius noster.

Anno 1663. Lutetiam Parisiorum iterum petiit, & cum Patre in Angliam iter suscepit, ubi Sociorum numero Regiæ societatis Londiniensis adscriptus est.

Per paucos tantum ibi stetit menses & in Galliam rediit.

Anno 1664 Hagam redux de invento applicationis pendulorum ad Horologia ipsi cum invidioso quodam lis fuit.

Hoc tempore, in Gallia, studiorum se Mæcenatem demonstrabat vir Illustris Colbertus; cujus consilia de studiis promovendis libenter audiebat Galliarum Rex. Undique viri scientiâ illustres in Galliam vocabantur, inter quos Hugenius.

Hic anno 1665, nomine Regis, Colberti litteris, ut Lutetiam peteret, ibique domicilium eligeret, promisso largo annuo stipendio, oblatâque habitatione in ædificio servandis Regiis bibliothecis destinato, invitatus est.

Ibi vixit ab anno 1666. ad annum 1681. Durante hoc tempore pulcherrima, subtilissimaque mul-

multa, in Mathematicis detexit, variaque ex iis operibus conſcripſit, quæ nunc in unum corpus collecta, quid in variis Matheſeos partibus præſtiterit, ſub oculis ponunt.

Præter ipſius jam memorata inventa præclara inter alia duo inſigni uſu eminent. Libellam Teleſcopio munitam ita conſtruxit, ut ipſi præ ceteris fides haberi poſſit *. Inventum aliud ſpectat temporis menſuram, Horologiis portatilibus filum, chalybeum, ſpirale, elaſticum, adaptavit *; quo nunc nullum portatile Horologium deſtituitur, quo etiam ſublato, accuratiſſimè conſtructa omnem motus æquabilitatem amittunt.

* Vide pag. 254.

* Vide pag. 253.

Nimium verò ſtudiis Mathematicis deditus, menti gratum Corpus non potuit ſuſtinere laborem. Bis Hollandiam hac de cauſa petiit, annis 1670, & 1675, iterumque recuperatâ ſanitate in Galliam rediit, ſed tandem valetudini ut conſuleret illi in perpetuum dixit vale anno 1681, omnibuſque Regis beneficiis nuncium remiſit.

Reliquum vitæ curſum iiſdem occupatus ſtudiis abſolvit.

Anno 1682. conſtrui curavit Automaton Planetarium in quo planetarum motus in plano pulcherrime æmulatus eſt.

Machina hæc in operibus poſthumis delineata, & accuratiſſimè deſcripta, datur. Exſtat adhucdum apud hæredes.

An-

Anno 1689. Angliam tertia vice inviſit.

Sequenti anno tractatus duos, alterum de *Lumine*, de *Gravitate* alterum edidit.

Coſmotheoros tempore mortis ſub prælo ſudabat, editio tamen inchoata tantum erat.

Vitam finivit Hagæ Comitum octavo Junii 1695.

Scripta omnia legato dedit Bibliothecæ Academiæ Ordinum Hollandiæ quæ eſt Lugd. Bat. viroſque duos, inſignes Mathematicos, Burcherum de Volder, in eâdem Acad. Philoſophiæ & Math. Profeſſorem celebrem, & Bernhardum Fullenium, in Academiâ Friſiâ Franequeræ Profeſſorem, rogavit ut ex ſcriptis eligerent, quæ prælo committi poſſent, cui petitioni volumen debemus operum poſthumorum, anno 1700. editorum.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA MECHANICA.

TOMUS PRIMUS.

Tomi primi contenta.

CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM,

CONST. F.

HOROLOGIUM.

ILLUSTRISSIMIS AC POTENTISSIMIS

HOLLANDIAE
Et
WESTFRISIAE
ORDINIBUS

Dominis ſuis,

CHRISTIANUS HUGENIUS à ZULICHEM

Felicitatem omnem.

P*Roditum eſt memoriæ primum Romæ ſolare horologium fuiſſe, quod è capto Siciliæ oppido quodam, annis poſt urbem conditam* CCCCLXXVII, *cum cætera præda deportatum ſit, locoque publico dedicatum. Cui non planè ad Latii clima deſcripto, eoque nec lineas horis congruentes exhibenti, quum neceſſitate tamen & meliorum penuria undecentum annis Pop. Romanus paruiſſet, Cenſorem tandem Q. Marcium Philippum diligentius ordinatum juxta poſuiſſe, idque munus inter cenſoria opera gratiſſime acceptum. Mihi, Proceres Ampliſſimi, rem haud abſimilem nec minore publico bono hodie agitanti, ut qui non in una modo urbe, ſed omnium ubivis horologiorum inſtabilem motum correxerim, ſimilem quoque ab univerſis gratiam expectandam cenſuiſſem atque à civibus ſuis Q. Marcius reportavit, ſi, quemadmodum res eventusque iidem ex intervallo redire ſolent, ita priſcus candor & ingenuitas in terris aliquando reduces cernerentur. Verum hæ cum jam diu apud majorem hominum partem deſitæ ſint virtutes,*

contraque impostura & obtrectatio late omnia obtineant; quænam fortuna maneret inventum nostrum, simul ac vulgò innotescere cœpisset, facile equidem prævidi, neque me fefellit augurium. Ecce enim jam primum in patria hac nostra eo excessit quorundam tum audacia tum impudentia, ut nihil interdicto vestro deterriti, interpolare acceptum à nobis inventum, ac dein tanquam novum prorsus, nostroque etiam, si diis placet, præstantius jactare ausi sint. Atque hæc qui coram & ante oculos nobis fieri viderunt, nihilo meliora ab exteris regionibus imminere crebro admonuerunt. Nempe alibi quoque exorituros, & in gloriolam hanc nostram involaturos homines inique invidos, qui, forte an & sibi ipsis, certe orbi universo persuadere conentur, non hæc nostratium ingeniis deberi, sed à sua suorumve alicujus industria diu ante profecta fuisse. Cujus rei indignitas cum ad gentem omnem nostram, eoque ad vos etiam, Domini Illustrissimi, spectare videretur, qui nunquam æquo animo tuleritis inventorum longe præclarissimorum, typographiæ inquam & telescopii, laudem à Batavia vestra, plagiariorum fraude, averti; fateor me non levi stimulo impulsum fuisse, ut eidem hujus quoque qualiscunque reperti decus adsererem. Itaque eam quæ sola ad hoc patere visa est, viam secutus, rationem omnem & constructionem novi automati, autor ipse, paucis describendam & in publicum producendam suscepi; exiguo sanè volumine, sed quod brevius etiam fuisset nisi obiter ad ea quoque respondendum duxissem quæ à nonnullis objici mihi, ipsumque artificii nostri fundamentum lacessere posse, prospiciebam. Hoc vero quicquid est operæ, quum melioribus auspiciis lucem aspicere non posset, vestro Illustrissimo Nomini ac tutelæ, ea qua decet veneratione, dicatum commissumque venio, neque tam pagellas hasce pauculas, quam inventum ipsum, ut videtur, non incelebre futurum, dedico consecroque. Vos pro solita benignitate vestra favete, ad publicam utilitatem, quoquo modo studia sua referenti, neque aliud magis in votis habenti, quam ut majoris momenti in rebus eadem posthac approbare vobis contingat. Ita Rempublicam sub imperio vestro incolumem servet, beneque fortunet Deus.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII A ZULICHEM, CONST. F.

HOROLOGIUM.

TEmporis dimetiendi rationem novam, quam exeunte Anno 1656. excogitavimus, paucisque deinde mensibus in patria divulgare instituimus, etsi dubitandum non erat, propter egregiam utilitatem, brevi longe lateque manaturam, quippe pluribus jam distractis, ac dimissis quaquaversum novi operis exemplaribus; nos tamen haud inviti consiliis eorum obtemperamus, qui ut scripto comprehensam in lucem ederemus, autores fuere. cum ut illos demereamur, ad quos, ob locorum intervalla, tardius fortasse perventura erat: tum ut male feriatorum hominum audaciæ obviam eamus, ne, quod solenne ipsis est, alienis insidientur inventis, ac per summam injuriam pro suis venditent. Quanquam hos, si fuerit opus, & dati Privilegii tempus refellere possit, quod à Celsissimis Fœderatarum Provinciarum Ordinibus die 16. Junii Anno 1657. impetratum est; & testes præterea non pauci, quos de oblato nobis recens invento subinde certiores fecimus. Occasionem ei præbuisse Astronomorum pendula, facile quivis conjiciet, qui non nescierit aliquot jam retro annis hæc usurpari illis cœpta.

Nimirum fallentibus clepsydris automatisque quibuslibet; quæ inter observandum adhibere consueverant, tandem, docente primum Viro sagacissimo Galileo Galilei, hunc modum inierunt, ut è catenula tenui pondus appensum manu impellerent, cujus vibrationibus singulis dinumeratis, totidem colligerentur æqualia temporis momenta. Hac methodo Observationes Eclipsium scrupulosius quam antea peregere, Solisque item diametrum, & Stellarum distantias dimensi sunt non infeliciter. Sed præterquam quod deficiebat necessario pendulorum motus, nisi adstantis opera identidem juvaretur, tædiosus insuper labor evadebat, omnes eorum itus reditusque numerantibus; cui sane integris noctibus mirabili patientia nonnullos invigilasse, ipsis prodentibus, constat. Nos autem æquabilissimum hocce genus motus cernentes, ac veluti unicum in rerum natura datum, quod ad Mechanicam constructionem posset traduci, quæsivimus quo pacto hoc ipsum brevissime assequi liceret, atque ita remedium invenire gemino quod retulimus incommodo. Ac multa fabricæ varietate animo perpensa, hanc denique, quam deinceps tradituri sumus, ut cæteris planiorem faciliorem-que selegimus. Qua percepta & in publicum porro privatumque usum, sicut jam fieri cœpit, conversa, ad universos quidem hic fructus redundabit, quod horologiorum, cum inter se, tum cum Sole ipso, quantus nunquam antehac, imo quantus pene optari posset, consensus animadvertetur. Astronomi vero id consequentur, ut nulla posthac agitandorum perpendiculorum molestia, numerandive solicitudine, & illa omnia exequantur, quorum paulo ante meminimus, & alia illis subtiliora, ipsam puta dierum de meridie in meridiem inæqualitatem, scrutentur; quam qui negare audent, ratione hactenus magis quam certa experientia refutati sunt. Ut jam de Longitudinum, quam vocant, scientia dicere omittam: quæ si unquam extitura est, desideratumque tantopere usum cursui navigantium præbitura, non aliter, quam vectis per mare exquisitissimis atque omni errore vacuis horologiis, id obtineri posse, multi nobiscum existimant. Ve-

rum

rum hæc res vel ipsi mihi, vel aliis quandoque curæ erit. Nunc automaton nostrum & figura oculis subjiciam, & figuram verbis quam potero dilucide explicabo.

TAB. I.

Præcipuam operis partem binæ laminæ continent oblongæ atque inter se æquales, A B, C D; quibus rotarum axes utrinque inserti sunt. Eæ laminæ lateribus tantum hic sunt conspicuæ: columellas autem quatuor, quibus versus angulos connexæ sunt, de industria exprimere neglexi, ut ne reliquis officerent. Prima rota seu tympanum dentatum est E, cujus axi orbiculus quoque F affixus est. Huic circumjectus funis cum appenso pondere Δ, eo quem postea dicemus modo. Ponderis itaque vi tympanum E vertitur. Hoc movet proximum tympanum H. hoc rotam L, cujus dentes ad instar serræ dentium formati sunt. Hujus prope axem erectus stat axis M N, cum affixis lamellis sive auriculis binis, quarum alteri occurrunt superiores rotæ L dentes, alteri inferiores, idque perpetua vicissitudine, ita ut non in gyrum axis hic circumagatur, sed reciproco motu, nunc in hanc, nunc in illam partem libretur, dum interim rota L in orbem vertitur. Quem motum pluribus exponere supersedeo, quod in vulgaribus passim horologiis reperiatur. à quibus equidem hucusque nostrum hoc non discrepat; at plurimum in his quæ sequuntur. Axi enim N M infigitur O tympanum, cujus dentibus aptantur dentes rotæ P, ejus generis quas coronarias vocant artifices nostri. Nec vero toto ambitu dentata ut sit necesse est, sed parte superiori duntaxat. quippe tympanum O, haud aliter atque axis N M cui cohæret, reciprocam librationem habet, unde & rotam P simili motu agitat. Cumque major sit hujus diameter quam tympani O, sequitur ut minori etiam circuitus parte rota quam tympanum dictum gyretur. quod quo pertineat alibi indicabimus. Porro ejusdem rotæ P axis trans laminam C D aliquantum extenditur, habetque conjunctam clavulam Q R, inferius itidem inflexam & terebratam ad R, ita ut per foramen hoc laxiusculum virgula ænea I T libere transmeet. Hæc vero virgula superius ad S suspensa est filo S I, ex inferiori parte pondus T susti-

nens,

nens, quod cochleæ subjectæ conversione sursum propellitur cum opus est, vel ulterius descendit.

Quibus expositis ut motus ratio, totiusque adeo inventi percipiatur (nam quæ præterea in Schemate notata apparent, postea exequemur) advertendum est in primis, quod si perpendiculum S I T per foramen R trajectum non esset, neque omnino adesset, tunc quidem clavula Q R concitato motu ultro citroque jactaretur, vi ponderis Δ, omnes rotas automati agitantis. Transmissa autem virgula I T, cum appenso pondere T per foramen R, impeditur eo dictus clavulæ motus, totumque horologium quiescit, donec pondus T semel impulsum principium agitationis nanciscatur. Quo facto, pendulum quidem S I T oscillatorio motu fertur juxta planum laminæ C D. clavula vero Q R, momentum sentiens ponderis Δ, ultro obsequitur penduli motui, ita ut paulisper etiam vibrationibus hunc singulis adjuvet. Atque hoc modo perennis efficitur penduli agitatio, quæ nisi illud horologio conjunctum foret, brevi deficeret vergeretque ad quietem. Ad singulos autem recursus penduli, percipientur ictus totidem ex appulsu dentium rotæ L ad lamellas M, N. Et hæc quidem de motu automati nostri, quæ præcipue explicationem requirebant, quoniam in eo summa totius inventi vertitur.

In schemate porro tertia lamina est Y Z, prioribus parallela, & à lamina A B spatio distans. quo in spatio conspicitur tympanum dentatum V, communem cum rota E axem habens. Huic congruunt dentes rotæ X, quæ media sui parte conjunctum habet tubulum cavum Γ ultra laminam Y Z prominentem, impositumque gerentem horologii indicem primarium Λ. Ipsi vero Γ tubulo alius itidem cavus introrsus constitutus est, laminæque Y Z consertus, axis nimirum quo rota X volvatur, & per quem simul transmittatur axis rotæ H, cui impositus est index alius Σ longior indice Λ. Is secunda scrupula demonstrat. Primorum vero scrupulorum seu minutorum index prioribus illis utrisque multo brevior Ψ, extremo axi D V, ultra laminam Y Z producto, affixus est. Et hic quidem indiculus, laminæ, Y Z proximus fertur,

parvo

parvo in circello ſingula prima ſcrupula diſtinguens. Hoc verò ſuperior index horarum Λ convertitur: & ſupra hunc denique Σ index, quem dixi, ſecundorum. Hæc autem, uti & tympanorum omnium diſpoſitio ac dentium numerus, cum multimodis variari poſſint, nos hunc unum in exemplum proponere ſatis habuimus, eumque experientia comprobatum. Itaque & dentium multitudinem in ſingulis tympanis deſignabimus, eam quæ huic formæ optime convenire viſa eſt. In circumferentia rotarum ſingularum E H ſeptuageni bini ſunt, ſeni in tympanis G & K. rota L viginti quinque habet, tympanum O decem. rota P viginti, vel tantum partem horum aliquam, quia, ut dixi, totam dentibus inſecari nihil opus eſt. Penduli longitudo S I T pedis Rhenolandici, qui ad Romanum veterem proxime accedit, dextantem circiter æquat, & cuique vibrationi ſimplici impendit ſemiſcrupulum ſecundum. ad quam menſuram obſervationibus ad ſolem vel ad aliud hujus generis horologium comparatis non difficile perducitur. Ea longitudo rotis ita ordinatis convenit: & exquiſitam motus æqualitatem, quæque etiam Aſtronomicis uſibus ſufficiat, præſtare valet. Quod ſi tamen concinnitate operis inſuper habita, quadruplo majus pendulum adhibeatur, vel ultra etiam producatur, rotis interim majoribus quoque adſumptis, haud dubiè lentioribus oſcillationibus tutius etiam fidemus. Et jam in magnis publicis Horologiis, egregio ſucceſſu, perpendicula ejusmodi prælonga uſurpari vidimus, alibi duodecim, alibi vicenûm pedum, cum appenſa ſphæra 25 vel 30 librarum. Cæterum revertendo ad ea quæ hic poſita fuere, apparet quidem, rota E ſemel circumacta, duodecies converti rotam H. centies vero quadragies & quater eam quæ ſequitur L. Quæ cum dentes 25 habeat, 3600 vicibus alternatim impellit lamellas M. N. ac totidem recurſus duplices facit pendulum S I T. Cumque 3600 ſcrupula ſecunda, horâ unâ contineantur; hinc horæ ſpatio rota E ſemel convertetur. Quamobrem & circulus indici Ψ ſubjectus in 60 partes dividitur, quæ prima ſcrupula ſignificent. Rota vero H quia

B duo-

duodecies in hora, hoc eſt, ſemel ſpatio 5 ſcrupulorum primorum verſatur, unaque index Σ, ideo circulum huic indici ſuppoſitum in 5 partes primum diſpeſcimus, & harum deinde ſingulas in 60 minores, quæ ſecunda ſcrupula denotent. Denique index Λ in ſuo circulo duodecim horas diſtinguere debet; ac proinde, ut harum tempore ſemel circumeat, tympano V ſex dentes tribuuntur, rotæ X ſeptuageni bini.

Nunc qua ratione pondera Δ, Ξ, horologio appendantur docebimus. Hæc enim novo artificio ita ordinavimus, ut cum ſurſum retrahitur pondus primarium Δ, non propterea ceſſet aut ullatenus impediatur horologii curſus. Quod in hac inventione apprime neceſſarium erat, ne particula temporis aliqua quotidie ſubduceretur, neve penduli motus interea dum pondus attollitur langueſceret. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primo orbiculum F amplexus, aculeis ferreis aſperum, quo melius funis inhæreat, parte altera trochleæ, cui pondus primarium Δ alligatum eſt, circumvolvitur. Hinc aſcendens ſuper orbiculo Ω tranſit, ac rurſus deſcendens ſuſtinet trochleam alteram cum appenſo minori pondere Ξ; unde denuo ad F redit. Orbiculus Ω (quem demonſtrandi gratia hic inter laminas A B, Y Z, ſuſpendimus, nam alioqui commodius thecæ quæ toti horologio circumdatur affigi ſolet) circumferentiam verſus denticulos habet, ut in rota L, ſerratos, ac deſuper prementem elaterem Θ, quo fit ut in alteram tantummodo partem volvi poſſit, attracto nimirum fune Π, ac pondere propterea Δ aſcendente: Nam contrarium motum elater dentibus occurrens prohibet. Crenam autem ſecundum circumferentiam dicti orbiculi ita cavari oportet, ut funem immiſſum nonnihil coarctet conſtringatque, quo minus poſſit immoto orbiculo delabi; quem in finem etiam pondus Ξ adhibetur. His ſic conſtitutis, ſemper Δ dimidia ſui gravitate incumbet funi Φ, motumque horologio continuabit etiam dum attracto fune Π in altum attollitur. Et hactenus

qui-

quidem quæ ad constructionem automati pertinent declaravimus.

Reliquum est, ut, quantum idem iis omnibus, quæ ad hanc diem in usu fuere, antecellat, perspicuum faciamus. Satis constat plurimas in his erroris & inæqualitatis causas esse. Nam & in disponendis rite elimandisque tympanis vel levissimum peccatum, continuo motus inconstantia notabilis consequitur. Tum vero & siccato atque evanescente oleo, quod axibus addi solet, tardius horæ procedunt. atque ut hæc absint, varias tamen, anni tempestatum & aeris, mutationes horologia sentiunt, imo præsentiunt nonnunquam: & frigore quidem plerunque pigriora comperiuntur, æstu plus æquo properant. Penduli vero cum sit ea vis ac proprietas, ut necessario eodem semper tenore feratur, neque ab eo nisi mutata longitudine unquam declinet; apparet sane omnia illa quæ diximus incommoda invento nostro penitus nos sustulisse, adeo ut nisi tale quod interveniat impedimentum, quo horologii motus omnis sistatur, nulla jam cursus ejus retardatio aut inæqualitas timenda sit. At enimvero non nemini duplicem hic dubitandi causam oboriri posse scio. Primum, quod differre à pendulo libero nostrum hoc videatur, quippe ad singulas vibrationes vim quandam ac nixum clavulæ Q R sentiens. Deinde quod, etiamsi penduli simplicis proprietates retineat, perque omnia æmuletur, hujus tamen ipsius geminæ inæqualitates à nonnullis, qui subtiliter hæc perquisiverunt, animadversæ sint. Hìc illud quod de clavulæ impressione dicitur verum esse non diffitemur. Sed levissimam utique hanc esse novimus ratione gravitatis T, quæ sic temperatur, ut tantum non deficiat penduli agitatio, sed quam minimâ, & eâdem tamen latitudine perseveret. Proinde nihilo concitatior aut minus æquabilis hic ipsius motus evadit, quam si clavulæ prorsus obnoxius non esset, pendulumque simplex S I T, ut adhuc fieri consuevit, manu impelleretur. Et hoc quidem ex-

perientia optime comprobat. Penduli vero ipſius, quas adnotant, binas inæqualitates, alii autem contra pernegant, earum alteram admittimus, ſed vix quicquam horologio noſtro officientem, alteram plane nullam eſſe adſeverare non dubitamus. Illud itaque vere aſſerunt, non prorſus æquali tempore latiores ejusdem penduli ac anguſtiores vibrationes tranſire, ſed his illas paulo plus inſumere, quod facili experimento demonſtrari poteſt. Nam ſi pendula duo, pondere ac longitudine æqualia, alterum procul à perpendiculo, alterum parumper dimoveantur, ſimul dimiſſa, non diu in partes eaſdem una ferri cernentur, ſed prævertet illud cujus exiliores erunt recurſus. Verum huic inæqualitati noſtrum, uti dixi, horologium minus obnoxium eſt, eo quod omnes oſcillationes æquali ſpatio à perpendiculo excurrant. Nec tamen in totum expers remanſit, ſi minutiſſima quæque, ſicut hac in re fieri neceſſe eſt, conſectari velimus. Contingit ſiquidem vel aëris intemperie, vel operis vitio aliquo, ut non ſemper pari vi agitetur clavula Q R, unde & oſcillationes penduli (licet exiguo diſcrimine) creſcere ac rurſus imminui neceſſe eſt. Cumque ampliores recurſus arctioribus, ſicut modo dicebam, plus temporis impendant; idcirco nonnulla hinc in horologii motu inæqualitas exiſtit. Et huic quidem, utut contemptibilis videri poſſit, remedium etiam adhibere ſolebamus, quamdiu ita conſtructa erant horologia, ut majuſcula eſſet penduli agitatio. Poſtmodum vero, ne remedio opus eſſet, effecimus adhibito tympano O rotaque P: quibus hoc conſequimur, ut quamlibet anguſtæ ſint penduli vibrationes, neque eo ſecius axis M N, quantum neceſſe eſt, reciproco motu convertatur. Nam cum tympani O diametro dupla vel tripla ponatur diameter rotæ P, ſequitur ut hujus exigua licet oſcillatione, illud tamen ſatis magnam circuitus partem abſolvat. Sic igitur oſcillationibus univerſis exilioribus redditis, etiamſi harum aliæ alias latitudine quandoque excedant, ſingularum tamen tempora, experientia teſte, nullo memorabili diſcrimine differunt. Qua ex re & hoc contingit, ut aucto

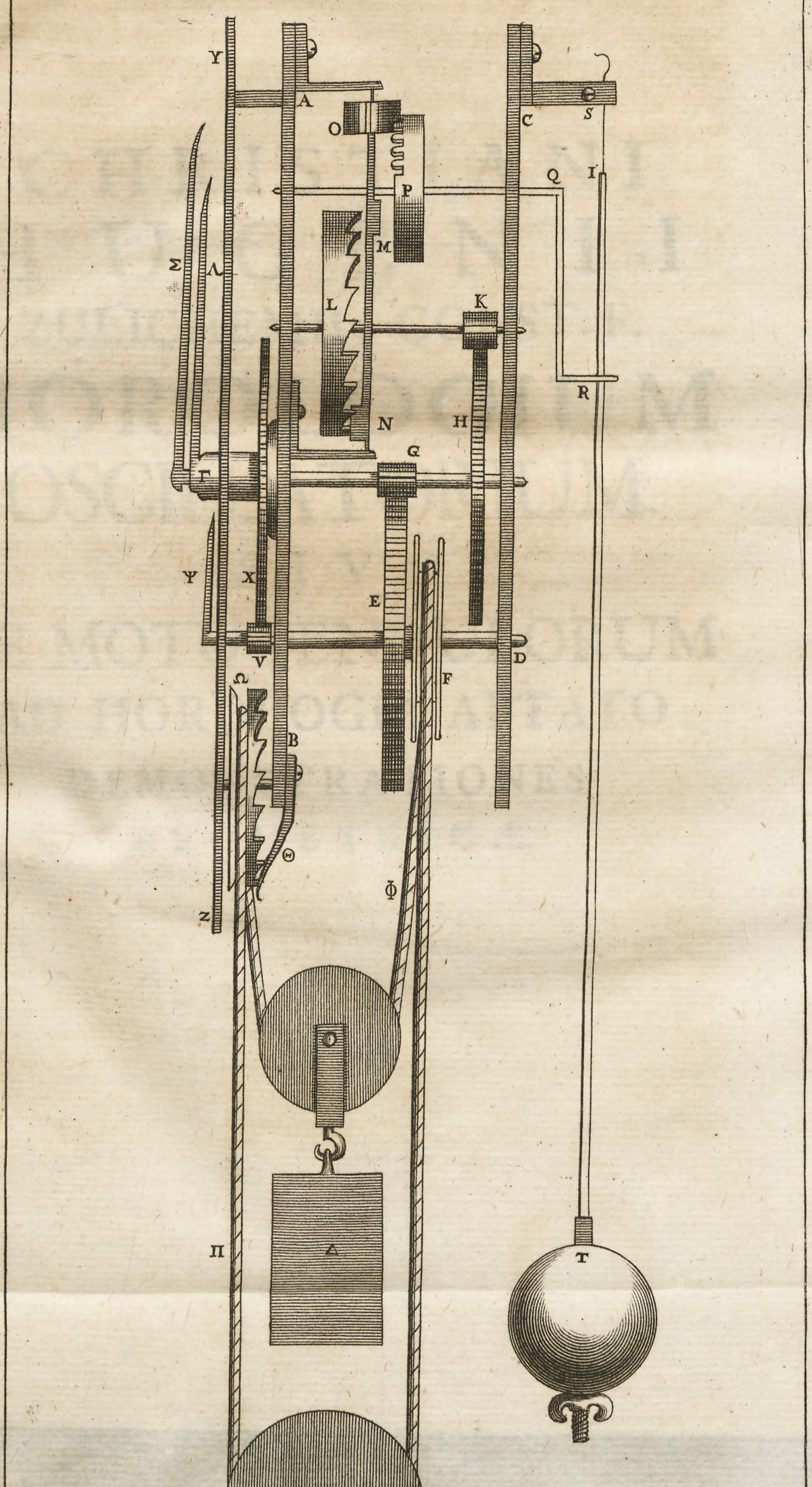
vel

vel ad duplum pondere Δ, non propterea penduli motus acceleretur, aut horologii cursus alteretur, quod in omnibus aliis hactenus usitatis secus accidit. Alteram penduli inæqualitatem, Vir Astronomiæ studiis clarus, Gothofr. Wendelinus, primus & solus, ut opinor, prodidit; expertum sese scribens, ejusdem penduli velociores esse oscillationes hyemali tempore quam æstivo idque notabili differentia. Sed quoniam in eo examine arenaria tantum horologia, vulgariaque automata sese adhibuisse fatetur, cum sciotericis, fortasse non nimia cura descriptis; multi, quam recte se haberet hæc ipsius observatio, dubitarunt. Mihi certe nihil ejusmodi licuit animadvertere. Quin contra, & minoribus horologiis, quibus semipedale est pendulum, & majoribus, in quibus 24 fere pedes æquat, eandem perpetuo longitudinem, brumæ tempore ac æstate media, convenire expertus sum. Quæ longitudo saltem septima sui parte per hyemem productior esse deberet, si Wendelini vera foret opinio.

Asserta igitur & hac in parte automati nostri motus æquabilitate & constantia, finem jam descriptioni imponemus; multa quæ his addi præterea possent, artificum industriæ relinquentes, qui rationem inventi hujus edocti, non difficile reperient quo pacto illud varii generis horologiis, atque iis etiam quæ pridem ad veterem formam fabricata sunt, applicari queat. Nos quidem apud eum, cujus opera primum in his fabricandis usi sumus, talia quoque confecta vidimus, quæ non pondere, sed elateris vi moverentur. In quibus, cum antehac pyramide illa æquatoria, chordaque huic circumvoluta opus esset, quorum ope adæquarentur primi ac postremi elateris impetus; nunc iis omissis, ipsi tympano, cui elater inclusus est, dentes adduntur. Nam licet hoc modo non æque in fine ac principio vigeat penduli motus, non tamen eo lentiores sub finem oscillationes efficiuntur, uti superius fuit demonstratum. Elater vero ea parte, qua ad centrum convolutus est, intenditur, atque ita cavetur ne quo temporis momento cursus horologii suf-

flaminetur. Mitto quod & sonitu horas edentia automata hujusmodi machinatus est, ita ut uno eodemque, sive pondere, sive elatere, pars utraque, tam quæ ad hoc comparata est, quam quæ indicem horologii versat, moveretur. Etenim hæc omnia ad inventum nostrum haud aliter spectant, quam quod occasionem iis atque opportunitatem præbuerit.

F I N I S.


Y
A
O
C
S
Q
I
P
M
Σ
Λ
L
K
R
N
H
Γ
G
Ψ
X
E
V
D
Ω
F
B
Θ
Φ
Z
Π
Δ
T
Ξ

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM.

SIVE

DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.

Dividitur liber hic in partes quinque, quarum

Prima *Descriptionem* Horologii Oscillatorii continet.

Secunda agit de *Descensu gravium*, & *motu eorum in Cycloide.*

Tertia de *Evolutione & Dimensione linearum curvarum.*

Quarta de *Centro Oscillationis seu Agitationis.*

Quinta *alterius Horologii constructionem*, in quo circularis est penduli motus, exhibet, & Theoremata de *Vi Centrifuga.*

LUDOVICO XIV,
FRANCIÆ ET NAVARRÆ
REGI INCLYTO.

RENATAM, Rex maxime, reſtitutamque hoc ſæculo Geometriam, Galliæ præcipue debemus. Hinc enim orti, qui magna meliorique ſui parte deperditam, ac veluti ſepultam, inſtaurarunt primi, & in lucem reduxerunt. Quorum veſtigiis inſiſtentes, ita eam deinde, per totam Europam, excoluere viri ſubtiliſſimi, ut pauca jam poſterorum induſtriæ ab his relicta videantur; veterum vero inventa longiſſime prætervecti ſint. In hac ſcientia, quam ſemper admiratus ſum & amavi plurimum, quandocunque ad eam animum applicui, illa mihi præ cæteris propoſui inveſtiganda, quæ vel ad vitæ commoda, vel ad Naturæ cognitionem, reperta

prodesse possint. Tunc verò optimè operam me collocasse existimavi, cum in ea incidissem, in quibus utilitas cum inveniendi difficultate, ac subtilitate aliqua, conjuncta foret. Quod si commendationis nonnihil accersere muneri nostro permittitur, ne prorsus indignum tua magnitudine appareat; non alias felicius, quam in hoc Horologii invento, utrumque illud me consecutum esse profiteor. Etenim, cum ex parte mechanicum sit inventum; ex parte altera, eaque multò præcipua, geometricis principiis constet; id quod ad hanc attinet, non levi conamine, ex intimis artis recessibus petendum fuit: adeo quidem, ut inter omnia, quæ impensiore studio hactenus pertractaverim, haud dubie primum huic speculationi locum tribuam. Quænam vero in his sit utilitas, non est quod multis, Rex potentissime, ostendere tibi laborem. Non solum enim diutinâ experientiâ compertum habes, ex quo regiæ tuæ penetralibus recipi meruere Automata nostra, quantum, æquabili horarum demonstratione, cæteris hujusmodi machinationibus excellant: sed & potiores usus eorum, quibusque jam inde à principio mihi destinata fuere, non ignoras. Illos scilicet, quos & in Cælestium observationibus, & in Longitudinibus locorum inter navigandum dimetiendis, præstare apta sunt. Tuo enim jussu, non semel, per mar[illegible] vecta fuere Horologia

logia noſtra. Tuis auſpiciis eadem nec pauca, Aſtronomiæ uſibus dicata, viſuntur in præclara illa Uraniæ arce, quam inſigni nuper magnificentia, quantaque antehac regum nemo, exædificandam curaſti. Quæ quoties mecum reputo, toties de fortuna hujus inventi, quod in tua tempora inciderit, non parum mihi gratulari ſoleo. Nec jam requiret quiſquam, opinor, qui quantum tibi illud debeat intelliget, cur lucubrationes has, quibus rationem ejus omnem deſcriptionemque explicui, auguſto Nomini tuo inſcribendas duxerim. Ac minus etiam id mirabitur, qui mihi, ad hæc atque alia meditanda, tranquillum otium benignitate tua contigiſſe didicerit. Namque & hujus, ut mihi aliquatenus apud te ratio conſtaret, adnitendum erat; & quoquo modo conandum, ut, multis continuiſque à te beneficiis affectus, nonnulla grati animi ſignificatione defungerer. Scio equidem, rebus maximis, negotiiſque iis intento, quæ in illo rerum faſtigio poſitum agitare convenit, haudquaquam tibi liberum eſſe, ut ad hujuſmodi contemplationes animum, alioqui rerum omnium capacem, advertas. Sed non ideo minus grata hæc fore, minusve tibi probatum iri arbitror, Rex auguſtiſſime; cui illa maxime placere videmus, quæ plurimum publicè proſunt; neque aliud magis curæ eſſe, quam ut nova incrementa ſumant optimæ diſciplinæ,

novisque illustrentur inventis. Hoc enim satis declarat eximia illa tua, ac singularis, tum in ipsis promovendis, tum in his qui cognitione earum præminent remunerandis, liberalitas. Quam non immensæ, ac solito majores, bellorum impensæ quidquam imminuunt : non Galliæ tuæ fines circunscribunt. Ut plane te hoc agere appareat, quo non solum sub imperio tuo viventes, sed & Orbis universus, quacunque beneficio tuo dignus est, te regnante, eruditior, ornatior, felicior evadat. Cui verissimæ præclarissimæque gloriæ tuæ, ita aliquid fortasse etiam hæc literaria monumenta conducent ; ut, si viguisse hoc tempore studia ista, artesque, posteris testari possint, simul illos edoceant, tuæ hoc virtuti, atque animi magnitudini, ante omnia acceptum ferendum esse. Lutetiæ Parisiorum ; XXV. Mart. A. CIↃIↃCLXXIII.

HADRIANI VALLII
DAPHNIS,
ECLOGA.
Ad Christianum Hugenium Zulichemium, Constantini F.

FINITIMUM *tutela, simul jucunda voluptas,*
*Dilectæ Phœbo, Sceverinides *Oceaninæ;*
Hunc quoque Pierium mihi fortunate laborem:
Pervigilem noctem quo carmine duxerit Ancon
Navita, dicemus: vestro sic gurgite numquam
Pan lavet, aut turpes incestent æquora Fauni.
Te, quem Fama vehit super aurea sidera curru,
Ne pigeat nobis aurem præbere faventem,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, fratrumque patrisque:*
Haud indigna tuo ferimus donaria sensu,
Sicelisin aptata modis à vate Batavo
Mixta Palæphatio commenta Solensia versu,
Teque intertextum tuaque præclara reperta.
Jam caput Oceano, stipata minoribus astris,
Extulerat radiis fraternis æmula Phœbe,
Cum reditum molirentur pastoria pubes,
Sidere quam pleno conchas legisse marinas
Juverat, hærentesque vadis captare paguros.
In celso tamen advertunt Ancona morantem
Colle, reum toties promissi carminis. ipsum
Thestylis & Corydon, quos cætera turba secuti,
A tergo circumveniunt, cinguntque corona.

* Sceverina, Pagus apud Batavos, mari adjacens.

Ecquid agat, rogitant blande: tum fausta precantur;
Et damnant voti, promissaque carmina poscunt.
Contra ille; O Pueri, quid portet crastinus Eos,
Sedi explorator: turmales agmine mergi,
Solivaga aut cornix, aut alcyones desertæ
Si qua darent mihi signa. maris cras æquor arandum.
Detinuit nunc usque Jovis clementia sudi,
Et picturatus tot circum animalibus æther.
Quæ nos in vitreo miramur monstra profundo,
Fert radians æther, vultus formasque natantum.
Cancer ibi est, delphinque; est grandi corpore cetus.
Ad Boream pisces, & contemplere sub Austro
Pisces; nuper ubi numero crevisse feruntur.
Sunt urna, fluviusque, & aplustris comta carina
Illic. quin operis simulamina plurima vestri,
Luminaque in cœlo pecori debentia nomen.
Sunt hœdi parvæque sues, materque capella.
Et fuse sparso quæ candet semita lacte.
Vestibulum servant, elucens vellere fulvo
Dux aries, ingensque auratus cornua taurus.
Bini cernunturque canes, pernoxque bubulcus;
Plaustraque; quique auriga suis excussus habenis.
Stellatum volat alatus per inane caballus:
Ac præsepe suum juxta stabulantur aselli.
Illic virgo, manum Cereali inlustris arista,
Et, transmutatus faciem, Pan ipse renidet;
Daphnin amans vestrum, secretæ rupis in umbra,
Uranie velut edocuit: me singula Daphnis.
Singula quæ (carmen quia poscitis) ordine pandam.
Extemplo tentat vocem: numerosque modosque
Perpendens mulcet variis concentibus auras.
Tum venti posuere. jacet sine fluctibus æquor;
Factaque sunt terris, sunt facta silentia ponto.
Mox interfatur: Quod prosperet; ab Jove magno
Ordiar: ordiri consuerunt ab Jove vates.
Vos, nec enim rerum brevis hic mihi nascitur ordo,

Noctur-

Nocturnum chorea defendite corpore frigus.
Inde Jovis magni cunas, veterisque celebrat
Saturni jussum crudele, dolumque Cybelles;
Ortaque Dictæis Corybantia sacra latebris:
Ut puero nutrix sit olentis lecta mariti
Uxor; & ipsa recens hædos enixa gemellos;
Queis comitata polum modo lucida stella frequentet,
Quæ prius Oleniis balavit bestia campis;
Sub pedibusque terat formosi limen Olympi.
Tantus amor Jovis, & percepti gratia lactis.
Nec tamen hoc niveum manasse fluore nitorem,
In duo secta vias, oculis manifesta videntum,
Semita quo candet ducens ad tecta Tonantis;
Tergeminam sed noctem productumque canebat
Alciden mundo; Deus immortalis haberi
Haud pote qui fuerat, sopitæ parvula mammis
Labra pater gnati nisi conjugis admovisset:
Quæ, simul experrecta, simul conterrita, surgens
Uvidulas tenero mammas subtraxerit ori,
Indignata. pavimentum tabulataque cœli
Deciduus maculis ut tunc infecerit albis
Per convexa ruens in se revolubilis humor:
Orbita cycneo nunc unde bifurca colore,
Ducta per æquales medio discrimine partes,
Cæruleum velut argento ferruminet axem:
Axem, cervices qui quum lassaret Atlantis,
Haud gravis Herculeo requierit sarcina collo;
Atque tot ærumnas quem post, manesque subactos,
Ipse suis ornet jam portio magna triumphis;
Hesperidum contra custodem divitis horti
Insurgens Anguem pede nixus; apertaque retro
Terribili rictu nil curans ora Leonis;
Lerneæque audacem Hydræ succurrere Cancrum;
Monstra novercales testantia jugiter iras
Et frustra bacchatum odium Junonis iniquæ.
Hinc aliam memorat grassatam fraude novercam;

Et transmittendi pavidam nimis æquoris Hellen:
In thalamos sit ut illa tuos, Neptune, recepta:
Phryxeumque pecus, fœtamque heroibus Argo
Phasidos ad fluctus deducit & æthera cantu.
Nec silet Europæ vectoris præmia; vel te,
Bigarum Pelopis perjuri, Myrtile, rector.
Myrtoum pelagus signaras ante caduco
Funere; sublimem nunc tollunt cornua Tauri.
Haud procul his Hyades notat exardescere: sed, quæ
Sunt Hyades Grajis, Suculas dixisse Latinos;
Atque duas septem mutasse Trionibus Arctos;
Arctophylaca pigro, sua plaustra sequente, Bubulco;
Quando bovem prisco vocitabant more trionem,
Quod tereret duro proscissam vomere terram.
Hanc adeo sortem miserans, suspiria ducit;
Buceriumque genus questu compellat inani;
Ah pecus infelix, armentum! sæcla fuerunt,
Pondere quum duro neque vos gemeretis aratri,
Navita nec vestro vocitaret nomine stellas.
Tunc neque sidus erat terris pia Virgo relictis,
Quæ Cereale manu spicum gerit; Icariotis
Sive sit Erigone, cui fida Canicula patrem
Quærenti indigna monstravit cæde peremtum;
Atque, comes dominæ, domino comitem Oarioni
Astra minor socium majorem repperit inter:
Seu magis Astræi sit sanguine creta, perenne
De genitore suo quæ nomen contulit astris:
Sive sit antiquæ Themidis justissima proles,
Aversata jugo vos aspectare gravari,
Tempora dum, pulsis melioribus, ærea surgunt:
Sive sit alma Ceres; horrens fugitiva videre
Vos quoque mactari; nil pejor linquit inausum
Ferrea dum soboles, ipsorum inimica Deorum:
Quos, quasi de terra (nam Dii coluistis & illam)
Sit pepulisse parum, tentavit pellere cælo.
Tum detestatur suffultos angue Gigantas;

Por-

Porphyriona, statu terrentem cuncta minaci;
Rhæcumque; immanemque Gygen, validumque Mimanta;
Enceladumque; manusque rotantem Ægeona centum;
Et, cui par nemo feritate, Typhöea dirum,
Ausos invasisse Deos tellure fugatos,
Ac totum magno cœlum complesse tumultu,
Undique divulsas jaculantes torviter ornos
De tumulis cumulorum montibus ex aggestis.
Terrigenam ut pubem, Divûm penetralia sancta
Rimantem, Superi mentito fallere vultu
Quæsierint, addit; dispertitosque pavore:
Donec apud late stagnantis flumina Nili
Horrificam faciem Pan sumserit Ægocerotis;
Ambiguoque sono Superos animarit ad arma,
Anguipedesque metu dare terga coëgerit omnes:
Cœlo donandos Asinos auxisse timorem
Congerie vocum, perterricrepoque fragore:
Illa cælicolis nam tempestate fuisse
Auxilio Satyros, Silenorumque phalangem,
Evantes in asellis cum Bacchæo ululatu,
Thyrsis armatos, tectos colocynthide parma.
Parvus ut interea volucer cum matre Cupido
Venerit Assyrii fugiens Euphratis ad undam;
Induerintque gregis (Syriæ post numina genti)
Squammigerum formas, gemini nunc aurea Pisces
Lumina, signiferum Capricorno juncta per orbem,
Ni fusa medius secernat Aquarius Urna;
Deucalioneos neque non edisserit imbres,
Nectaris aut quanti Ganymedes pocula verset;
Sive sit is Cecrops, peplo præsignis Athenæ;
Pastor Aristæus seu plena alvearia gestet,
Quæ subter volitetis apes examine denso.
Qualiter & pandus vectarit Ariona Delphin,
Ac aliter vectum Danaeium Persea narrat;
Cepheaque, Andromedenque, & mœstam Cassiopeiam;
Insertumque polo vastum Pistricis hiatum:

D *Quem*

Quem Phaëthonteus longo sinuamine propter
Fulgeat Eridanus declivi proximus Austro:
Nuper ad occulti Batavos ubi verticis axem
Intuitos nova squammigerum simulacra micare:
Sollertes Batavos, imo seu gurgite piscem
Venari sit opus, vel in alto sidera cœlo.
Tum canit, ut Daphnis sacra sub rupe docentem
Viderit Uranien: argutas carmina silvas,
Et repetita cavos ediscere carmina montes:
Ut Chaldæa vetus, mira dulcedine capti,
Stent auditores circum, & Babylonia turba;
Dein quos Graja tulit, quos aut Nilotica tellus,
Itala quos, ac pulchra suo cum Cæsare Roma;
Post Arabum de stirpe viri & regnator Iberus;
Ac tandem quos consultos Germania misit
Astrorum cœlique, suæ qui sidera terræ;
Inferior nullis ut item neque Gallia desit;
Gallia magnanimi Regis splendore superba,
Borbonios ignes cui parturit arduus æther:
Tum Dea quo Daphnin, Divam quo Daphnis amore
Complexus, quanti non conscia Latmia saxa:
Utque Conon juveni radium donarit, utrimque
Multo insignem auro, & pellucidulis crystallis;
Per quas quod spectes, prope fiat; & augmina sumat:
Dixerit &: Sollers, en, primus quale Batavus
Munus adornarit; sed Etrusci quo decus Arni
Est Antenorea senior Tyrrhenus in urbe
Regna Jovis princeps metatus, ab æthere vobis
Nunquam nota prius miracula nuntia portans;
Lunaï montes; vultus tibi, Phosphore, ternos;
Quove satellitio sublustri nocte vagetur
Stella Deûm regis per cærula templa superne.
Hoc quoque tu non nota prius miracula prodes:
Hujus erat tibi servatus sollertior usus;
Arcanumque Chroni mortalibus omne recludes.
Accipe frustra olim nobis optabile donum.

Daphni-

Daphnidis ad gratum nomen pernice chorea
Exſultant alacres Pueri: neque ſegnius ipſe
Proſequitur; Geminas imitantia lumina falces
Hactenus ut vane Saturni credita ſidus
Oblongo tam diverſa ſub imagine diſco
Fingere, quando globum teretem teres annulus extra
Splendet, & amoo nigror ſpatii diſterminat intus;
Exiguo circum quos erret ſtellula gyro:
Omnia divino quæ fretus munere Daphnis
Extulerit, non ante novam vulgata per artem:
Adjungitque; quod his meritis permulſus, eundem
In ſua magna Chronus ſit adire ſacraria paſſus:
Heic oculis luſtrarit ut omnia; promſerit atque
Inventum ſubtile ſecandi temporis illinc;
Partes quo minimas ac momina dividat horæ,
Oſcilla ex tenui ſuſpendens mollia filo:
Id labyrintheos curſus qui dirigat alni,
Ignarumque viæ ratis haud ſinat eſſe magiſtrum:
Cui neque quotidie tam certus ſpondeat auctor,
Oceano quantum Titan altiſſimus exſtet;
Ac quibus emergat, queis tunc ſimul occidat oris,
Daphnidos egregio norint conamine docti.
Ille canit: chorus in numerum ſua brachia quaſſant,
Alternoque ſolum pede pulſant. at freta ſaltu
Librabant hilares ſeſe ſuper humida thynni.
Auritus leporum populus tunc creditur ultro
Iliceas liquiſſe domos, carasque quietes
Vicini nemoris: nulloque frequentior unquam
Caricis arroſor prodiiſſe cuniculus antris
Tempore narratur; narrent ſi vera puellæ
Littoreæ, quæ ſiccandis cuſtodia paſſim
Retibus ad ventos expanſis forte ſedebant.
Pectore Nereïdes nudo, laſciva caterva,
Viſa per incertam Lunam, viſæve putantur,
Et Triton, Glaucusque, procul ſub luce maligna;
Tuque, cubans juxta ſtratas prope littora phocas,

 Neptu-

Neptuninarum pecudum fidissime custos:
Neu quisquam seræ meminit decedere nocti.
Interea tenebræ densantur; & abdita nimbo
Cynthia dum latitat, cœli de parte serena
Cinctum non solitis processit crinibus astrum,
Prolixumque trahens albore notabile syrma.
Mirantur chorus attoniti. miratur & ipse;
Præsertim tantum capiti cum demsit honorem,
Ornatumque sequacem omnem mox reddita Luna.
Infit &: Ad sua quisque mapalia tendite nota,
Prodigio nil solliciti, curamve foventes.
Insuetos alias tales cantabimus ignes,
Et trepidantem nequicquam formidine vulgum.
Hæc Ancon: mihi visa tibi quæ digna referri,
HUGENIDE, *decus Hugenidum, cui sidera curæ,*
Nec Phœbum ac Pimplæ fas est contemnere Divas,
Queis tua tota domus, fratres, genitorque dicati.
Sic neque te facies peregrini terreat astri,
Idemve anne alius vario fulgore cometes.

A. CIↃ IↃC LXV.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII ZULICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIUM OSCILLATORIUM, SIVE DE MOTU PENDULORUM AD HOROLOGIA APTATO

Demonstrationes Geometricæ.

ANNUS agitur sextus decimus ex quo fabricam horologiorum, tunc recens à nobis inventorum, edito libello * publicam fecimus. Ab illo verò tempore cùm multa invenerimus ad perfectionem operis spectantia, visum est ea singula hoc libro exponere. Quæ quidem adeo ad perfectionem ejus inventi pertinent, ut potissima ejus pars censeri possint, ac velut fundamentum totius mechanicæ hujus, quo prius de-

* Vide supra pag. 5.

ſtituta erat. Menſura enim temporis certa atque æqualis, pendulo ſimplici naturâ non inerat, cum latiores excurſus anguſtioribus tardiores obſerventur; ſed geometria duce diverſam ab ea, ignotamque antea penduli ſuſpenſionem reperimus, animadverſâ lineæ cujusdam curvaturâ, quæ ad optatam æqualitatem illi conciliandam mirabili planè ratione comparata eſt. Quam poſtquam horologiis adhibuimus, tam conſtans certusque eorum motus evaſit, ut poſt crebra experimenta terra marique capta, manifeſtum jam ſit & Aſtronomiæ ſtudiis & arti Nauticæ plurimùm in iis eſſe præſidii. Hæc ea eſt linea quam defixus in circumferentia currentis rotæ clavus, continua circumvolutione, in aëre deſignat; à Geometris noſtri ævi cycloidis nomine donata, & ob alias multas ſui proprietates diligenter expenſa; à nobis verò propter eam quam diximus menſurandi temporis facultatem, quam nihil tale ſuſpicantes, ac tantùm artis veſtigiis inſiſtentes, ineſſe ipſi comperimus. Hanc cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo poſt primam horologii editionem animadverſa fuit) nunc eandem, demonſtratione quàm potuimus accuratiſſima firmatam, omnibus legendam proponimus. Itaque in hac tradenda demonſtratione potiſſima pars hujus libri verſabitur. Ubi primùm neceſſe fuit novis nonnullis demonſtrationibus ſtabilire & promovere ulterius viri maximi Galilei de deſcenſu gravium doctrinam, cujus fructus deſideratiſſimus, atque apex veluti ſummus, hæc ipſa quam invenimus cycloidis eſt proprietas.

Quæ porro ut ad pendulorum uſum aptari poſſet, nova curvarum linearum conſideratio adhibenda fuit, earum ſcilicet

quæ

quæ ſui evolutione alias curvas generant. Unde comparatio inter ſe longitudinis curvarum cum rectis naſcitur, quam ulterius etiam quam præſens neceſſitas poſtulabat proſecutus ſum, propter theoriæ, ut mihi viſum eſt, elegantiam & novitatem.

Cæterùm ad explicandam Penduli Compoſiti naturam, cujus utilitatem in conſtructione horum automatôn demonſtro, adjungenda fuit Centrorum Oſcillationis contemplatio, à pluribus quidem, ſed minus feliciter, hactenus tentata; in qua theoremata complura animadverſione, ni fallor, digna reperientur, ad figuras lineares, planas, ſolidasque pertinentia. Ante hæc omnia vero præmittitur ipſa horologii mechanica conſtructio, pendulique applicatio, eâ formâ quæ ad uſus aſtronomicos aptiſſima reperta eſt, ad cujus inſtar reliquæ omnes, mutatis quæ opus eſt, facile ordinari poſſint.

Quia vero contigit egregio hujus inventi ſucceſſu, quod fieri plerumque ſolet, quodque futurum prædixeram, ut plures ſeſe ejus auctores eſſe cuperent, aut ſi non ſibi ipſis, ſuæ tamen nationis alicui potius quàm nobis eum honorem tribui vellent; iniquis eorum conatibus tandem aliquando occurrendum hic arbitror. Nec ſanè aliud fere opponere iis neceſſe fuerit præterquam id unum, nempe ante annos ſexdecim, cum nec dicto nec ſcripto cujusquam de horologiis hujusmodi mentio facta eſſet, aut rumor ullus omnino ferretur (loquor autem de penduli ſimplicis uſu ad horologia translato, nam de Cycloidis additione nemo credo controverſiam movebit) conſtructionem eorum propria meditatione me adinveniſſe & perficiendam curaſſe. In ſequenti anno, qui nempe hujus ſæculi quinquageſimus octavus fuit, deli-

nea-

neationem automati deſcriptionemque typis vulgaſſe; exemplaria, tum operis ipſius, tum libelli, quaquaverſum dimiſiſſe. Nam cum hæc ita omnibus nota ſint, ut nec teſtimoniis eruditorum, nec Bataviæ Ordinum actis, quibus poſſent, confirmari opus habeant, facile apparet quid de illis exiſtimandum ſit, qui ſeptem poſt annis eandem conſtructionem, quaſi à ſe ſuisve amicis profectam, libris ſuis venditarunt. Qui vero Galileo primas hic deferre conantur, ſi tentaſſe eum, non vero perfeciſſe inventum dicant, illius magis quam meæ laudi detrahere videntur, quippe qui rem eandem, meliore quam ille eventu, inveſtigaverim. Cum autem vel ab ipſo Galileo, vel à filio ejus, quod nuper voluit vir quidam eruditus, ad exitum perductum fuiſſe contendunt, horologiaque ejusmodi re ipſâ exhibita, neſcio quomodo ſibi creditum iri ſperent, cum vix veriſimile ſit adeo utile inventum ignoratum manere potuiſſe annis totis octo, donec à me in lucem ederetur. Quod ſi deditâ operâ celatum fuiſſe dicant, idem hoc intelligunt à quolibet alio poſſe obtendi, qui ſibi originem inventi arrogare cupiat. Itaque probandum quidem id foret, neque eo magis ad me tamen quicquam pertineret, niſi unà quoque oſtendatur, id quod omnes latebat, mihi ſoli innotuiſſe. Et hæc quidem neceſſariæ defenſionis cauſa dicenda fuere. Nunc ad ipſius automati conſtructionem pergamus.

HO-

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS PRIMA,

Descriptionem ejus continens.

FIGURA adscripta horologium à latere inspiciendum præbet, ubi primum laminæ binæ sunt A A, B B, semipedali aut paulo ultra longitudine, latæ pollices duo & semis, quarum anguli quatuor columellis coaptantur, ut sesquipollice inter se distent. His laminis rotarum præcipuarum axes utrinque inseruntur. Prima atque infima est quæ notatur C, dentibus 80 incisa, cujus axi orbiculus quoque D affixus est, aculeis ferreis asper, ut funem cum appensis ponderibus contineat, quæ qua ratione ordinentur postea dicetur. Ponderis itaque vi rota C vertitur; hæc movet proximum tympanum E dentium octo, unáque rotam F eodem axe hærentem, cui dentes 48. Hanc excipit tympanum aliud G, & in eodem axe rota H, quibus dentium numerus idem qui tympano rotæque præcedenti. Sed hæc rota ejus est generis quas à forma coronarias vocant artifices nostri. Hujus dentibus agitatur tympanum I simulque rota K, quæ eodem axe tenetur, ad perpendiculum erecto. Tympano dentes 24; rotæ 15, atque hi ad instar serræ dentium incisi. Supra mediam rotam K transversus jacet axis pinnatus L M, cujus extrema sustinent hinc inde gnomones N Q & P, seorsim affixi laminæ B B. Notanda vero in gnomone N Q pars deorsum prominens Q, quæ oblongo foramine patens transmittit axem L M, simulque retinet eum quem rotæ K tympanoque I communem esse diximus, inferiori sui parte gnomoni R innitentem. In lamina B B foramen amplum excavatum est, quo ultra ipsam extendatur axis pinnatus L M, qui subtili cuspide insertus gnomoni P, liberius ita movetur quam si ab ipsa lamina B B sustineretur simulque ultra eam pro-

TAB. II. Fig. 1.

E mine-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

mineret, debet enim prominere necessario ut affigi possit clavula S, quæ simul cum eo versationes faciat. Est autem hic motus reciprocus, nunc in hanc nunc in illam partem, quum dentes rotæ K alternatim occurrant pinnulis L L, notâ vulgo ratione, quæque proinde diligentiori explicatione non indiget.

Porro clavula S, ima sui parte reflexa ac foramine oblongo terebrata, penduli virgam ferream, cui plumbum X affixum est, amplectitur. Hæc vero virga supernè duplici filo suspensa est inter geminas lamellas, quarum una T hic tantum cernitur; itaque alteram figuram juxta descripsimus, quæ utriusque formam flexumque & totam hanc suspendendi penduli rationem exprimeret. Quanquam de vera laminarum istarum curvatura pluribus postea agendum erit.

TAB. II. Fig. 2.

Nunc autem ut de motu horologii dicamus, nam reliquas figuræ partes postea exequemur, facile equidem apparet & vi rotarum, à pondere tractarum, perpendiculi V X motum sustentari, postquam semel manu incitatum fuerit; & simul perpendiculi statos recursus rotis universis, totique adeo horologio movendi legem normamque præscribere. Clavula enim, quantumvis levi rotarum impulsu acta, non tantum obsequitur trahenti perpendiculo, sed & singulis recursibus paulisper ejus motum adjuvat, atque ita perennem reddit, qui alioqui sua sponte, vel verius occursu aëris, deficeret paulatim, vergeretque ad quietem. Rursus vero, quum ejusmodi sit natura penduli ut eodem semper tenore feratur, neque ab eo ulla ratione præterquam mutata longitudine dimoveri possit; utique postquam flexu lamellarum, inter quas suspensum est, æqualitatem illam consequuti fuimus; nequaquam permittitur rotæ K, ut nunc citius nunc tardius incedat, etsi sæpe, ut in vulgaribus horologiis, id facere conetur; sed necessario singuli dentes ejus coguntur æqualibus transire temporibus. Hinc vero manifestum est, & reliquarum quæ præcedunt rotarum, & denique etiam indicum æquabiles conversiones effici, cum omnia propor-

tio-

tionaliter moveantur. Quamobrem siquid in fabrica vitii fuerit, vel, ob aëris mutatam temperiem, difficilius rotarum axes volvantur; dummodo non eo usque ut omnis horologii motus interrumpatur; nulla propter hæc inæqualitas aut motus retardatio timenda erit, semperque aut rectè tempus metietur aut omnino non metietur.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Indices porro hoc pacto circumaguntur atque ordinantur. Tertia lamina prioribus parallela est Y Y, pollicis quarta parte distans ab ea quæ notatur A A. In ea circuli horarii descripti sunt centro eodem α quo protenditur axis rotæ C. Quorum circulorum interior duodecim horarum divisionem habet, alter scrupulorum 60. Axi vero rotæ C aptatur, ultra laminam A A, rota β, tubulo cohærens qui usque ad ε continuatur trans laminam Y Y; atque ita insidet axi illi, ut una cum illo circumferatur; sine illo tamen, ubi opus fuerit, converti possit. Ad ε index imponitur, horæ spatio circuiturus atque ita scrupula prima, seu sexagesimas horarum, demonstraturus. Rota vero quam diximus β, aliam rotam, totidem quot ipsa habet dentium, impellit, atque una affixum ei tympanum cui dentes sex, axiculo eorum communi hinc laminâ A, inde gnomone δ suffulto. Hoc tandem tympano rota ζ movetur, dentes habens 72, tubulumque affixum qui & ipse ultra laminam Y ad θ porrigitur, paulo citra quam desinit tubulus rotæ β, quem intra se complectitur. Parte extrema θ apponitur horarius index, brevior aliquanto illo quem scrupula prima signare diximus, cum interiore gyro ferri debeat. Secunda vero scrupula ut absque errore demonstrentur, imponitur axi rotæ H, usque ad laminam Y producto, orbis λ, cui circulus in sexaginta partes divisus inscribitur, incisoque in laminâ Y foramine ad Z, eæ divisiones, cuspide in summo foramine defixâ, prætereuntes notantur. Hæc vero tota indicum circulorumque horariorum dispositio ex figura minori (*fig.* 3.) clarius perspicitur, exteriorem horologii formam referente.

Descriptio Horologii.

Cæterum penduli longitudinem, rotis quemadmodum diximus ordinatis, eam esse oportet ut scrupula secunda singulis recursibus metiatur, quæ longitudo tripedalis est, & commodè in schemate exhiberi non potuit. Tripedalem dico, non alicujus respectu pedis qui apud Europæ gentem hanc illamve in usu sit, sed certo æternoque pedis modulo ab ipsa hujus penduli longitudine desumpto, quem Pedem Horarium in posterum appellare liceat, ad illam enim omnium aliorum pedum mensuræ referri debent quas incorruptas posteris tradere voluerimus. Neque enim, verbi gratiâ, ignorabitur unquam venturis sæculis Parisini pedis modus, dum constabit eum ad Pedem Horarium esse ut 864 ad 881. Sed de hujus mensuræ exactissima constitutione pluribus agemus in iis quæ de Centro Oscillationis. nunc tempora conversionum in singulis rotis indicibusque obiter designabimus, ut rectè omnia ad dentium supra descriptorum numerum quadrare intelligantur.

Ergo una quidem conversione rotæ C, decies circumire apparet rotam F, sexagies vero rotam H, & centies vicies supremam K: cui quum dentes sint quindecim, iisque alternatim pulsentur pinnulæ L L, una conversione rotæ K numerabuntur ictus 30, quibus respondent totidem itus reditusque penduli V X. ideoque conversionibus 120, respondebunt oscillationes simplices 3600, qui numerus est scrupulorum secundorum unam horam efficientium. Itaque horæ tempore semel circumit rota C, cumque ea simul index ad E impositus, qui scrupula prima demonstrat. Et quoniam eodem temporis spatio etiam rota β, & per eam γ, convertitur, cum tympanidio suo dentium sex, ad quem numerum duodecuplus est numerus dentium rotæ ζ, apparet duodecim demum horis hanc circumduci, totidemque indicem illi conjunctum in θ. Denique cum rotæ H sexaginta conversiones respondere ostenderimus singulis conversionibus rotæ C, hinc illa, una cum affixo orbe λ, sexagies in singulas horas circumferetur, hoc est, semel unius scrupuli primi tempore, ideoque partes sexagesimæ orbiculi λ.

secun-

ſecunda ſcrupula tranſitu ſuo oſtendent: atque ita omnia rectè ſe habere manifeſtum erit. Pondus X in imo perpendiculo trilibre eſt, plumbeum totum, vel ænea ſuperficie plumbum continente. Nec tantum metalli gravitate ſed & figurâ inſuper proſpiciendum (plurimi enim refert) ut quam minimum occurſu aëris impedimentum ſentiat. Eoque in cylindri jacentis oblongi & utrinque præacuti formam fingitur, qualis cernitur ad *a* ſchemate horologii minore. Quanquam in his quæ ad navigationem parantur, forma lentis erectæ aptior viſa eſt.

Descriptio Horologii.

Tab. II. Fig. 3.

Porro eodem ſchemate & ponderis alterius *b*, quo motus horologii continuatur, ſuſpendendi ratio expreſſa eſt, quam, incognitam prius, inveſtigare nobis neceſſe fuit, ne interim dum ſurſum retrahitur pondus iſtud, ceſſaret vel impediretur aliquatenus horologii curſus, quod hic omnino cavendum erat. Paratur itaque funis continuus atque in ſe rediens, extremitatibus apte inter ſe connexis. Is primum orbiculum rotæ infimæ conjunctum, qui in ſchemate majori notatus eſt D, amplectitur; inde deſcendens, altera ſui parte trochleam *c*, cui pondus *b* appenſum eſt, ſubit. Hinc ſuper orbiculum *d* aſcendit, extrinſecus horologio affixum, qui ferreos per circumferentiam aculeos habet, atque inſuper ſerratis dentibus ita eſt aptatus ut volvatur tracto fune *e*; nequaquam vero in partem contrariam revolvi poſſit. Ab hoc orbiculo deſcendit funis ad alteram trochleam *f*, cui pondus exiguum *g* appenditur, quantum ſufficit continendo majori *b*, ne aliter quam revoluto orbiculo deſcendat. Namque à trochlea *f* rurſus ad ipſum orbiculum D, unde deſcenderat, funis revertitur. Quibus ita ſe habentibus, manifeſtum eſt ſemper pondus *b* dimidia ſui gravitate conari ut rotas horologii circumagat, nec tunc quidem ceſſare cum manu funem *e* trahente aſcendere cogitur; adeoque horologii motum nuſquam interrumpi, nec momentum temporis deperdi.

Gravitatis modus in pondere *b* definiri certo non poteſt, ſed quo minor conſervando motui ſuffecerit, eo melius ac-

Descriptio Horologii.

curatiusque fabrefactum automaton arguet. In nostris, quæ optima hactenus habemus, ad sex libras redactum est, posita nimirum orbiculi D diametro pollicari fere, uti exhibita fuit; item perpendiculi pondere trilibri, ac totidem pedum longitudine. Quæ longitudo, ut hoc etiam admoneamus, trans capsam horologii dependet, oblongo foramine perviam, quantum oscillationibus peragendis necesse est. Ipsum vero horologium, ad hominis altitudinem suspensum, horis 30 moveri perseverat.

Superest nunc forma lamellarum describenda inter quas perpendiculum affigi diximus, quarumque ad æquabilem horologio motum præstandum vel præcipua est opera. Absque his enim Penduli simplicis oscillationes (etsi nonnullis aliter visum est) non erunt æque diuturnæ, sed brevioris temporis eæ quæ per minores arcus incedent; idque primùm experimento hujusmodi facile deprehenditur. Si enim fila accipiantur ejusdem longitudinis duo, paribusque in parte ima ponderibus religatis, utrumque seorsim suspendatur, tumque alterum eorum procul à linea perpendiculari, alterum parumper duntaxat extrahatur, simulque è manu dimittantur; non diu utrumque simul in partes easdem ferri videbitur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus. Sed & temporum per quoslibet arcus rationes numeris definiri possunt, certâ scientiâ nixis, & vero quam libuerit propinquis, veluti quod tempus descensus per totum circuli quadrantem est ad tempus per arcum minimum fere ut 34 ad 29. Adeo ut nequaquam resistentiæ aëris ea diversitas imputanda sit, ut quidam voluere, sed ex ipsa motus natura circulique proprietate nascatur. Quod alio quoque argumento concludi possit ex ipsa Penduli isochroni constructione, ubi à circulari linea haud parum receditur, uti mox patebit.

Sed videatur forsan in nostris horologiis hisce, ubi eadem semper est oscillationum latitudo, nullius momenti futura quam diximus inæqualitas, adeoque nec correctione ulla perpendiculi opus fore. Quod sane ita esset si latitudo omnium

um planè eadem constanter maneret. Sed cum pauxillum quandoque excedat vel deficiat, ex multis minimis differentiolis tandem magna satis conflatur, idque ita esse reipsa atque experimentis evincitur. Etsi enim eadem semper sit ponderis vis, rotæ sibi proximæ respectu, tamen per tot alias transdita, quantâcunque curâ limatæ fuerint, non semper eadem ad perpendiculum usque pervenit. Præterquam quod frigore quoque difficilior motus rotarum efficitur; itemque evanescente aut sordescente quod illis additur oleo. Sed præcipue inæquales fiunt oscillationes horologiis quæ mari vehuntur, ob jactationem navis continuam, adeo ut omnibus quidem in universum, sed his maxime omnium remedio opus sit, quo reciprocationum Penduli latiorum angustiorumque tempora æqualia evadant.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Ad definiendam ergo lamellarum formam in quibus positum est remedium istud, in primis Penduli longitudinem statuisse oportet, quæ facile ex eo habetur, quod sint inter se longitudines perpendiculorum, sicut temporum quæ in singulos recursus impenduntur quadrata. Adeo ut cum tribus pedibus definiverimus longitudinem perpendiculi quod scrupula secunda metitur, ejus quarta pars, sive unciæ novem debeantur ei quod semisecunda notaturum sit. Item si Penduli longitudo quæratur, cujus recursus simplices 10000 horæ spatio peragantur, hoc modo ratio inibitur. Penduli nempe tripedalis scimus 3600 recursus in horas singulas numerari: ergo hujus recursuum tempora singula, majora sunt temporibus Penduli quæsiti, proportione 10000 ad 3600, sive 25 ad 9. Quare ut quadratum numeri 25 ad quadratum 9, hoc est, ut 625 ad 81, ita erit longitudo pedum 3 ad eam quæ quærebatur, nempe unciarum 4 cum $\frac{66}{100}$.

Posita ergo longitudine perpendiculi, puta pedum trium in horologio à nobis proposito, inde Cycloïs linea, quæ curvaturam laminarum T datura est, hoc modo describetur.

Super tabula plana affigatur regula A B, semidigiti crassitudine. Deinde fiat cylindrus C D E eadem illa altitudine, diametrum

TAB. III. Fig. 1.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

metrum vero baſeos, dimidiæ perpendiculi longitudini, æqualem habens; ſitque F G H E faſciola, ſeu potius bractea tenuis, affixa regulæ in F, cylindro verò in circumferentiæ puncto aliquo E, ita ut partim huic circumvoluta ſit, partim extendatur juxta latus regulæ A B. Cylindro autem infixa ſit ferrea cuſpis D I, pauxillum ultra baſin inferiorem prominens, atque ita ut circumferentiæ ejus exacte reſpondeat.

His ita ſe habentibus, ſi cylindrus ſecundum regulam A B volvatur, bracteolæ tantum F G craſſitudine intercedente, eâque ſemper quantum poteſt extensâ, deſcribet cuſpis I in ſubjecto tabulæ plano lineam curvam K I, quæ Cyclois vocatur. Circulus vero genitor erit C D E, cylindri adhibiti baſis. Quod ſi jam laminam K L ad regulam A B applicuerimus; exaratâ primum in ea cycloidis portione K I, invertemus deinde ipſam, & in ſuperficie adverſa ſimilem lineam K M, ab eodem puncto K egredientem, incidemus. Tum figuram M K I, accurate ſecundum lineas iſtas, efformabimus, cui figuræ lamellarum interſtitium aptari oportet, inter quas perpendiculum ſuſpenditur. Sufficiunt autem ad horologiorum uſum portiones exiguæ arcuum K M, K I; reliquo flexu inutili futuro, ad quem perpendiculi filum accedere non poteſt.

TAB. III. Fig. 2.

Verum, ut mirabilis lineæ natura atque effectus plenius intelligantur, integras ſemicycloides K M, K I, alio ſchemate hic exprimere viſum fuit, inter quas ſuſpenſum agitatumque Pendulum K N P, diametri circuli genitoris duplum, cujuſcunque amplitudinis oſcillationes, uſque ad maximam omnium per arcum M P I, iiſdem temporibus confecturum ſit: atque ita, ut appenſæ ſphæræ P centrum, in linea M P I, quæ & ipſa cyclois integra eſt, ſemper verſetur. Quæ proprietas inſignis, neſcio an alii præter hanc lineæ data ſit, ut nempe ſe ipſam ſui evolutione deſcribat. Hæc autem quæ dicta ſunt, in ſequentibus, ubi de deſcenſu gravium, deque evolutione curvarum agemus, ſingula demonſtrabuntur.

Li-

Licebit autem aliter quoque, per inventa puncta, cycloidem designare. Describatur circulus diametro A B, quæ dimidiæ longitudini perpendiculi æqualis sit. In cujus circumferentia sumptis partibus æqualibus quotlibet, A C, C D, D E, E F, A G, G H, H I, I K, jungantur G C, H D, I E, K F, quæ erunt inter se parallelæ. Deinde arcui A F sumatur æqualis linea recta L M, eaque in partes æquales totidem dividatur quot sunt in arcu A F, earumque partium uni æquales ponantur singulæ C N, G O in recta C G; duabus vero partibus rectæ L M, æquales fiant singulæ D P, H Q in recta D H. Tribus vero, singulæ E R, I S in recta E I; atque ita porro si partes plures fuerint acceptæ; ac tandem toti L M æquales fiant singulæ F T, K V in linea extrema F K. Jam si curvæ describantur per puncta A O Q S V, A N P R T, hæ rursus quæsitæ cycloidis partes erunt, inter quas perpendiculum affigi oportet.

DESCRIPTIO HOROLOGII. TAB. III. Fig. 3.

Recta autem L M æqualis arcui A F invenitur, si primum duabus rectis, quæ semissibus arcus A F subtenduntur, æqualis ponatur X Z, totius vero arcus subtensæ A F æqualis ab eodem termino accipiatur X Y, differentiæque Y Z triens Z Δ ad totam X Z adponatur. Nam tota X Δ toti arcui A F tam prope æqualis erit, ut licet sextans fuerit circumferentiæ, (neque major hic unquam requiritur) non una sexies millesima parte suæ longitudinis deficiat, uti in his, quæ de Circuli Magnitudine antehac scripsimus, demonstratum est.

Explicitis quæ ad horologii fabricam attinent, nunc quoque illud declarandum est, quo pacto ad veram horarum mensuram componi debeat. Ergo primum, an recte se habeat motus ejus, hoc modo examinabitur.

Oculo observatoris certus eligatur locus, unde sidera despici possint, simulque tecta parietesve vicinarum ædium, sic posita, ut, cum eò appulerint stellæ quædam è fixarum numero, simul videri desinant. Eo loco foramen, ad pupillæ magnitudinem, constituatur, ut sequentibus diebus,

DESCRIPTIO HOROLOGII.

absque errore, oculus ad idem punctum reponi possit. Jam ad momentum ipsum, cum stellarum aliqua è conspectu abit, notetur tempus horologio indicatum. Atque idem postero die, vel potius aliquot diebus intermissis, fiat. Quod si tantum unius diei spatium duabus observationibus intercesserit, oportet in postrema observatione tempus horologii deficere ab illo, quod prima observatione annotatum fuerat, scrupulis primis 3, secundis 56. Ita enim rectè se habere perpendiculi longitudinem constabit; quum tanto superetur quælibet siderum fixorum revolutio à die solari mediocri. Mediocri dico, quoniam dies solares, de meridie ad meridiem, non omnes inter se æquales sunt, ut mox amplius exponetur. Si vero post plures demum dies observatio repetatur, in singulos tantundem differentiæ causa computandum erit. Sit, exempli gratiâ, in prima observatione, ad momentum evanescentis stellæ, adnotata horologii hora 9, cum scrupulis primis 30, secundis 18; deinde, septimo post die, eâdem disparente stellâ, indicet horam 8, cum scrupulis pr. 50, sec. 24. Hæc hora deficit à priore scrupulis pr. 39, secundis 54. Quæ, in septem divisa, dant retardationem diurnam scrupulorum 5′. 42″. Debebat autem esse scrupulorum 3′. 56″. quæ illâ minor est scrupulis 1′. 46″. Itaque tantundem quotidie deficit horologium à vera, seu media, dierum mensura.

Cæterum alio quoque modo, ad solem, horologii motum examinare licebit. Sed hic jam inæqualitatis dierum naturalium ratio habenda erit. Sunt enim, ut jam dixi, non omnes ejusmodi dies inter se æquales; & quanquam exiguum sit discrimen, tamen plurium dierum intervallo sæpe eo usque excrescit, ut haudquaquam contemni possit. Etenim si & solarium quam perfectissime descriptum habeatur, & horologii automati motus ad verissimam dierum mensuram exactus sit, neque ab ea recedat; eveniet tamen necessario ut, certis anni temporibus, sæpe horæ quadrante, aut etiam semihora, inter se discrepent, ac rursus statis temporibus ultro concordent. Hoc enim ita esse, ex tabula temporis

poris æquatoria quam subjicimus, intelligetur; postquam usum ejus ostenderimus, qui est hujusmodi.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Accipiatur æquatio tabulæ, assignata diei qua primum cum sole, sive cum sciotherico, horologium ut conveniret fecimus. Itemque æquatio diei, qua quæritur quam bene ad dierum mensuram temperatum sit. Quod si jam prior æquatio major fuerit sequente, superare debebit hora automati horam gnomonis eo, quo inter se æquationes istæ differunt. At si posterioris diei æquatio major inveniatur, erit excessus penes horam gnomonis, sive eam quæ ex sole observatur. Ut si, exempli gratiâ, die 5 Martii in eandem horam conveniant sciothericum horologium atque automaton, cujus diei æquatio invenitur, in tabula, scrupulorum primorum 3, secundorum 11. lubeatque scire ejusdem mensis die 20, an automaton horas æquales rectè metiatur necne: invenietur die posteriori adscripta æquatio scrupulorum primorum 7, secundorum 27. quæ quia superat præcedentem scrupulis primis 4, secundis 16, debebit tanto serior esse hora sciotherici, quam quæ automato indicatur. Unde, si diversum reperiatur, facile inde colligetur, quantum in dies singulos exuperet automaton, aut retardet.

In computanda tabula hac duplicem causam adhibui, utramque Astronomis notam, Eclipticæ nimirum obliquitatem, & solaris motus anomaliam. Quod cum ratio postulat, tum experientia quoque, his ipsis horologiis superstructa, quæque sine his nequaquam haberi poterat, evincit; quandoquidem, cum æquatione hic proposita, observationes solis, quas sæpe per complures menses, quotidie ad momentum quo meridianum circulum sol occuparet, instituimus, planissime consentire inventæ sunt.

Dies.	*Januar.* Min.	Sec.	*Febr.* Min.	Sec.	*Mart.* Min.	Sec.	*Apr.* Min.	Sec.	*Maj.* Min.	Sec.	*Jun.* Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	Jul. Min.	Jul. Sec.	Aug. Min.	Aug. Sec.	Sept. Min.	Sept. Sec.	Octob. Min.	Octob. Sec.	Nov. Min.	Nov. Sec.	Dec. Min.	Dec. Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

Descriptio Horologii.

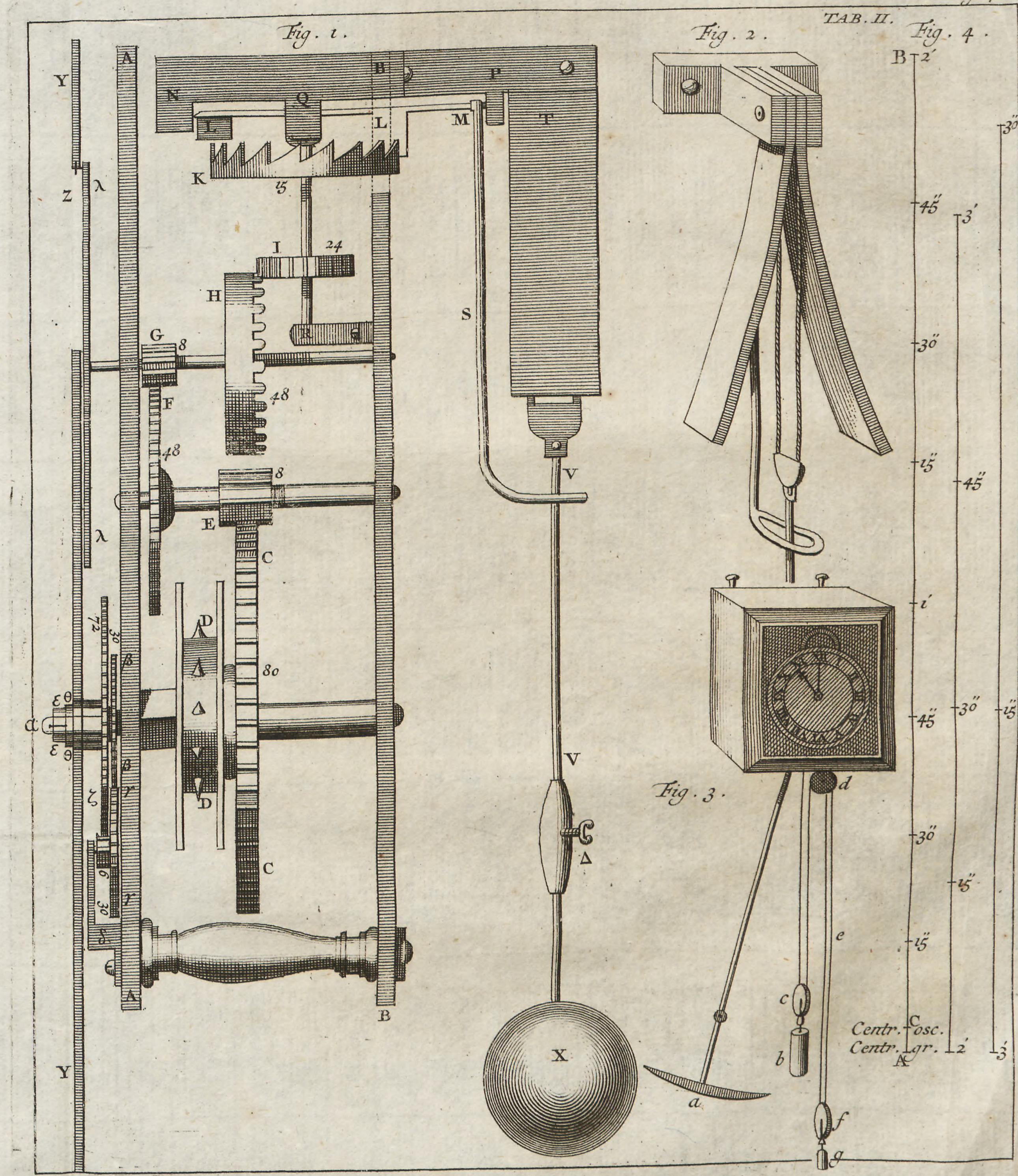
Jam postquam utrovis modo eorum quos diximus, sed priore potius, examen institutum fuerit, si multum aberrare à media dierum longitudine horologium reperiatur, adeo ut differentia ultra tria quatuorve prima scrupula ascendat, remedium adhibebitur aucta aut diminuta ipsius penduli longitudine. Ubi hæc tenenda est regula, tot scrupulis primis, in singulos dies, motum horologii acceleratum aut retardatum iri, quot $\frac{7}{10}$ unius lineæ auferentur pendulo aut addentur. Cumque ad veram mensuram hoc pacto jam prope reductum erit, reliqua correctio transpositione exigui ponderis Δ, virgæ V V adhærentis, commode peragetur. Id pondus lentis formam habet, cujus sectionem secundum axem in figura 1. expressimus. Et quia tantum vicesimam tricesimamve, aut etiam minorem, partem æquat ponderis X, hinc fit ut sat magnis spatiis è priore loco discedens, haud multum tamen perpendiculi motum afficiat, accelerando nempe quoties versus mediam virgæ longitudinem attrahitur, retardando cum inde sursum aut deorsum movetur. Ne vero diu punctum illud quærendum sit quo verissimam daturum sit dierum mensuram, divisimus certa ratione, ex motus legibus petita, inferiorem virgæ medietatem, posito nimirum pondere Δ parte quinquagesima ponderis X, parique gravitate ipsius virgæ V V. Quæ quidem divisiones figura 4 exhibentur, ubi penduli portio inferior in tres partes secta cernitur, quarum, quæ infimo loco ponenda, est A B. Punctum A est centrum gravitatis ponderis X, à puncto autem C, centro oscillationis, partes singulæ, quindecim scrupulorum secundorum differentiam diurnam efficiunt, ubi tali intervallo mota fuerit lens Δ. Demonstratio autem divisionumque inventio, dabitur in iis quæ de Centro Oscillationis.

Tab. II. Fig. 1.

Tab. II. Fig. 4.

Cæterum illorum quoque quæ mari vehuntur, longitudinum investigandarum gratiâ, formam hic describeremus, si quænam maxime ad hunc usum accommodata sit, æque ac in præcedentibus, exploratum determinatumque haberemus; etsi quidem jam nunc eo res deducta sit, ut parum deesse

TAB. II.



deesse videatur ad perficiendum tantæ utilitatis inventum. Quid autem & qua fortuna hìc tentatum fuerit, quidve deinceps tentandum restet, exponere non pigebit.

DESCRIPTIO HOROLOGII.

Prima duo hujusmodi horologia Britannica navi vecta fuere anno 1664, quæ vir nobilis è Scotia nobisque amicus ad nostrorum exemplum fabricari curaverat. Hæc ponderis loco laminam chalybeam habebant in spiram convolutam, cujus vi rotæ circumagerentur, quemadmodum in exiguis illis quæ circumferri solent automatis adhiberi solent. Ut autem jactationem navis perferre possent, è chalybea pila, cylindro æneo inclusa, horologia suspenderat, clavulamque quæ penduli motum continuat (erat autem semipedali longitudine pendulum) deorsum productam geminaverat, ut literæ F inversæ formam referret; ne videlicet in gyrum evagari posset penduli motus, unde cessationis periculum. Navis hæc, cum tribus aliis quas itineris socias habuerat, postquam in Britanniam reversa est, Præfectus classis hæc retulit. Se nempe, cum à Guineæ littore solvisset, atque ad insulam, sancti Thomæ dictam, pervenisset, quæ æquinoctiali circulo subjacet, compositis hìc ad solem horologiis, occidentem versus cursum instituisse, atque ad septingenta circiter milliaria continuo tramite progressum, tum rursus vento favente Libonoto ad Africæ littora declinavisse. Cum autem ad ducenta trecentave milliaria eò cursum tenuisset, magistros aliarum navium, veritos ne priusquam Africam attigissent aquâ ad potum deficerentur, suasisse ut ad insulas Americanas, Barbatorum dictas, aquandi gratiâ deflecteret. Tum sese concilio nauclerorum habito, jussisque ut Ephemeridas ac supputationes singuli suas proferrent, reperisse cæterorum calculos à suis diversos abire, unius quidem 80 milliaribus, alterius centenis, tertii amplius etiam. Ipsum vero, cum ex horologiorum indicio collegisset non amplius quam triginta circiter milliaribus abesse insulam *del Fuego* dictam, quæ una est earum, non procul ab Africa distantium, quæ à Viridi promontorio nomen habent, eamque postero die teneri posse; confisum pen-

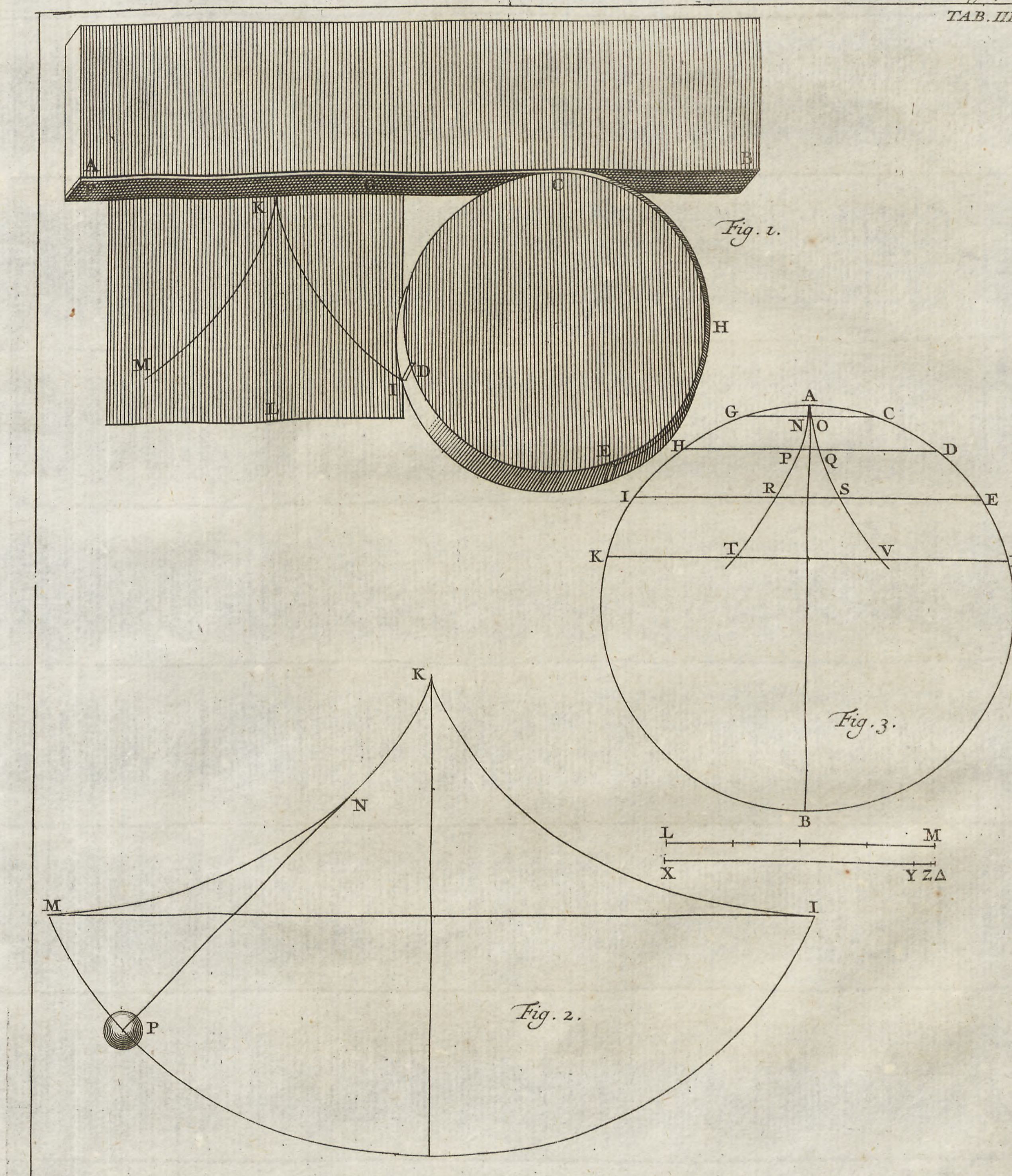
Descriptio Horologii.

pendulis suis eò cursum dirigi imperasse, ac die insequenti sub meridiem eam ipsam in conspectum venisse insulam, paucisque post horis navibus stationem præbuisse. Et hæc quidem ex Præfecti illius relatu.

Ab eo vero tempore aliquoties tum Batavorum tum Gallorum opera, idque Regis Serenissimi jussu, repetita fuere experimenta, vario eventu, sed ita ut sæpius negligentia eorum quibus horologia commissa erant quam ipsamet automata culpari possent. Optimus vero successus fuit in Mediterraneo mari, expeditione in Cretam insulam, quò illustrissimus Dux Belfortius, Candiæ à Turcis obsessæ auxilium laturus, cum Gallorum copiis missus erat, ubi & in prælio occubuit. Is in ea qua vehebatur navi, horologia hujusce experimenti gratiâ habebat, virumque Astronomiæ peritum iis præfecerat, è cujus observationibus, in singulos dies habitis, longitudines locorum ad quæ in ea profectione aut appulerunt naves, aut quæ prætervecti dignoscere oculis potuerant, horologiorum operâ exacte dimensas fuisse comperimus, atque ita ut Geographicis descriptionibus quæ melioris notæ habentur eædemmet longitudinum differentiæ disignatæ reperiantur. Namque inter Toloni portum Candiamque oppidum differentia hor. 1. scrup. 22′ reperta fuit, hoc est graduum longitudinis 20. scrup. 30′. ac rursus à Candia Tolonum revertentibus differentia proxime eadem. qui consensus certissimum veritatis est indicium.

Inter eundem Toloni portum & insulam quandam cui *Maretimo* nomen est, prope promontorium Siciliæ quod Occidentem spectat, Lilybæum olim vocatum, differentia horaria observata est scrup. prim. 25, sec. 20, quibus respondent gradus longitudinis 6, scrup. 20′. Item à Tolono ad insulam *Sapienza* dictam, quæ juxta Peloponnesum est Occidentem versus, hora 1, scrup. prima 5′, sec. 45″, quibus respondent longitudinis gradus 16, scrup. 26.

Horologia ad solem examinata fuerant, mane ad Orientem, vespere ad Occidentem, supputato ex data poli altitudine utroque temporis momento. Atque hæc ratio cum naves


A
B
C
K
M
L
I
D
H
E
Fig. 1.
A
G
C
N
O
H
D
P
Q
I
R
S
E
K
T
V
F
Fig. 3.
B
L
M
X
Y Z Δ
K
N
M
I
P
Fig. 2.

ves in anchoris ſtant omnium optima videtur, quod, abſque inſtrumentorum ope, ſolis oculis eæ obſervationes peragantur.

Descriptio Horologii.

Pendulum vero unciarum novem longitudine inerat horologiis hiſce, pondere ſemiſſis. Rotæ ponderum attractu circumagebantur, eademque cum illis theca incluſæ erant quaternum pedum longitudine. In ima theca plumbum inſuper centum atque amplius librarum additum erat, quò melius perpendicularem ſitum ſuſpenſa in navi machina ſervaret.

Quanquam autem æquabilis admodum ſibique conſtans automati motus per hæc experimenta comperiebatur, tamen alia quoque ratione ulterius illud perficere aggreſſi ſumus, quæ erat hujuſmodi. Rotæ illi quæ ſerratos dentes habet, penduloque proxima eſt, pondus exiguum ex catenula affabre conſtructa appendimus, quo ſola ipſa moveretur, reliqua omni machina nihil aliud agente quam ut ſingulis ſemiſcrupulis horariis plumbum illud exiguum ad priorem altitudinem reſtitueret; eadem fere ratione atque in conſtructione horologii ſuperius expoſita videre eſt, ubi pondus altero fune attollitur, dum altero gravitatem ſuam horologii motui impertit. Quibus ita conſtructis, cum veluti ad unicam rotam omnia eſſent redacta, major adhuc quam antea apparuit horologiorum æqualitas, illudque accidit memoratu dignum, quod cum duo ad hanc formam conſtructa ex eodem tigno ſuſpendiſſemus, tignum vero fulcris duobus impoſitum eſſet; motus penduli utriuſque ita ictibus adverſis inter ſe conſenſere, ut nunquam inde vel minimum recederent, ſed utriuſque ſonus una ſemper exaudiretur: imo ſi data opera perturbaretur concordia illa, ſemetipſam brevi tempore reduceret. Miratus aliquandiu rem adeo inſolitam, inveni denique, inſtituto diligenti examine, à motu tigni ipſius, licet haudquaquam ſenſibili, cauſam petendam eſſe. Nempe pendulorum reciprocationes horologiis, quantolibet pondere gravatis, motum aliquem communicare; hunc vero motum, tigno ipſi impreſſum, neceſſario efficere ut ſi aliter quam contrariis ad unguem ictibus pendulum u-

DESCRIPTIO HOROLOGII.

trumque moveatur, eo tamen necessario tandem deveniant, ac tum demum tigni motum penitus interquiescere. Quæ tamen causa non satis efficaciæ haberet, nisi & horologiorum motus aliunde æquabilissimus foret atque inter se consentiens.

Cæterum experimentis in Oceani navigatione habitis, ac præsertim procella vehementiore aquas agitante, compertum fuit primam ac præcipuam curam de motu horologiorum absque interruptione conservando habendam esse, quod jactationem navis tantam ægrè tunc perferre illa animadversum sit. Quamobrem nova denique ratione & penduli formam immutavimus, & aliter horologia ipsa suspendimus. Pendulum trianguli formam habet, in cujus vertice deorsum spectante plumbea lens affixa est. Anguli utrique reliqui filis inter laminas cycloidales suspensi sunt. Basis clavulam bifurcatam puncto sui medio recipit ab eaque movetur, illa vero ab rota serrata horizonti parallela motum accipit. Motus rotarum omnium non à pondere sed à chalybea lamina, tympano inclusa, principium habet. In figura adjecta pendulum triangulare est A B C; lens plumbea B; laminæ cycloidales E D, F G. Clavula bifurcata H K; rota serratis dentibus N, quæ cæteris horologii rotis inferior est. Lenticulæ ad temperandum penduli motum L L.

TAB. IV. Fig. 1.

TAB. IV. Fig. 2.

Suspensionis modum altera hæc figura exhibet; ubi theca A B axibus primum duobus, quorum alter C tantum apparet, rectangulo ferreo D E inserta est; quod deinde rectangulum rursus axibus suis F G ferreo gnomone F H K G sustinetur, qui contignationi navis immobiliter affixus est. in ima theca pondus 50 librarum appensum est. Quibus ita se habentibus, quacunque navis inclinatione perpendicularem positum servat horologium. Axis autem C, cum sibi opposito, ita collocati sunt, ut ad rectam lineam respondeant punctis suspensionum penduli ejus quod diximus: quo fit ut motus ipsius oscillatorius machinam nequaquam commovere possit, quo nihil est alioqui quod magis penduli motum destruat. Porro axium C C, & F G crassitudo, quæ pollicem

cem æquat, gravitasque plumbi inferius appensi, nimiam movendi libertatem horologio adimunt, faciuntque ut si forte succussu navis graviore commotum fuerit, continuo ad quietem perpendiculumque suum revertatur.

Descriptio Horologii.

Et hæc quidem ita adaptata machina ut in mare deducatur experientiæque committatur superest, quæ & certam pene successus spem præbet, quod iis quæ hactenus instituere licuit experimentis, multo melius quam priores illæ omnem motus diversitatem perferre reperta sit.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS SECUNDA.

De descensu Gravium & motu eorum in Cycloide.

HYPOTHESES.

I.

SI gravitas non esset, neque aër motui corporum officeret, unumquodque eorum, acceptum semel motum continuaturum velocitate æquabili, secundum lineam rectam.

II.

Nunc vero fieri gravitatis actione, undecunque illa oriatur, ut moveantur motu composito, ex æquabili quem habent in hanc vel illam partem, & ex motu deorsum à gravitate profecto.

III.

Et horum utrumque seorsim considerari posse, neque alterum ab altero impediri.

De descensu gravium. TAB. IV. Fig. 3.

Ponatur grave C è quiete dimissum, certo tempore, quod dicatur F, vi gravitatis transire spatium C B. Ac rursus intelligatur idem grave accepisse alicunde motum quo, si nulla esset gravitas, transiret pari tempore F motu æquabili lineam rectam C D. Accedente ergo vi gravitatis non perveniet grave ex C in D, dicto tempore F, sed ad punctum aliquod E, recta sub D situm, ita ut spatium D E semper æquetur spatio C B, ita enim, & motus æquabilis, & is qui à gravitate oritur suas partes peragent, altero alterum non impediente. Quamnam vero lineam, composito illo motu, grave percurrat, cum motus æquabilis non recta sursum aut deorsum sed in obliquum tendit, è sequentibus definiri poterit. Cum vero deorsum in perpendiculari contingit motus æquabilis C D, apparet lineam C D, accedente motu ex gravitate, augeri recta D E. Item, cum sursum tendit motus æquabilis C D, ipsam C D diminui recta D E, ut nempe, peracto tempore F, grave inveniatur semper in puncto E. Quod si, utroque hoc casu, seorsim, uti diximus, duos motus consideremus, alterumque ab altero nullo modo impediri cogitemus, hinc jam accelerationis gravium cadentium causam legesque reperire licebit. Et primum quidem duo ista simul ostendemus.

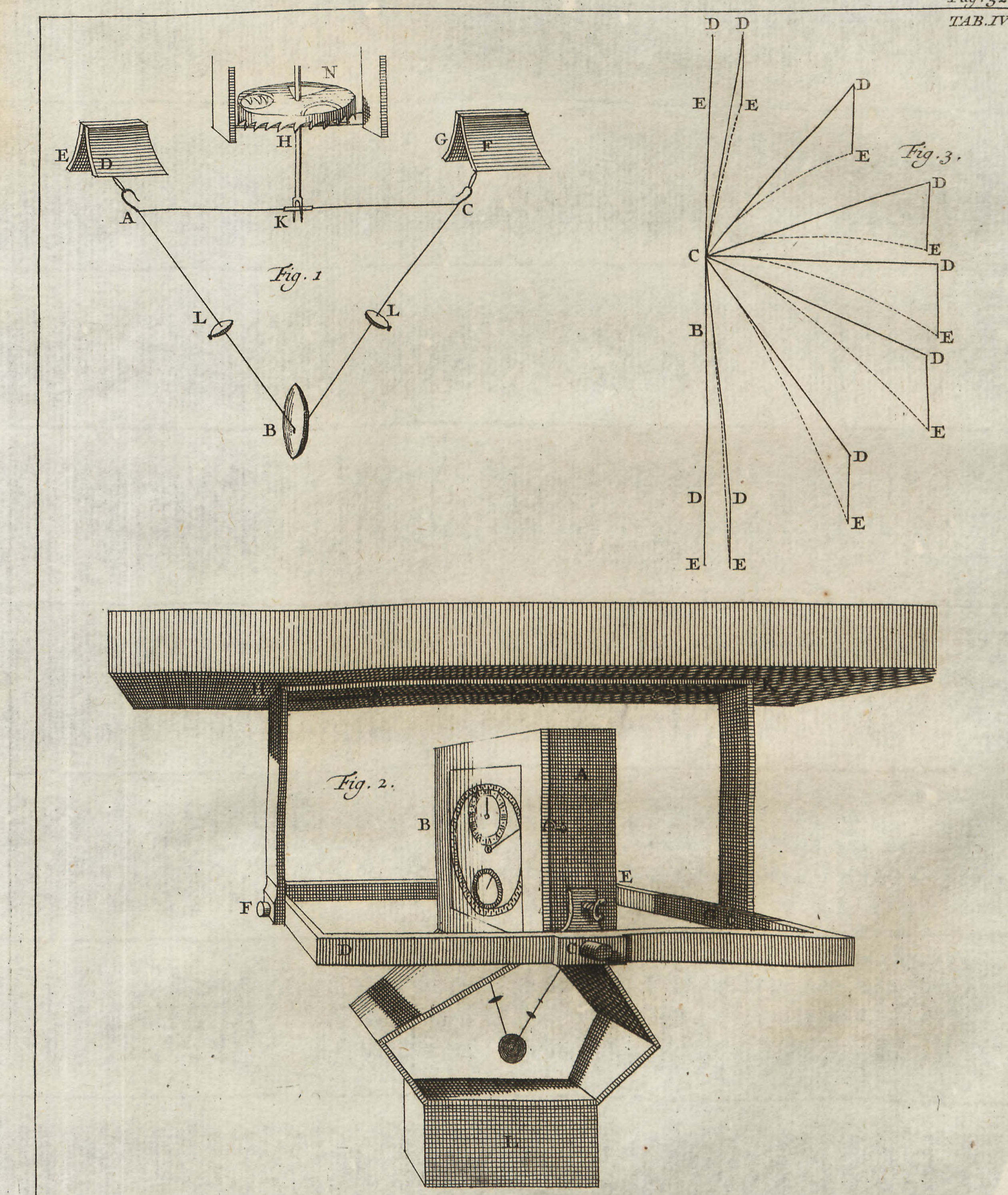
PROPOSITIO I.

Æqualibus temporibus æquales celeritatis partes gravi cadenti accrescere, & spatia æqualibus temporibus ab initio descensus emensa, augeri continue æquali excessu.

TAB. V. Fig. 1.

Ponatur grave aliquod, ex quiete in A, primo tempore lapsum esse per spatium A B, atque ubi pervenit in B, acquisivisse celeritatem qua deinceps, tempore secundo, motu æquabili, percurrere posset spatium quoddam B D. Scimus ergo spatium secundo tempore peragendum majus fore spatio B D, quia vel cessante in B omni gravitatis actione spa-

TAB. IV.



ſpatium B D percurreretur. Feretur vero motu compoſito ex æquabili quo percurſurum eſſet ſpatium B D, & ex motu gravium cadentium, quo deprimi neceſſe eſt per ſpatium ipſi A B æquale. Quare ad B D addita D E, æquali A B, ſcimus tempore ſecundo grave perventurum ad E.

DE DESCENSU GRAVIUM.

Quod ſi vero inquiramus quam velocitatem habeat in E, in fine ſecundi temporis, eam inveniemus duplam eſſe debere velocitatis quam habebat in B fine temporis primi. Diximus enim moveri compoſito motu ex æquabili cum celeritate acquiſita in B, & ex motu à gravitate producto, qui cum tempore ſecundo idem plane ſit ac primo, ideo decurſu temporis ſecundi æqualem celeritatem gravi contuliſſe debet atque in fine primi. Quare cum acquiſitam in fine primi temporis celeritatem conſervaverit integram, apparet in fine ſecundi temporis bis eam celeritatem ineſſe quam acquiſiverat in fine temporis primi, ſive duplam.

Quod ſi jam, poſtquam pervenit in E, pergeret deinceps tantum moveri celeritate æquabili, quantam illic acquiſivit, apparet tempore tertio, prioribus æquali, percurſurum ſpatium E F, quod duplum futurum ſit ſpatii B D; quia hoc percurri diximus dimidia hujus celeritatis, motu æquabili, & temporis parte æquali. Accedente autem rurſus gravitatis actione, percurret tempore tertio, præter ſpatium E F, etiam ſpatium F G, ipſi A B vel D E æquale. Itaque in fine tertii temporis grave invenietur in G. Velocitatem vero hîc habebit triplam jam ejus quam habebat in B, in fine primi temporis: quia præter celeritatem acquiſitam in E, quam diximus duplam eſſe acquiſitæ in B, vis gravitatis, temporis tertii decurſu, æqualem rurſus atque in fine primi celeritatem contulit. Quamobrem utraque celeritas, in fine temporis tertii, triplam celeritatem conſtituet ejus quæ fuerat in fine temporis primi.

Eodem modo oſtendetur tempore quarto peragi debere & ſpatium G H triplum ſpatii B D, & ſpatium H K ipſi A B æquale: velocitatemque in K, in fine quarti temporis, fore quadruplam ejus quæ fuerat in B, in fine temporis primi.

De descensu gravium.

Atque ita spatia quotlibet deinceps considerata, quæ æqualibus temporibus peracta fuerint, æquali excessu, qui ipsi B D æqualis sit, crescere manifestum est; simulque etiam velocitates per æqualia tempora æqualiter augeri.

PROPOSITIO II.

Spatium peractum certo tempore à gravi, è quiete casum inchoante, dimidium est ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum velocitate quam acquisivit ultimo casus momento.

Tab. V. Fig. 1.

Ponantur quæ in propositione præcedenti, ubi quidem A B erat spatium certo tempore, à gravi cadente ex A, peractum. B D vero spatium quod pari tempore transiri intelligebatur celeritate æquabili, quanta acquisita erat in fine primi temporis, seu in fine spatii A B. Dico itaque spatium B D duplum esse ad A B.

Quum enim spatia primis quatuor æqualibus temporibus à cadente transmissa sint A B, B E, E G, G H, quorum inter se certa quædam est proportio: si eorum temporum dupla tempora sumamus, ut nempe pro primo tempore jam accipiantur duo illa quibus spatia A B, B E, peracta fuere; pro secundo vero tempore duo reliqua quibus peracta fuere spatia E G, G K, oportet jam spatia A E, E K, quæ sunt æqualibus temporibus à quiete peracta, inter se esse sicut spatia A B, B E, quæ æqualibus item temporibus à quiete percurrebantur.

Quum igitur sit ut A B ad B E, ita A E ad E K; & convertendo, ut E B sive D A ad A B ita K E ad E A: erit quoque, dividendo, D B ad B A ut excessus K E supra E A ad E A. Quum sit autem, ex ostensis propositione præcedenti, K E æqualis tum duplæ A B, tum quintuplæ B D: E A vero æqualis tum duplæ A B, tum simplici B D; apparet dictum excessum K E supra E A æquari quadruplæ B D.

B D. Sicut igitur D B ad B A ita erit quadrupla D B ad E A: unde E A quadrupla erit ipsius B A: eadem vero E A æquatur, uti diximus, & duplæ A B & simplici B D. ergo B D duplæ A B æqualis erit; quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Spatia duo, à gravi cadente quibuslibet temporibus transmissa, quorum utrumque ab initio descensus accipiatur, sunt inter se in ratione duplicata eorundem temporum, sive ut temporum quadrata, sive etiam ut quadrata celeritatum in fine cujusque temporis acquisitarum.

Quum enim ostensum sit propositione antecedenti spatia A B, B E, E G, G K, quotcunque fuerint, æqualibus temporibus à cadente, peracta, crescere æquali excessu, qui excessus sit ipsi B D æqualis: Patet nunc, quoniam B D est dupla A B, spatium B E fore triplum A B; E G quintuplum ejusdem A B; G K septuplum; aliaque deinceps auctum iri secundum progressionem numerorum imparium ab unitate, 1, 3, 5, 7, 9, &c. cumque quotlibet horum numerorum, sese consequentium, summa faciat quadratum, cujus latus est ipsa adsumptorum numerorum multitudo (velut si tres primi addantur, facient novem, si quatuor sexdecim) sequitur hinc spatia, à gravi cadente transmissa, quorum utrumque à principio casus inchoetur, esse inter se in ratione duplicata temporum quibus casus duravit, si nempe tempora commensurabilia sumantur.

TAB. V. Fig. 1.

Facile autem & ad tempora incommensurabilia demonstratio extendetur. Sint enim tempora hujusmodi, quorum inter se ratio ea quæ linearum A B, C D. spatiaque temporibus his transmissa sint E, & F, utraque nimirum ab initio descensus adsumpta. Dico esse, ut quadratum A B ad quadratum C D, ita spatium E ad F.

TAB. V. Fig. 2.

Si

De descensu gravium.

Si enim negetur; habeat primo, si potest, spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D, nempe eam quam quadratum A B ad quadratum C G, sumta C G minore quam C D, & à C D auferatur pars D H, minor quam D G excessus C D supra C G, atque ita ut reliqua H C commensurabilis sit ipsi A B; hoc enim fieri posse constat. Erit ergo C H major quam C G. Atqui ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C H, ita spatium E, quod tempore A B peractum est, ad spatium peractum tempore C H, per superiùs ostensa. Hoc vero spatio majus est illud quod tempore C D percurritur, nempe spatium F. ergo spatii E ad spatium F minor est ratio quam quadrati A B ad quadratum C H. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C G; ergo minor quoque erit ratio quadrati A B ad quadratum C G, quam quadrati A B ad quadratum C H, ac proinde quadratum C G majus quadrato C H; quod est absurdum, quum C H major dicta sit quam C G. Non habet igitur spatium E ad F majorem rationem quam quadratum A B ad quadratum C D.

Habeat jam, si potest, minorem; sitque ratio spatii E ad F eadem quæ quadrati A B ad quadratum C L, sumptâ C L majore quam C D, & à C L auferatur L K minor excessu L D, quo C D superatur à C L, atque ita ut reliqua K C sit commensurabilis A B. Quia ergo ut quadratum temporis A B ad quadratum temporis C K, ita est spatium E, peractum tempore A B, ad spatium peractum tempore C K. Hoc vero spatio minus est spatium peractum tempore C D, nempe spatium F. erit proinde spatii E ad F major ratio quam quadrati A B ad quadratum C K. Sicut autem spatium E ad F, ita ponebatur esse quadratum A B ad quadratum C L. Ergo major erit ratio quadrati A B ad quadratum C L quam ejusdem quadrati A B ad quadratum C K, ideoque quadratum C L minus erit quam qu. C K. quod est absurdum, quum C L major sit quam C K. Ergo neque minorem rationem habet spatium E ad F quam qua-

quadratum A B ad quadratum C D. quare necesse est ut eandem habeat. Porro cum celeritates in fine temporum A B, C D acquisitæ sint inter se sicut ipsamet tempora; apparet rationem spatiorum E ad F eandem quoque esse quæ quadratorum temporum A B, C D, quibus transmissa sunt. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO IV.

Si grave celeritate ea quam in fine descensus acquisivit sursum tendere cœperit, fiet ut paribus temporis partibus, spatia quæ prius sursum, eadem deorsum transeat, adeoque ad eandem unde descenderat altitudinem ascendat. Item ut æqualibus temporis partibus æqualia amittat celeritatis momenta.

Sunto enim ut in propositione 2, spatia quotlibet, æqualibus temporis partibus cadendo è quiete peracta, quorum primum A B; secundum compositum ex B D, quod celeritate æquabili acquisita per A B transeundum erat, & ex D E ipsi A B æquali; tertium compositum, ex E F, duplo ipsius B D, & ex F G, eidem A B æquali; quartum compositum ex G H, triplo ipsius B D, & ex H K ipsi itidem A B æquali, atque eadem ratione porro crescentia, si plura fuerint. Dico totidem æqualibus temporibus eadem spatia K G, G E, E B, B A, singula singulis peragenda esse à gravi sursum tendente, atque incipiente cum celeritate in fine descensus K acquisita.

TAB. V. Fig. 1.

Brevitatis autem gratia celeritas quæque designetur deinceps longitudine spatii quod grave motu æquabili, cum celeritate illa, atque temporis parte una, quales in descensu consideravimus, transmissurum esset.

Itaque ex ostensis dicta propositione, cum in K grave pervenerit, habet celeritatem G H auctam celeritate B D,

H hoc

DE DESCENSU GRAVIUM.

hoc eſt celeritatem K F, quia K F æquatur ipſis H G, B D, ſunt enim partes ſingulæ H K, F G, æquales ipſi A B, ac proinde utraque ſimul ipſi B D, quam eſſe duplam A B oſtendimus propoſitione 2. Itaque celeritatem in fine deſcenſus K acquiſitam ſurſum convertendo, ſi grave æquabili motu ferretur, conficeret una temporis parte ſpatium K F. Atqui, gravitatis actione accedente, diminuetur aſcenſus K F ſpatio F G ipſi A B æquali, ut patet ex dictis ad hypotheſin initio ſumptam. Ergo parte prima temporis aſcendet grave tantum per K G, quo eodem ſpatio parte temporis noviſſima deſcenderat. Simul vero & celeritati tantum deceſſiſſe neceſſe eſt, quantum acquiritur temporis parte una deorſum cadendo, hoc eſt celeritatem B D. Itaque grave, ubi ad G aſcenderit, habet celeritatem reliquam H G, cum initio aſcenſus habuerit celeritatem H G una cum celeritate B D. Eſt autem ipſi H G æqualis G D; quum æquetur ipſi F E una cum D B, hoc eſt una cum dupla A B, hoc eſt una cum duabus F G & E D; Ergo ſi ex G, cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, conficeret una parte temporis ſpatium G D. Accedente autem gravitatis actione, diminuetur aſcenſus iſte ſpatio D E, ipſi A B æquali. Ergo, hac ſecunda parte temporis, aſcendet per ſpatium G E, quod ſimili temporis parte etiam cadendo tranſierat. Simul autem celeritati tantum deceſſiſſe denuo debet quantum temporis parte una ex caſu acquiritur, nempe celeritas B D. Itaque ubi uſque ad E aſcenderit, habet duntaxat celeritatem F E, quæ nimirum relinquitur quum à celeritate G D aufertur celeritas B D. Nam B D, ut jam diximus, æqualis eſt duabus D E, F G.

Eſt autem ipſi F E æqualis E A, quum F E æquetur ipſi B D bis ſumptæ, hoc eſt ipſi B D una cum dupla A B, hoc eſt una cum duabus A B, D E. Ergo ſi ex E cum celeritate æquabili, quantam illic habet, ſurſum pergeret, confecturum eſſet una temporis parte ſpatium E A. Sed accedente actione gravitatis, diminuetur aſcenſus iſte ipſo ſpatio A B. Proinde hac parte temporis per ſpatium E B tantum aſcen-

ascendet, quod simili parte temporis descendendo quoque transierat. Hic vero rursus celeritati tantum decessisse necesse est quantum una temporis parte cadendo deorsum acquiritur, hoc est celeritatem B D. Itaque grave, ubi usque ad B ascenderit, habet celeritatem ipsam B D reliquam, cum in E habuerit celeritatem F E ipsius B D duplam. Si ergo ex B cum celeritate æquabili, quantam illic habet, sursum pergeret, confecturum esset parte una temporis spatium æquale ipsi D B, hoc est duplum A B. Sed accedente gravitatis actione, diminuitur ascensus iste spatio quod ipsi A B æquale sit. Igitur hac parte temporis ascendet tantummodo per spatium B A, quod etiam primo descensus tempore transierat. Atque in fine quidem extremi temporis hujus necessario grave in A puncto reperietur. Sed dicetur forsan altius ascendisse quam ad A, atque inde eo relapsum esse. At hoc absurdum esset, cum non possit, motu à gravitate profecto, altius quam unde decidit ascendere. Porro quum celeritati quam in B habebat rursus decesserit celeritas B D, patet jam gravi in A constituto nullam celeritatem superesse, ac proinde non altius excursurum. Itaque ostensum est ad eandem unde decidit altitudinem pervenisse, & singula spatia, quæ æqualibus descensus temporibus transmiserat, eadem totidem ascensus temporibus remensum esse: sed & æqualibus temporibus æqualia ipsi decessisse celeritatis momenta apparuit. Ergo constat propositum.

Quia vero in demonstratione propositionis secundæ, ex qua pendet præcedens, adsumptum fuit certam quandam esse proportionem spatiorum quæ continuis æqualibus temporibus à gravi cadente transeuntur, quæque eadem sit, quæcunque æqualia tempora accipiantur; quod quidem & ex rei natura ita se habere necesse est, & si negetur, fatendum frustra proportionem istorum spatiorum investigari. Tamen, quia propositum etiam absque hoc demonstrari potest, Galilei methodum sequendo, operæ pretium erit demonstrationem, ab illo minus perfecte traditam, hic accuratius conscribere. itaque rursum hic demonstrabimus.

De descensu gravium.

PROPOSITIO V.

Spatium peractum certo tempore, à gravi è quiete casum inchoante, dimidium esse ejus spatii quod pari tempore transiret motu æquabili, cum celeritate quam acquisivit ultimo casus momento.

TAB. V. Fig. 3.

Sit tempus descensus totius A H, quo tempore mobile peregerit spatium quoddam cujus quantitas designetur plano P. ductaque H L perpendiculari ad A H, longitudinis cujuslibet, referat illa celeritatem in fine casus acquisitam. Deinde completo rectangulo A H L M, intelligatur eo notari quantitas spatii quod percurreretur tempore A H, cum celeritate H L. Ostendendum est igitur planum P dimidium esse rectanguli M H, hoc est, ducta diagonali A L, æquale triangulo A H L.

Si planum P non est æquale triangulo A H L, ergo aut minus eo erit, aut majus. Sit primo, si fieri potest, planum P minus triangulo A H L. dividatur autem A H in tot partes æquales A C, C E, E G &c. ut, circumscriptâ triangulo A H L figurâ è rectangulis quorum altitudo singulis divisionum ipsius A H partibus æquetur, ut sunt rectangula B C, D E, F G, alterâque eidem triangulo inscriptâ, ex rectangulis ejusdem altitudinis, ut sunt K E, O G &c. ut, inquam, excessus illius figuræ supra hanc, minor sit excessu trianguli A H L supra planum P. hoc enim fieri posse perspicuum est, cum totus excessus figuræ circumscriptæ super inscriptam æquetur rectangulo infimo, basin habenti H L. Erit itaque omnino excessus ipsius trianguli A H L supra figuram inscriptam minor quam supra planum P, ac proinde figura triangulo inscripta major plano P. Porro autem, quum recta A H tempus totius descensus referat, ejus partes æquales A C, C E, E G, æquales temporis illius partes referent. Cumque celeritates mobilis cadentis crescant eadem proportione qua tempora descensus *; sitque celeritas in

* Prop. I. huj.

in fine totius temporis acquisita H L; erit ea, quæ in fine primæ partis temporis A C acquiretur, C K; quia ut A H ad A C, ita H L ad C K. Similiter quæ in fine partis temporis secundæ C E acquiritur, erit E O, atque ita deinceps. Patet autem, tempore primo A C, spatium aliquod à mobili transmissum esse, quod majus sit nihilo; tempore vero secundo C E transmissum esse spatium quod majus sit quam K E, quia spatium K E transmissum fuisset tempore C E, motu æquabili, cum celeritate C K. habent enim spatia, motu æquabili transacta, rationem compositam ex ratione temporum, & ratione velocitatum, ideoque cum tempore A H, celeritate æquabili H L percurri posuerimus spatium M H, sequitur tempore C E, cum celeritate C K, percurri spatium K E, quum ratio rectanguli M H ad rectangulum K E componatur ex rationibus A H ad C E, & H L ad C K.

Quum ergo, ut dixi, spatium K E sit illud quod transmitteretur tempore C E, cum celeritate æquabili C K, mobile autem feratur tempore C E motu accelerato, qui jam principio hujus temporis habet celeritatem C K; manifestum est isto accelerato motu, tempore C E, majus spatium quam K E confecturum. Eadem ratione, tempore tertio E G, majus spatium conficiet quam O G, quia nempe hoc confectum esset tempore eodem E G, cum celeritate æquabili E O. Atque ita deinceps, singulis temporis A H partibus, à mobili majora spatia quam sunt rectangula figuræ inscriptæ, ipsis partibus adjacentia, peragentur. Quare totum spatium motu accelerato peractum majus erit ipsa figura inscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P. Itaque figura inscripta minor erit spatio P. quod est absurdum; eodem enim spatio major ostensa fuit. Non est igitur planum P minus triangulo A H L. At neque majus esse ostendetur.

Sit enim, si potest; & dividatur A H in partes æquales, atque ad earum altitudinem, inscripta circumscriptaque rursus, ut ante, sit triangulo A H L figura ex rectangulis, ita ut altera alteram excedat minori excessu quam quo planum

P superat triangulum A H L, erit igitur necessario figura circumscripta minor plano P. Constat jam, prima temporis parte A C, minus spatium à mobili transmitti quam sit B C, quia hoc percurreretur eodem tempore A C cum celeritate æquabili C K, quam demum in fine temporis A C mobile adeptum est. Similiter secunda parte temporis C E, minus spatium motu accelerato transmittetur quam sit D E, quia hoc percurreretur eodem tempore C E, cum celeritate æquabili E O, quam demum in fine temporis C E mobile assequitur. Atque ita deinceps, singulis partibus temporis A H, minora spatia à mobili trajicientur quam sunt rectangula figuræ circumscriptæ, ipsis partibus adjacentia. Quare totum spatium motu accelerato peractum, minus erit ipsa figura circumscripta. Spatium vero illud æquale positum fuit plano P; ergo planum P minus quoque erit figura circumscripta. quod est absurdum, cum figura hæc plano P minor ostensa fuerit. Ergo planum P non majus est triangulo A H L, sed nec minus esse jam ostensum fuit. Ergo æquale sit necesse est; quod erat demonstrandum.

Et hæc quidem omnia quæ hactenus demonstrata sunt, gravibus per plana inclinata descendentibus atque ascendentibus æque ac perpendiculariter motis convenire sciendum est: cum, quæ de effectu gravitatis posita fuerunt, eadem ratione utrobique sint admittenda.

Hinc vero non difficile jam erit demonstrare propositionem sequentem quam concedi sibi, ut quodammodo per se manifestam, Galileus postulavit. nam demonstratio illa quam postea adferre conatus est, quæque in posteriori operum ejus editione extat, parum firma meo quidem judicio videtur. Est autem propositio hujusmodi.

PROPOSITIO VI.

Celeritates gravium, super diversis planorum inclinationibus descendendo acquisitæ, æquales sunt, si planorum elevationes fuerint æquales.

Ele-

Elevationem plani vocamus altitudinem ejus secundum perpendiculum.

De descensu gravium. Tab. V. Fig. 4.

Sunto itaque plana inclinata, quorum sectiones factæ plano ad horizontem erecto, A B, C B; quorumque elevationes A E, C D sint æquales; & cadat grave ex A per planum A B, & rursus ex C per planum C B. dico utroque casu eundem gradum velocitatis in puncto B acquisiturum.

Si enim per C B cadens minorem velocitatem acquirere dicatur quam cadens per A B, habeat ergo, per C B cadens, eam duntaxat quam per F B acquireret, posita nimirum F B minore quam A B. Acquiret autem per C B cadens eam velocitatem qua rursus per totam B C possit ascendere *. Ergo & per F B acquiret eam velocitatem qua possit ascendere per totam B C. Ideoque cadens ex F in B, si continuet porro motum per B C; quod repercussu ad superficiem obliquam fieri potest; ascendet usque in C, hoc est, altius quam unde decidit, quod est absurdum.

* Prop. 4. huj.

Eodem modo ostendetur neque per planum A B decidenti minorem velocitatem acquiri quam per C B. Ergo per utraque plana eadem velocitas acquiritur, quod erat demonstrandum.

Quod si vero, pro plano alterutro, sumatur perpendiculum ipsum planorum elevationi æquale, per quod decidere mobile ponatur, sic quoque eandem quam per plana inclinata velocitatem ei acquiri constat; eadem namque est demonstratio.

Porro hinc jam recte quoque procedet demonstratio alterius theorematis Galileani, cui reliqua omnia, quæ de descensu super planis inclinatis tradidit, superstruuntur. Nempe

PROPOSITIO VII.

Tempora descensuum super planis diversimode inclinatis, sed quorum eadem est elevatio, esse inter se ut planorum longitudines.

Sint

DE DESCENSU GRAVIUM. TAB. V. Fig. 5.

Sint plana inclinata A C, A D quorum eadem elevatio A B. dico tempus descensus per planum A C ad tempus descensus per A D esse ut longitudo A C ad A D. Est enim tempus per A C æquale tempori motus æquabilis per eandem A C, cum celeritate dimidia ejus quæ acquiritur casu per A C *. Similiter tempus per A D est æquale tempori motus æquabilis per ipsam A D, cum dimidia celeritate ejus quæ acquiritur casu per A D. Est autem hæc dimidia celeritas illi dimidiæ celeritati æqualis *, ideoque dictum tempus motus æquabilis per A C, ad tempus motus æquabilis per A D, erit ut A C ad A D. Ergo & tempora singulis istis æqualia, nimirum tempus descensus per A C, ad tempus descensus per A D, eandem rationem habebunt, nempe quam A C ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

Eodem modo ostendetur & tempus descensus per A C, ad tempus casus per A B perpendicularem, esse ut A C ad A B longitudine.

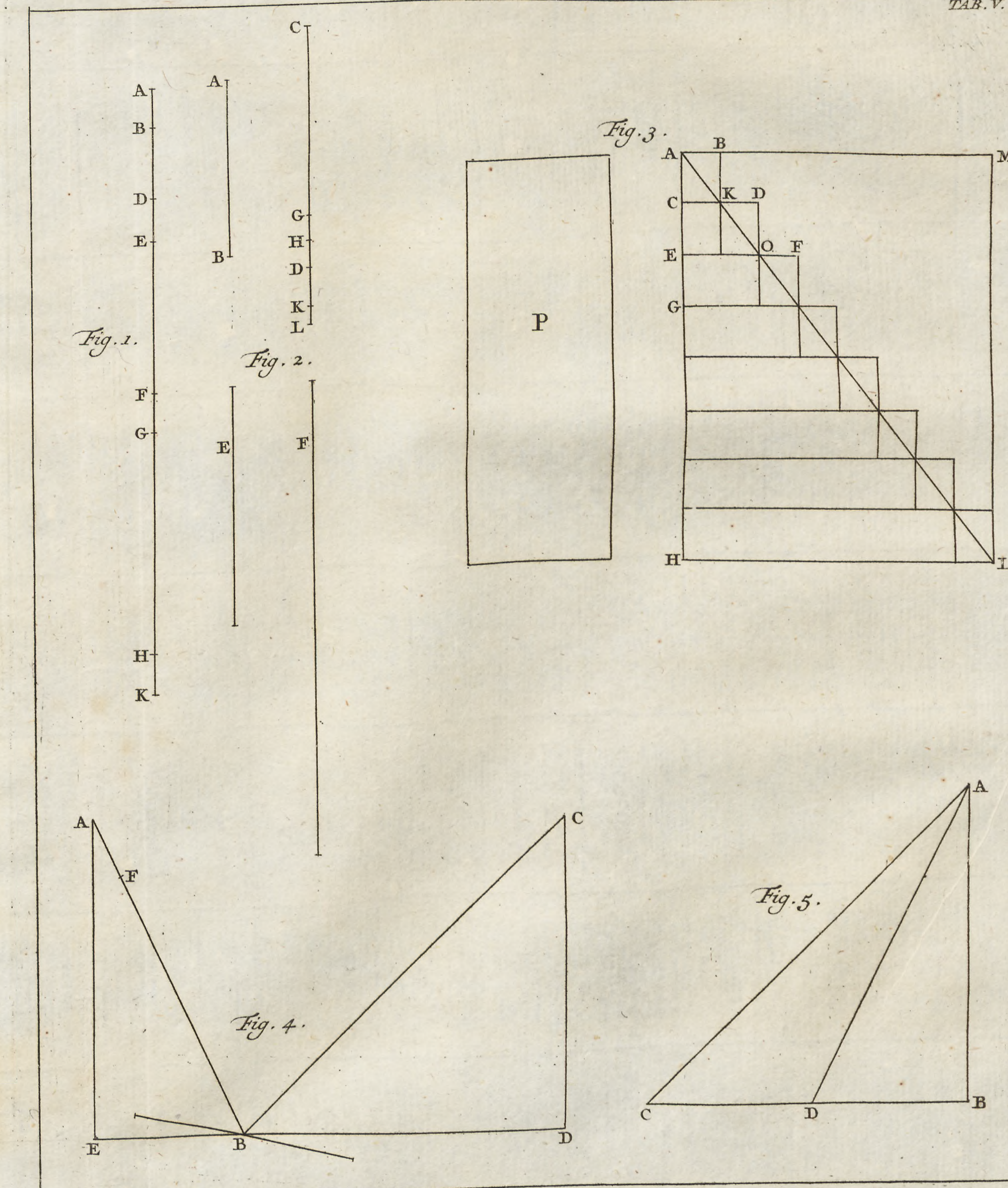
PROPOSITIO VIII.

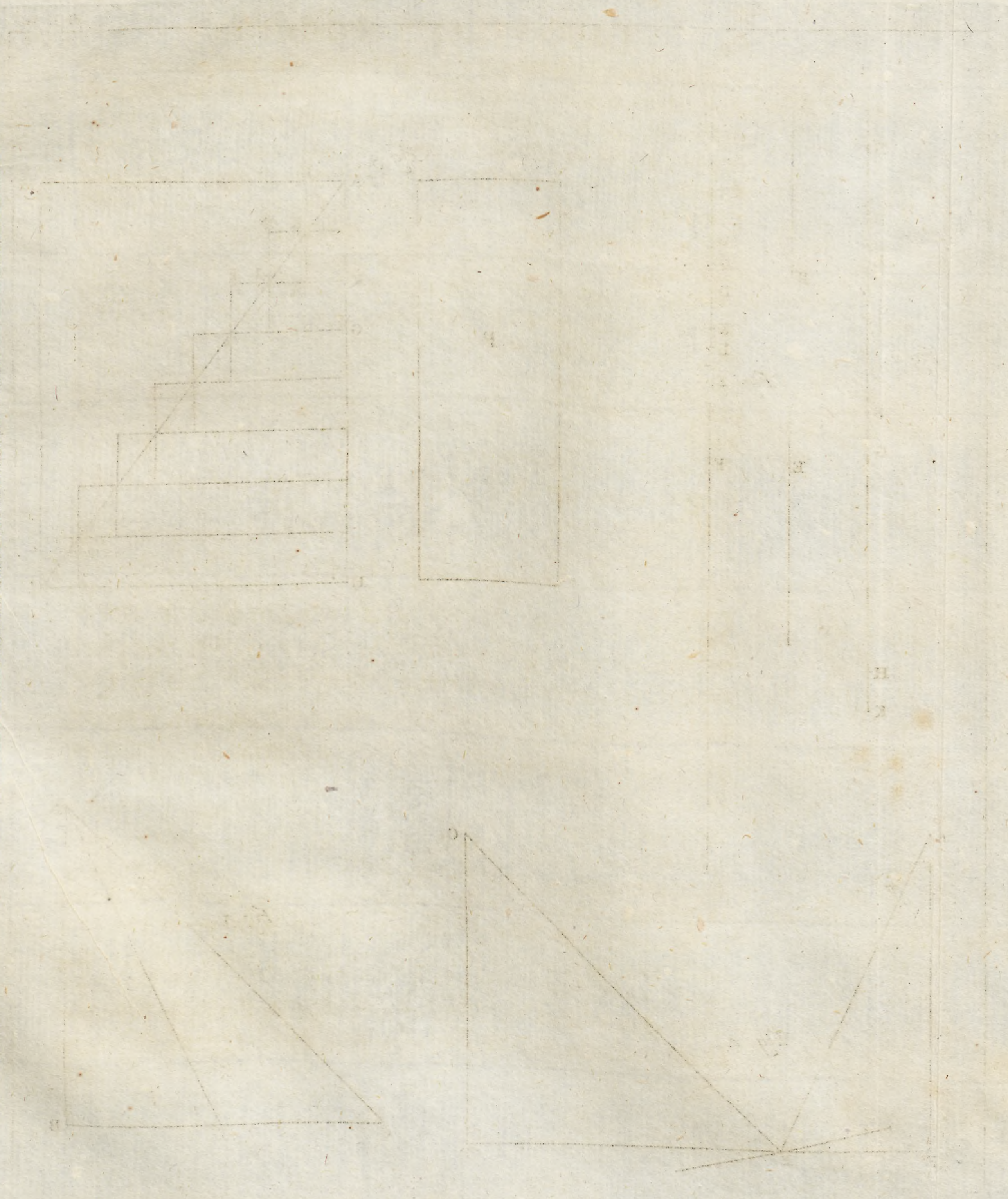
SI ex altitudine eadem descendat mobile continuato motu per quotlibet ac quælibet plana contigua, utcunque inclinata; semper eandem in fine velocitatem acquiret, quæ nimirum æqualis erit ei quam acquireret cadendo perpendiculariter ex pari altitudine.

TAB. VI. Fig. 1.

Sint plana contigua A B, B C, C D, quorum terminus A, supra horizontalem lineam D F per infimum terminum D ductam, altitudinem habeat quanta est perpendicularis E F. descendatque mobile per plana illa ab A usque in D. Dico in D eam velocitatem habiturum quam, ex E cadens, haberet in F.

Producta enim C B occurrat rectæ A E in G. Itemque D C producta occurrat eidem A E in E. Quoniam itaque per


Fig. 1.
A
B
D
E
F
G
H
K
Fig. 2.
A
B
C
G
H
D
K
L
E
F
Fig. 3.
P
A
B
M
C
K
D
E
O
F
G
H
L
Fig. 4.
A
F
C
E
B
D
Fig. 5.
A
C
D
B



per A B descendens eandem acquirit velocitatem in termino B, atque descendens per G B *; manifestum est, cum flexus ad B nihil obstare motui ponatur, tantam velocitatem habiturum ubi in C pervenerit, quantam si per G C planum descendisset; hoc est, quantam haberet ex descensu per E C. Quare & reliquum planum C D eodem modo transibit ac si per E C advenisset, ac proinde in D denique parem velocitatem habebit, ac si descendisset per planum E D, hoc est, eandem quam ex casu perpendiculari per E F. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. huj.

Hinc liquet etiam per circuli circumferentiam, vel per curvam quamlibet lineam descendente mobili (nam curvas tanquam ex infinitis rectis compositæ essent hic considerare licet) semper eandem illi velocitatem acquiri si ab æquali altitudine descenderit: tantamque eam esse velocitatem, quantam casu perpendiculari ex eadem altitudine adipisceretur.

PROPOSITIO IX.

SI grave, à descensu, sursum convertat motum suum, ascendet ad eandem unde venit altitudinem, per quascunque planas superficies contiguas, & quomodocunque inclinatas, incesserit.

Cadat grave ex altitudine A B, & ex puncto B inclinata sint sursum plana B C, C D, D E, quorum extremitas E sit eadem altitudine cum puncto A. Dico si mobile, post casum per A B, convertat motum ut pergat moveri per dicta plana inclinata, perventurum usque in E.

TAB. VI. Fig. 2.

Dicatur enim, si fieri potest, tantum ad G perventurum. Producantur B C & C D, donec occurrant horizontali G F in F & H. Cum igitur mobile, superatis planis B C, C D, habeat tantum eam velocitatem quâ possit ascendere per D G, vel per D H; nam ad hæc utraque eadem velocitate opus esse constat ex propositione 6; Ergo, superato plano B C, eam duntaxat habebat qua potuisset ascendere per C H,

De descensu gravium.

vel per C F. Ergo in B duntaxat eam qua potuisset ascendere per B F, hoc est, eandem quam acquireret descendendo per F B. Atqui in B habet velocitatem qua potest ascendere usque in A. Ergo illa velocitate quam acquirit grave descendendo per F B, posset ascendere per B A, hoc est, altius quam unde discesserat, quod fieri non potest.

Est autem eadem prorsus demonstratio quotcunque plana fuerint per quæ mobile ascendat. Unde & si infinita fuerit planorum multitudo, hoc est, si superficies aliqua curva ponatur, per hanc quoque ad eam ex qua venit altitudinem mobile assurget.

PROPOSITIO X.

SI mobile cadat perpendiculariter, vel per quamlibet superficiem descendat, ac rursus impetu concepto per quamlibet aliam feratur sursum, habebit ascendendo ac descendendo in punctis æque altis eandem semper velocitatem.

TAB. IV. Fig. 3.

Ut si mobile ex altitudine A B decidens, motum deinde continuet per superficiem B C D, in qua punctum C sit pari altitudine atque in A B est punctum E. Dico in C eandem velocitatem inesse mobili atque in E fuerat.

Quum enim in C ea velocitas supersit mobili qua porro ascendat usque ad D punctum, æque altum ac A*: cumque & ex descensu per A E velocitatem eam acquirat qua, converso motu, ascensurum sit per C D*; Patet cum pervenit ad C ascendendo, eandem ipsum habere velocitatem, quam habebat in E descendendo; quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

* Prop. præced.

PROPOSITIO XI.

SI mobile per superficiem aliquam deorsum tendat, ac deinde converso motu sursum per eandem

dem superficiem vel aliam similem similiterque positam feratur, æqualibus temporibus per idem spatium descendet atque ascendet.

De descensu gravium.

Velut si per superficiem A B descendat mobile, atque, ubi ad B pervenerit, converso motu sursum per eandem A B, vel ei similem & respectu plani horizontalis similiter positam B C, ascendat, constat ex ante demonstratis, perventurum ad eandem ex qua venit altitudinem. Cum autem perpetuo, in punctis quorum eadem altitudo, eandem velocitatem habeat ascendendo ac descendendo *; apparet eandem lineam bis eadem velocitate singulis sui partibus percurri: unde & tempora utriusque motus æqualia esse necesse est; quod erat demonstrandum.

TAB. VI. Fig. 4.

* Prop. præced.

PROPOSITIO XII.

Esto circulus A B C, *diametro* A C, *cui ad angulos rectos sit* F G; *huic vero occurrat à termino diametri* A *educta* A F *extra circulum, quæ quidem necessario secabit circumferentiam, puta in* B. *Dico arcum* B D, *lineis* G F, A F *interceptum, minorem esse recta* D F.

TAB. VI. Fig. 5.

Jungatur enim B C, & ducatur ex B puncto tangens circumferentiam recta B E, quæ necessario occurret rectæ F G inter F & D. Est igitur angulus B A C in circulo æqualis angulo E B C*. quare & angulus F B E, qui una cum E B C constituit angulum rectum F B C, erit æqualis B C A. Quia autem similia sunt triangula A B C, A G F, erit & angulus F æqualis angulo A C B. Ergo idem angulus F æqualis angulo F B E. Itaque isosceles est triangulus F E B, habens crura æqualia F E, E B. Addita ergo utrique eorum recta E D, fiet F D, æqualis duabus B E, E D. Hasce vero duas majores esse constat arcu B D, iisdem termi-

* Prop. 32 Lib. 3. Eucl.

nis intercepto, & in eandem partem cavo. Ergo & F D eodem arcu B D major erit: quare constat propositum.

PROPOSITIO XIII.

TAB. VI. Fig. 6.

Isdem positis, si recta A B *occurrat ipsi* D G *intra circulum; Dico arcum* B D, *rectis* G D, A B *interceptum, majorem esse recta* D F.

Jungatur enim D C & ducatur arcui D B subtensa D B. Quoniam ergo angulus A B D æqualis A C D, hoc est, angulo A D G; angulus autem D F B major angulo A D F, sive A D G; erit idem D F B etiam major D B F. Ergo in triangulo D F B latus D B majus latere D F; unde multo magis arcus D B superabit eandem D F. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

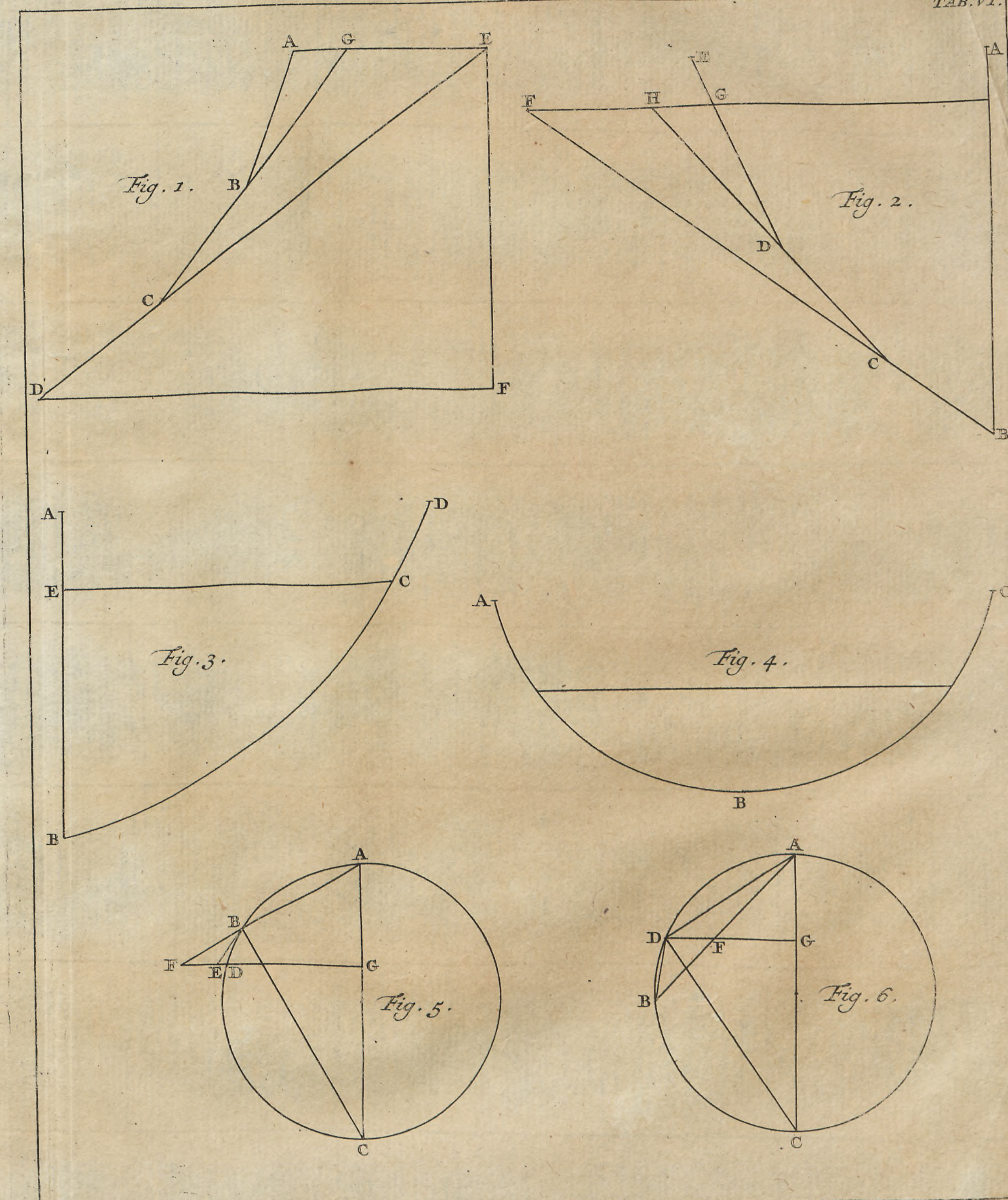
TAB. VII. Fig. 1.

Sit cyclois A B C *cujus basis* A C *axis* B D. *Quomodo autem generetur ex definitione & descriptione mechanica superius traditis satis manifestum arbitror. Et circa axem* B D, *circulus descriptus sit* B G D, *& à quolibet puncto* E *in cycloide sumpto agatur* E F *basi* A C *parallela, quæ occurrat axi* B D *in* F, *secetque circumferentiam* B G D *in* G, *Dico rectam* G E *arcui* G B *æqualem esse.*

Describatur enim per E punctum circulus L E K ipsi B G D æqualis, quique tangat basin cycloidis in K, & ducatur diameter K L. Est igitur recta A K arcui E K æqualis; sed tota A D æqualis semicircumferentiæ K E L; ergo K D æqualis arcui E L sive G B. Est autem K D sive N F æqualis E G, quoniam E N æqualis G F, & communis utrique N G. Ergo constat & G E æqualem esse arcui G B.

PRO-

TAB. VI.



PROPOSITIO XV.

De descensu gravium.

Dato in Cycloide puncto, rectam per illud ducere quæ Cycloidem tangat.

Sit cyclois A B C, & punctum in ea datum B, per quod tangentem ducere oporteat.

Tab. VII. Fig. 2.

Circa axem cycloidis A D describatur circulus genitor A E D, & ducatur B E parallela basi cycloidis, quæ dicto circulo occurrat in E, & jungatur A E, cui denique parallela per B agatur H B N. Dico hanc cycloidem in B contingere.

Sumatur enim in ea punctum quodlibet, à B diversum, ac primo versus superiora velut H, & per H ducantur recta basi cycloidis parallela, quæ occurrat cycloidi in L, circulo A E D in K, rectæ A E in M. Quia ergo K L est æqualis arcui K A, recta autem K M minor arcu K E, erit recta M L minor arcu A E, hoc est, rectâ E B, sive M H; unde apparet punctum H esse extra cycloidem.

Deinde in recta H N sumatur punctum N inferius B, & per N agatur, ut ante, basi parallela, quæ occurrat cycloidi in Q, circulo A E D in O, rectæ A E productæ in P. Quia ergo O Q, æqualis est arcui O A; O P autem major arcu O E; erit P Q minor arcu E A, hoc est, rectâ E B, sive P N. Unde apparet rursus punctum N esse extra cycloidem. Cum igitur quodlibet punctum præter B, in recta H B N sumptum, sit extra cycloidem, constat illam in puncto B cycloidem contingere; quod erat demonstrandum.

Huic demonstrationi an locum suum hic relinquerem dubitavi, quod non multum ei absimilem à clarissimo Wrennio editam inveniam in libro Wallisii de Cycloide. Potest autem & universali constructione propositum absolvi, quæ non cycloidi tantum sed & aliis curvis, ex cujuslibet figuræ circumvolutione genitis, conveniat; dummodo sit figura in eandem partem cava, & ex iis quæ geometricæ vocantur.

Sit enim curva N A B, orta ex circumvolutione figuræ

Tab. VII. Fig. 3.

O L ſuper regula L D; deſcribente nempe puncto N, in circumferentia figuræ O L ſumpto. Et oporteat ad punctum curvæ A tangentem ducere. Ducatur recta C A à puncto C, ubi figura regulam tangebat cum punctum deſcribens eſſet in A: quod punctum contactûs ſemper inveniri poteſt, ſiquidem eo reducitur problema ut duæ rectæ inter ſe parallelæ ducendæ ſint, quarum altera tranſeat per punctum deſcribens in figuræ ambitu datum, altera figuram tangat, quæque inter ſe diſtent quantum diſtat punctum datum A ab regula L D: dico ipſam C A occurrere curvæ ad angulos rectos, ſive circumferentiam M A F deſcriptam centro C radio C A, tangere curvam in puncto A, unde perpendicularis ad A C, per punctum A, ducta curvam ibidem continget.

Ducatur enim C B primum ad punctum curvæ B, quod diſtet ultra punctum A ab regula L D, intelligaturque figuræ poſitus in B E D, cum punctum deſcribens eſſet in B, contactus regulæ in D. & punctum curvæ quod erat in C, cum punctum deſcribens eſſet in A, hìc jam ſublatum ſit in E; & jungantur E C, E B, tangatque figuram in E recta K H, occurrens regulæ in H.

Quia ergo recta C D æqualis eſt curvæ E D; eâdem vero curva major eſt utraque ſimul E H, H D; erit E H major quam C H. Unde angulus E C H major quam C E H, & proinde E C L minor quam C E K. Atqui addendo angulum K E B, qui æqualis eſt L C A, ad K E C, fit angulus C E B: & auferendo ab E C L angulum L C B, fit E C B. Ergo angulus C E B major omnino angulo E C B. Itaque in triangulo C E B, latus C B majus erit quam E B. ſed E B æquale patet eſſe C A, cum ſit idemmet ipſum unà cum figura tranſpoſitum. Ergo C B etiam major quam C A, hoc eſt, quam C F. unde conſtat punctum B eſſe extra circumferentiam M A F.

Sit rurſus punctum N in curva ſumptum inter regulam L D & punctum A. Cumque punctum deſcribens eſſet in N, ponatur ſitus figuræ fuiſſe in V L, punctumque contactus L, punctum verò quod tangebat prius regulam in C, ſit jam ſubla-

ſublatum in V: & jungantur C N, N V, V C, V L. Erit ergo V N æqualis C A; imo erit ipſa C A translata in V N. Jam quia recta L C æquatur curvæ L V, ac proinde major eſt recta L V, erit in triangulo C L V angulus L V C major quam L C V. Quare addito inſuper angulo L V N ad L V C, fiet totus N V C major utique quam L C V, ac proinde omnino major angulo N C V, qui pars eſt L C V. Ergo in triangulo C V N latus C N majus erit latere V N, cui æquatur C A, ideoque C N major quoque quam C A, hoc eſt quam C M. Unde apparet punctum N cadere extra circulum M A F, qui proinde tanget curvam in puncto A. quod erat demonſtrandum.

De descensu gravium.

Eſt autem eadem quoque tum conſtructio tum demonſtratio, ſi curva genita ſit à puncto deſcribente, vel intra vel extra ambitum figuræ circumvolutæ ſumpto. Niſi quod, hoc poſteriori caſu, pars quædam curvæ infra regulam deſcendit, unde nonnulla in demonſtratione oritur diverſitas.

Sit enim punctum A, per quod tangens ducenda eſt, datum in parte curvæ N A B, quæ infra regulam C L deſcendit, deſcripta nimirum à puncto N extra figuram revolutam ſumpto, ſed certam poſitionem in eodem ipſius plano habente. Invento igitur puncto C, ubi figura revoluta tangit regulam C D quum punctum deſcribens eſſet in A, ducatur recta C A. Dico hanc curvæ N A B occurrere ad rectos angulos, ſive circumferentiam radio C A centro C deſcriptam tangere curvam N A B in puncto A. Oſtendetur autem exterius ipſam contingere, cum in curvæ parte ſupra regulam C D poſita interius contingat.

TAB. VIII. Fig. 1.

Poſitis enim & deſcriptis iiſdem omnibus quæ prius, oſtenditur rurſus angulus E C H major quam C E H. atqui ad E C H addito H C B fit angulus E C B; & à C E H auferendo H E B, qui æqualis eſt D C A, fit angulus C E B. Ergo E C B major omnino quam C E B. unde in triangulo E C B latus E B majus quam C B. ſed ipſi E B æqualis eſt C A, ſive C F. Ergo & C F major quam C B: ideoque punctum circumferentiæ F eſt ultra curvam N A B à centro remotum.

Item.

De descensu gravium.

Item rursus ostenditur angulus L V C major L C V. Quare C V P, qui cum L V C duos rectos æquat, minor erit quam V C D. Atqui addendo ad V C D angulum D C N, fit V C N; & auferendo ab C V P angulum P V N, fit C V N. Ergo angulus V C N omnino major quam C V N. In triangulo itaque C V N, latus V N majus erit quam C N. Est autem ipsi V N æqualis C A sive C M. Ergo & C M major quam C N, ideoque punctum circumferentiæ M erit ultra curvam N A B à centro C remotum. Itaque constat circumferentiam M A F tangere curvam in puncto A. quod erat demonstrandum.

Quod si punctum curvæ per quod tangens ducenda est, sit illud ipsum ubi regula curvam secat, erit tangens quæsita semper regulæ perpendicularis; ut facile esset ostendere.

PROPOSITIO XVI.

De motu in Cycloide. TAB. VIII. Fig. 2.

SI circuli circumferentiam, cujus centrum E, *secent rectæ duæ parallelæ* A F, B G, *quarum utraque ad eandem partem centri transeat, vel altera* A F *per centrum ipsum: & à puncto* A, *quo centro propior circumferentiam secat, ducatur recta ipsam contingens: dico partem hujus* A B, *à parallelà utraque interceptam, minorem esse arcu* A C, *ab utraque eadem parallela intercepto.*

Ducatur enim arcui A C subtensa recta A C. Quia ergo angulus B A F est æqualis ei quem capit portio circuli A H F, quæ vel major est semicirculo vel semicirculus, erit proinde angulus B A F, vel minor recto vel rectus; ideoque angulus A B C vel major recto vel rectus. Quare in triangulo A B C latus A C, angulo B subtensum, majus erit latere A B. sed idem latus A C minus est arcu A C. Ergo omnino & A B arcu A C minor erit.

PRO-

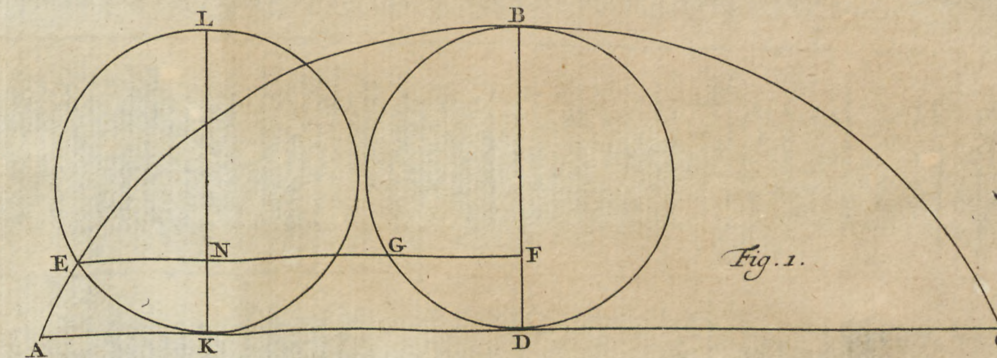


Fig. 1.

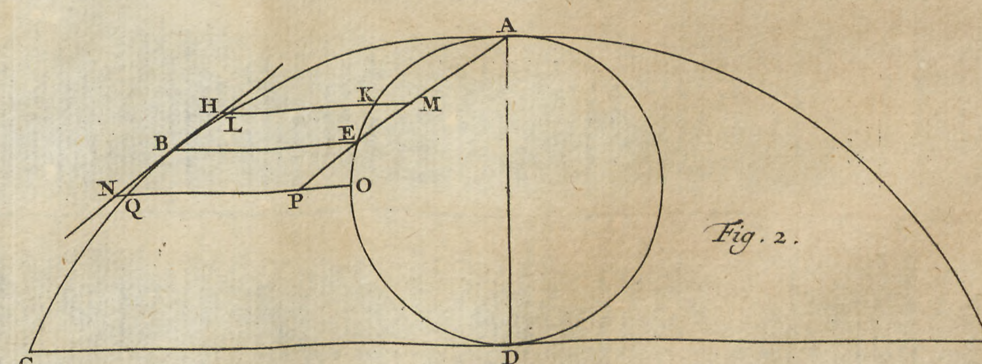


Fig. 2.

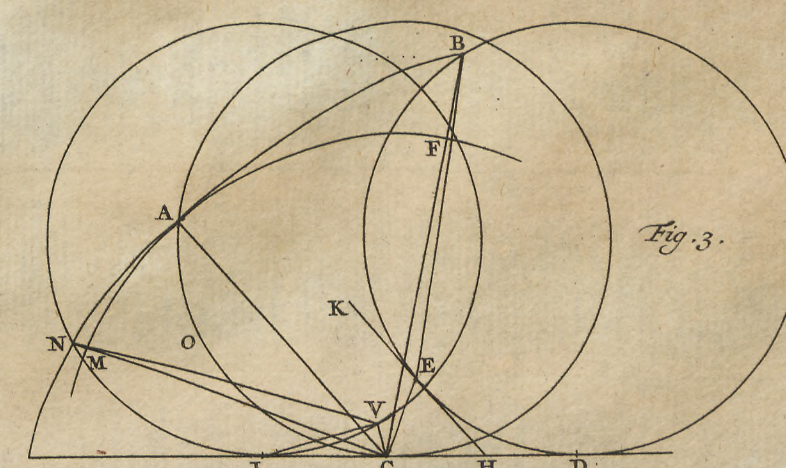


Fig. 3.

PROPOSITIO XVII.

De motu in Cycloide.

TAB. VIII. Fig. 3.

Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K, *circulum secuerit, quæ ab ea quæ centro propior est* A F, *tantundem distet quantum hæc à reliqua* B G: *dico partem tangentis in* A, *à parallela ultimo adjecta, & media interceptam, nempe* A D, *arcu* A C *à primis duabus parallelis intercepto minorem esse.*

Hoc enim patet quum A D ipsi A B æqualis sit, quam antea ostendimus arcu A C minorem esse.

PROPOSITIO XVIII.

TAB. VIII. Fig. 4.

Si circulum, cujus centrum E, *duæ rectæ parallelæ secuerint* A F, B G; *& à puncto* B, *ubi quæ à centro remotior est, vel tantundem atque altera distat, circumferentiæ occurrit, ducatur recta circumferentiam tangens: erit pars hujus* B A, *à parallelis intercepta, major arcu ab iisdem parallelis intercepto* B C.

Ducatur enim in puncto C, recta M C L circumferentiam tangens, quæ occurrat tangenti B A in L. In triangulo igitur A C L, angulus C æqualis est angulo M C F, hoc est, ei quem capit portio circuli C B F. angulus autem A æquatur angulo quem capit portio circuli B C G, quæ portio quum sit major vel æqualis portioni C B F, quippe quum B G vel ulterius distet à centro quam C F, vel tantundem: erit proinde trianguli A C L angulus A minor vel æqualis angulo C: & consequenter latus C L vel minus vel æquale lateri A L. Atqui C L una cum L B majores sunt arcu C B. Ergo & A L una cum L B, hoc est, tan-

DE MOTU IN CYCLOIDE.

gens A B, eodem arcu C B major erit. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XIX.

TAB. VIII. Fig. 5.

Isdem positis, si tertia recta prioribus parallela D K *circulum secet, quæ tantundem distet ab ea quæ remotior est à centro quantum hæc à reliqua* A F: *Erit pars tangentis in* B, *à parallela media, & ultimo addita* D K, *intercepta, nimirum* B D, *major arcu* B C.

Hoc enim manifestum est cum B D fiat ipsi B A æqualis, quam ostendimus arcu B C majorem esse.

PROPOSITIO XX.

TAB. VIII. Fig. 6.

Si arcus circuli, semicircumferentia minor, A B, *in partes quotlibet secetur lineis rectis parallelis, quæ & inter se, & cum rectis sibi parallelis per terminos arcus ductis, æqualia intervalla constituant, quales sunt* C D, E F, G H, K L *&c. ducanturque ad terminum arcus alterutrum* A, *& ad reliqua omnia sectionum puncta rectæ circumferentiam tangentes, omnes in eandem partem, & ut unaquæque occurrat proximæ dictarum parallelarum; cujusmodi sunt tangentes* A C, D E, F G, H K *&c. Dico has tangentes, dempta prima* A C, *simul sumptas, minores esse arcu proposito* A B. *Easdem vero omnes, non omissa* A C, *majores esse arcu* A B *diminuto parte extrema* N B, *hoc est, majores arcu* A N.

Ponamus enim primo perallelarum aliquas transire ab utra-

traque parte centri Z, & sit G H, earum quæ sunt à parte B, centro proxima, vel per ipsum centrum transeat. Itaque tangentes omnes inter G H & B O comprehensæ, ut H K, L M, N O, singulæ suis arcubus minores sunt *. Porro autem & tangens G F, arcu sequente F D minor est *, & similiter tangens E D arcu D A. Itaque tangentes omnes inter B O & C D interjectæ, minores sunt arcubus B H & F A, ac proinde omnino minores arcubus B H, H A, sive arcu B A, quod erat primo ostendendum.

* Prop. 16. huj.

* Prop. 17. huj.

Porro jam demonstrabimus tangentes omnes inter B O & A majores esse arcu A N. Enimvero parallela G H, vel propius centrum Z transit quam parallela E F, quam pono proximam esse earum quæ à parte A transeunt, vel erit remotior, vel æque distabit.

Quod si E F longius à centro vel æque remota est ac G H, erit tangens F G major arcu suo F H, & reliquæ tangentes versus A, nimirum E D, C A majores singulæ arcubus suis *; adeo ut omnes simul G F, E D, C A majores sint arcu H A. sed & arcu H L major erit tangens L M *, & arcu L N tangens N O; itaque tangentes omnes, præter H K, majores simul erunt arcu A N; multoque magis, accedente ipsa H K, tangentes omnes inter A & B comprehensæ arcu eodem A N majores erunt.

* Prop. 18. huj.

* Prop. 19. huj.

Si vero G H à centro longius distat quam E F, erit tangens K H major arcu H F *, & tangens M L ut ante major arcu L H, & tangens O N major arcu N L, & omnes proinde tangentes O N, M L, K H majores arcu N F. Sed & tangens E D major est arcu suo F D *, & tangens C A major similiter arcu suo D A. Itaque tangentes omnes inter B O & A, præter G F, majores erunt arcu N A; multoque magis tangentes eædem, accedente G F, hoc est, omnes quæ inter B O & A interjiciuntur, eodem arcu N A majores erunt.

* Prop. 19. huj.

* Prop. 18. huj.

Ex his vero etiam demonstratio manifesta est in casibus aliis, qualiscunque semicircumferentiæ arcus accipiatur, quippe cum vel eadem sit ubique, vel pars tantum præcedentis demonstrationis.

PROPOSITIO XXI.

SI mobile descendat continuato motu per quælibet plana inclinata contigua, ac rursus ex pari altitudine descendat per plana totidem contigua, ita comparata ut singula altitudine respondeant singulis priorum planorum, sed majori quam illa sint inclinatione. Dico tempus descensus per minus inclinata, brevius esse tempore descensus per magis inclinata.

TAB. IX. Fig. 1.

Sint series duæ planorum inter easdem parallelas horizontales comprehensæ A B C D E, F G H K L, atque ita ut bina quæque sibi correspondentia plana utriusque seriei iisdem parallelis horizontalibus includantur; unumquodque vero seriei F G H K L magis inclinatum sit ad horizontem quam planum sibi altitudine respondens seriei A B C D E. Dico breviori tempore absolvi descensum per A B C D E, quam per F G H K L.

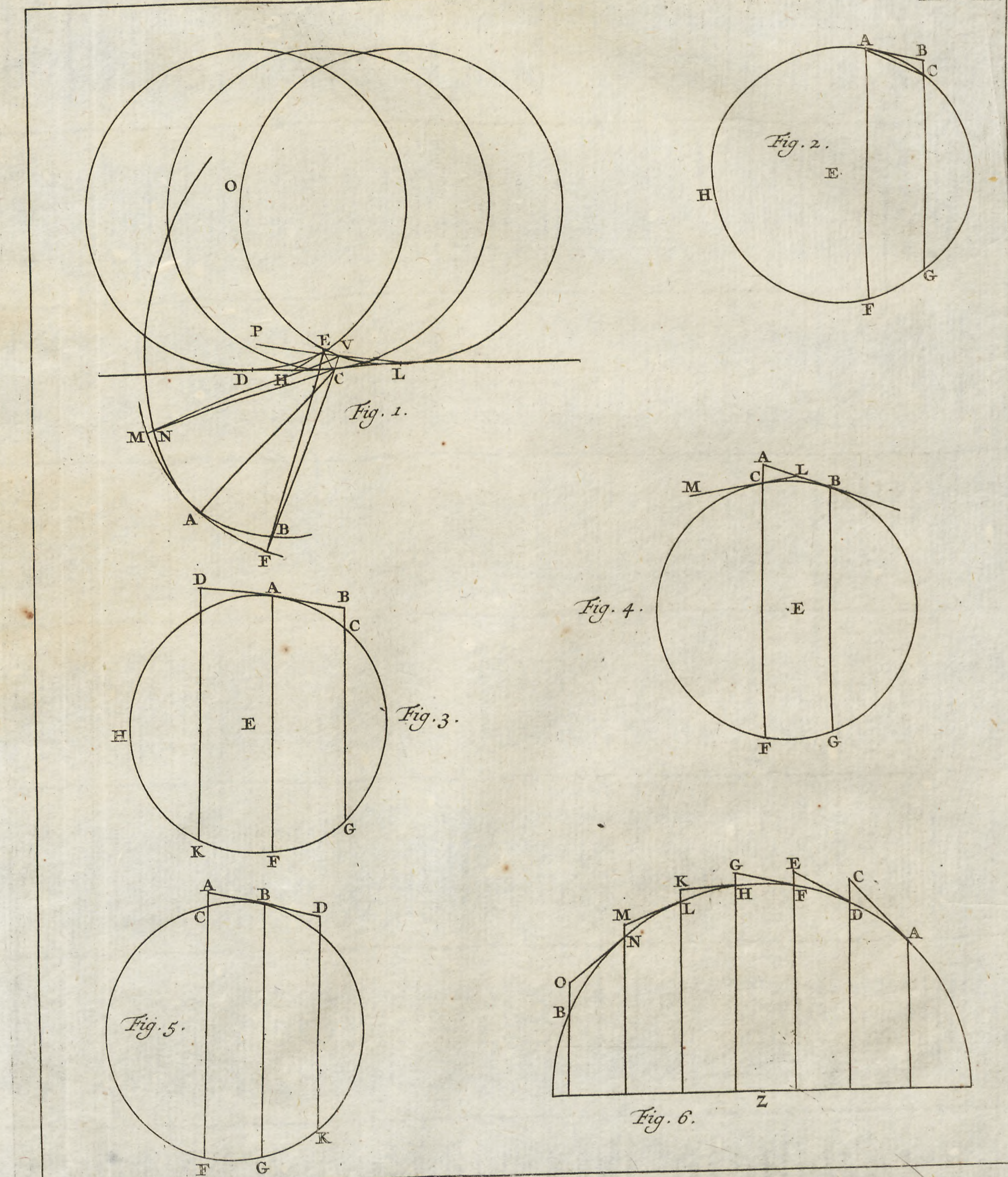
Nam primo quidem tempus descensus per A B, brevius esse constat tempore descensus per F G, quum sit eadem ratio horum temporum quæ rectarum A B ad F G*, sitque A B minor quam F G, propter minorem inclinationem. Producantur jam sursum rectæ C B, H G, occurrantque horizontali A F in M & N. Itaque tempus per B C post A B, æquale est tempori per eandem B C post M B, cum in puncto B eadem celeritas contingat, sive per A B, sive per M B descendenti*. similiterque tempus per G H post F G, æquale erit tempori per eandem G H post N G. Est autem tempus per B C post M B ad tempus per G H post N G, ut B C ad G H longitudine, sive ut C M ad H N, cum hanc rationem habeant & tempora per totas M C, N H, & per partes M B, N G*, ideoque etiam tempora reliqua. Estque B C, minor quam G H propter minorem inclinationem. Patet igitur tempus per B C post M B sive post

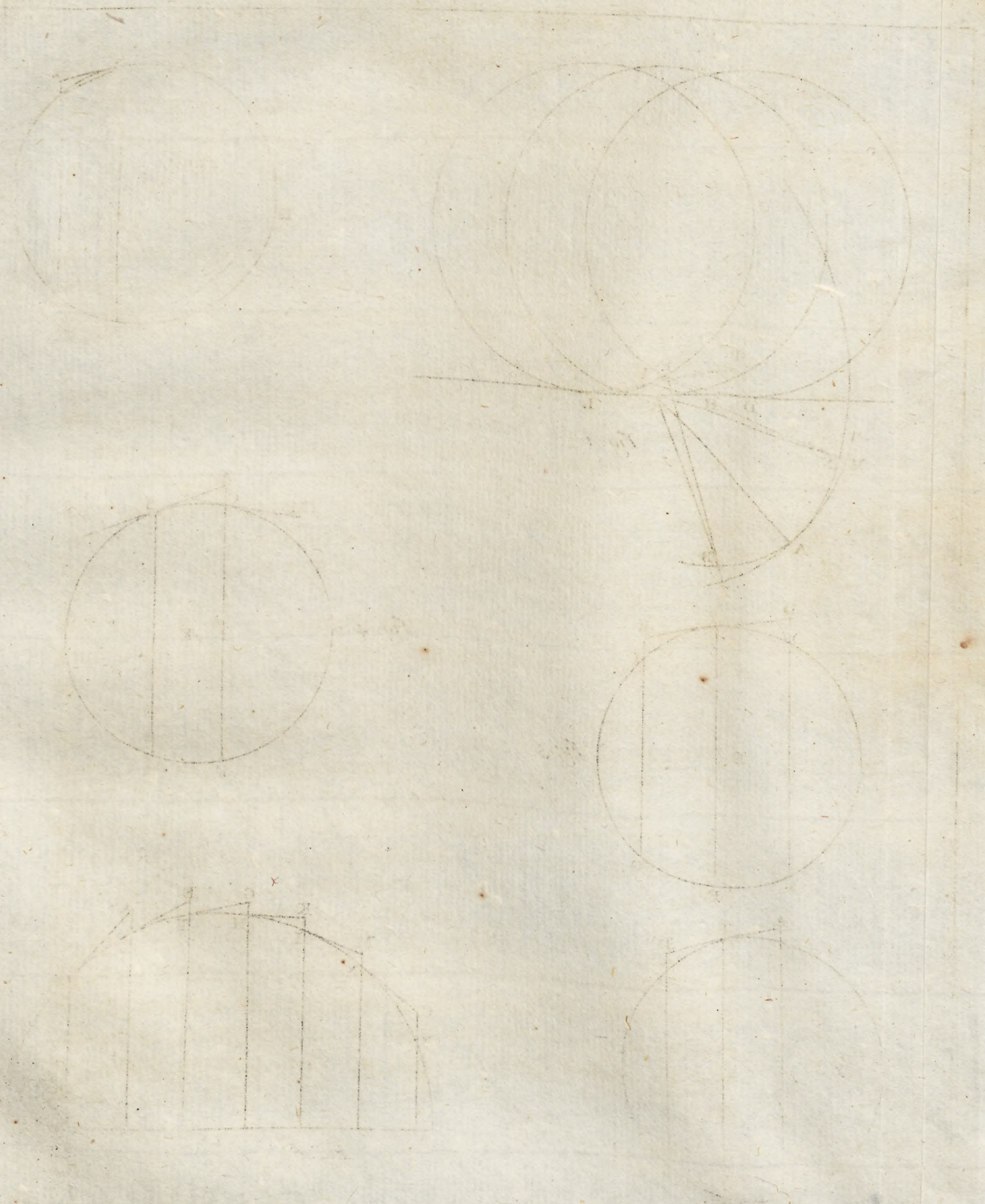
* Prop. 7. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 7. huj.

A B,


Fig. 1.
O
P
E V
D H C L
M N
A
B
F
Fig. 2.
A B C
H E
G
F
Fig. 3.
D A B
C
H E
K F G
Fig. 4.
A L
M C B
E
F G
Fig. 5.
A B D
C
K
F G
Fig. 6.
G E C
K H F
M L D
N A
O
B
Z



A B, brevius esse tempore per G H post N G sive post F G. Similiter ostendetur, productis D C, K H sursum, donec occurrant horizontali A F in O & P, tempus per C D post A B C, sive post O C, brevius esse tempore per H K post F G H sive post P H. Ac denique tempus per D E post A B C D, brevius esse tempore per K L post F G H K. Quare totum tempus descensus per A B C D E, brevius erit tempore per F G H K L. quod erat demonstrandum.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

Hinc vero manifestum est, considerando curvas lineas tanquam ex innumeris rectis compositas, si fuerint duæ superficies, secundum lineas curvas ejusdem altitudinis inclinatæ, quarum in punctis quibuslibet æque altis major semper sit inclinatio unius quam reliquæ, etiam tempore breviori per minus inclinatam grave descensurum quam per magis inclinatam.

Velut si sint duæ superficies inclinatæ secundum curvas A B, C D, æqualis altitudinis, quarumque in punctis æque altis quibuslibet E, F, major sit inclinatio ipsius C D quam A B, hoc est, ut recta tangens curvam C D in F, magis inclinata sit ad horizontem, quam quæ curvam A B tangit in puncto E. erit tempus descensus per A B brevius quam per C D.

TAB. IX. Fig. 2.

Idemque continget si altera linearum recta fuerit: dummodo inclinatio rectæ, quæ ubique est eadem, major minorve fuerit inclinatione curvæ in quolibet sui puncto.

PROPOSITIO XXII.

SI in Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus stat, vertice deorsum spectante, duæ portiones curvæ æqualis altitudinis accipiantur, sed quarum altera propior sit vertici; erit tempus descensus per superiorem, brevius tempore per inferiorem.

Sit Cyclois A B, cujus axis A C ad perpendiculum erectus, vertex A deorsum spectet; & accipiantur in ea por-

TAB. IX. Fig. 3.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

tiones B D & E F, æqualis altitudinis, hoc eſt, ejusmodi ut parallelæ horizontales B C, D H, quæ ſuperiorem portionem B D includunt, æque inter ſe diſtent ac E G, F K, inferiorem partionem E F includentes. Dico tempus deſcenſus per curvam B D brevius fore tempore per E F.

Sumatur enim in B D punctum quodlibet L, & in E F punctum M, ita ut eadem ſit altitudo E ſupra M quæ B ſupra L. Et deſcripto ſuper axe A C ſemicirculo, occurrant ei rectæ horizontales L N, M O, in N & O, & jungantur N A, O A. Itaque quum punctum N ſit altius puncto O, manifeſtum eſt rectam N A minus ad horizontem inclinari quam O A. Eſt autem ipſi N A parallela tangens curvæ in L puncto *, & ipſi O A parallela tangens curvæ in M. Ergo curva B D in puncto L minus inclinata eſt quam curva E F in puncto M. Quod ſi igitur portio E F, invariata inclinatione, altius extolli intelligatur velut in *e f*, ita ut inter eaſdem parallelas cum portione B D comprehendatur, invenietur punctum M in *m*, æquali altitudine cum puncto L: eritque etiam inclinatio curvæ *e f* in puncto *m*, quæ eadem eſt inclinationi curvæ E F in M, major inclinatione curvæ B D in L. Similiter vero, & in quolibet alio puncto curvæ *e f*, major oſtendetur inclinatio quam curvæ B D in puncto æque alto. Itaque tempus deſcenſus per B D brevius erit tempore per *e f* *, ſive, quod idem eſt, per E F, quod erat demonſtrandum.

* Prop. 15. huj.

* Prop. præced.

L E M M A.

TAB. IX. Fig. 4.

Esto circulus diametro A C, *quem ſecet ad angulos rectos* D E, *& à termino diametri* A *educta recta* A B *occurrat circumferentiæ in* B, *ipſi vero* D E *in* F. *Dico tres haſce*, A B, A D, A F, *proportionales eſſe.*

Sit enim primo interſectio F intra circulum; & arcui B D recta ſubtenſa ducatur. Quia igitur arcus æquales ſunt A E, A D,

A D, erunt anguli ad circumferentiam ipsis insistentes, E D A, A B D æquales. Itaque in triangulis A B D, A D F, æquales anguli A B D, A D F. Communis autem utrique est angulus ad A. Ergo dicti trianguli similes erunt, ideoque B A ad A D ut A D ad A F.

Sit jam punctum intersectionis *f* extra circulum, & ducatur *b* H parallela D E, quæ occurrat rectæ A D in H. Itaque secundum jam demonstrata erit ut D A ad A *b*, ita A *b* ad A H, hoc est, ita A *f* ad A D: Ideoque rursus proportionales erunt A *f*, A D, A *b*. Quare constat propositum.

PROPOSITIO XXIII.

TAB. IX. Fig. 5.

Sit Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorsum conversus sit, axe* A D *ad perpendiculum erecto; sumptoque in ea quolibet puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B I *quæ Cycloidem tangat, terminetur-que recta horizontali* A I. *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & divisa bifariam* F A *in* X, *super ea describatur semicirculus* F H A. *Ductâ deinde per punctum quodlibet* G *in curva* B A *sumptum, rectâ* Σ G *parallelâ* B F, *quæ circumferentiæ* F H A *occurrat in* H, *axi* A D *in* Σ, *intelligantur per puncta* G *&* H *rectæ tangentes utriusque curvæ, earumque tangentium partes iisdem duabus horizontalibus* M S, N T *interceptæ sint* M N, S T. *Iisdemque rectis* M S, N T *includantur tangentis* B I *pars* O P, *& axis* D A *pars* Q R.

Quibus ita se habentibus, dico tempus quo grave percurret rectam M N, *celeritate æquabili quan-*

DE MOTU IN CYCLOIDE.

quanta acquiritur descendendo per arcum Cycloidis B G, fore ad tempus quo percurretur recta O P, celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur descendendo per totam tangentem B I, *sicut est tangens* S T *ad partem axis* Q R.

Describatur enim super axe A D semicirculus D V A secans rectam B F in V, & Σ G in Φ, & jungatur A V secans rectas O Q, P R, G Σ in E K & Λ. Jungantur item H F, H A, H X & A Φ; quæ postrema secet rectas O Q, P R in punctis Δ & Π.

Habet ergo dictum tempus per M N ad tempus per O P, rationem eam quæ componitur ex ratione ipsarum linearum M N ad O P, & ex ratione celeritatum quibus ipsæ percurruntur, contrarie sumpta *, hoc est, & ex ratione dimidiæ celeritatis ex B I sive ex F A, ad celeritatem ex B G, sive ex F Σ *. Atqui tota celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ, est in subduplicata ratione longitudinum F A ad F Σ *, ac proinde eadem quæ F A ad F H Ergo dimidia celeritas ex F A ad celeritatem ex F Σ erit ut F X ad F H. Itaque tempus dictum per M N ad tempus per O P habebit rationem compositam ex rationibus M N ad O P, & F X ad F H. Harum vero prior ratio, nempe M N ad O P, eadem ostendetur quæ F H ad H Σ.

* Prop. 5. Galil. de motu æquab.
* Prop. 8. huj.
* Prop. 3. huj.

Est enim tangens Cycloidis B I parallela rectæ V A, similiterque tangens M G N parallela rectæ Φ A; ac proinde recta M N æqualis Δ Π, & O P æqualis E K. Ergo dicta ratio rectæ M N ad O P eadem est quæ Δ Π ad E K; hoc est, Δ A ad E A; hoc est, Φ A ad Λ A; hoc est V A ad Φ A *. Est autem ut V A ad A Φ ita F A ad A H; nam quia quadratum V A æquale est rectangulo D A F, & quadratum A Φ æquale rectangulo D A Σ, quæ rectangula sunt inter se ut F A ad Σ A, hoc est ut quadratum F A ad quadratum A H, erit proinde & quadratum V A ad quadratum Φ A ut quadratum F A ad quadratum A H; atque etiam

* Lemma præced.

etiam V A ad A Φ longitudine, ut F A ad A H. Ratio itaque M N ad O P, eadem erit quæ F A ad A H, hoc est, propter triangula similia F A H, F H Σ, eadem quæ F H ad H Σ, ut dictum fuit. Itaque dicta ratio temporis per M N ad tempus per O P, componitur ex rationibus F X ad F H & F H ad H Σ, ideoque eadem erit quæ F X sive X H ad H Σ. Sicut autem radius X H ad H Σ, ita est tangens S T ad rectam Q R; hoc enim facile perspicitur. Igitur tempus motus qualem diximus per M N, ad tempus per O P constat esse sicut S T ad Q R. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXIV.

Sit rursus ut in præcedenti propositione Cyclois A B C, *cujus vertex* A *deorsum spectet, axis* A D *ad horizontem erectus sit; & sumpto in ea quovis puncto* B, *ducatur inde deorsum recta* B Θ *quæ Cycloidem tangat, occurratque rectæ horizontali* A Θ *in* Θ: *recta vero* B F *ad axem perpendicularis agatur, & super* F A *describatur semicirculus* F H A. *Deinde alia recta* G E, *parallela* F B, *secet Cycloidem in* E, *rectam* B Θ *in* I, *circumferentiam* F H A *in* H, *& denique axem* D A *in* G.

Tab. X. Fig. 1.

Dico tempus descensus per arcum Cycloidis B E, *esse ad tempus per tangentem* B I *cum celeritate dimidia ex* B Θ, *sicut arcus* F H *ad rectam* F G.

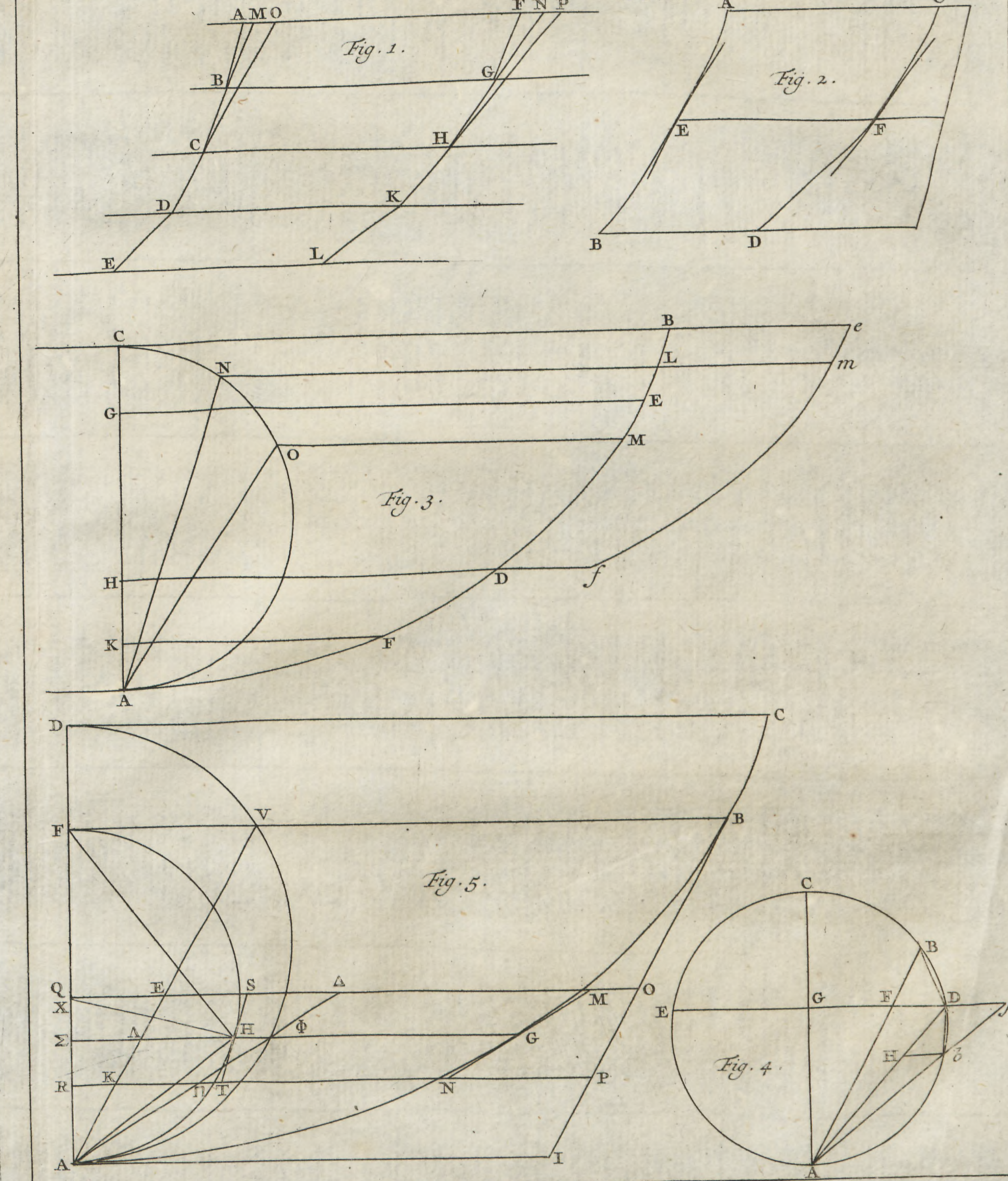
Si enim hoc verum non est, habebit tempus per arcum B E ad dictum tempus per B I, vel majorem rationem quam arcus F H ad rectam F G vel minorem. Habeat primo, si fieri potest, majorem.

Itaque tempus aliquod brevius tempore per B E (sit hoc tempus Z) erit ad dictum tempus per B I ut arcus F H ad rectam F G. Quod si jam in Cycloide supra punctum B sumatur punctum aliud N, erit tempus per B E post N B, brevius tempore per B E. Manifestum est autem punctum N tam propinquum sumi posse ipsi B, ut differentia eorum temporum sit quamlibet exigua, ac proinde ut minor sit ea qua tempus Z superatur à tempore per B E. Sit itaque punctum N ita sumptum. unde quidem tempus per B E post N B majus erit tempore Z, majoremque proinde rationem habebit ad tempus dictum per B I cum dimidia celeritate ex B Θ, quam arcus F H ad rectam F G. Habeat itaque eam quam arcus F H O ad rectam F G.

Dividatur F G in partes æquales F P, P Q, &c. quarum unaquæque minor sit altitudine lineæ N B, atque item altitudine arcus H O; hoc enim fieri posse manifestum est; & à punctis divisionum agantur rectæ, basi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ P Λ, Q Ξ, &c. Quibusque in punctis hæ secant circumferentiam F H, ab iis, itemque à puncto H, tangentes sursum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut Δ X, Γ Σ &c. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ Cycloidi occurrunt, tangentes sursum ducantur velut S V, T M &c. additâ vero ad rectam F G parte una G R æquali iis quæ ex divisione; ductâque R Φ parallelâ similiter ipsi D C, patet eam occurrere circumferentiæ F H A inter H & O, quia G R minor est altitudine puncti H supra O. Jam vero sic porro argumentabimur.

Tempus per tangentem V S cum celeritate æquabili quæ acquireretur ex B S, majus est tempore motus continue accelerati per arcum B S post N B. Nam celeritas ex B S minor est celeritate ex N B, propterea quod minor altitudo B S quam N B. At celeritas ex B S æquabiliter continuari ponitur per tangentem V S, cum celeritas acquisita ex N B continue porro acceleretur per arcum B S, qui arcus minor in-

TAB. IX.



insuper est tangente V S, omnibusque partibus suis magis erectus quam ulla pars tangentis V S. Adeo ut omnino majus sit futurum tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, tempore per arcum B S post N B. Similiter tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, majus erit tempore per arcum S T post N S, & tempus per tangentem Π Y cum celeritate ex B Y, majus tempore per arcum T Y post N T. Atque ita tempora motuum æquabilium per tangentes omnes usque ad infimam quæ tangit cycloidem in E, cum celeritatibus per singulas quantæ acquiruntur cadendo ex B adusque punctum ipsarum contactus, majora simul erunt tempore per arcum B E post N B. Eadem vero & minora essent, ut nunc ostendemus.

DE MOTU IN CYCLOIDE.

Considerentur enim denuo tempora eadem motuum æquabilium per tangentes cycloidis. Et est quidem tempus per tangentem V S cum celeritate ex B S, ad tempus per rectam B Λ cum celeritate dimidia ex F Λ, ut tangens circumferentiæ Δ X ad partem axis F P *. Similiterque tempus per tangentem M T, cum celeritate ex B T, ad tempus per rectam Λ Ξ cum eadem dimidia celeritate ex F Λ, ut tangens Γ Σ ad rectam P Q. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supradictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ B I cum celeritate dimidia ex B Θ, sicut tangentes circumferentiæ F H, iisdem parallelis comprehensæ, ad partes rectæ F G ipsis respondentes.

* Prop. præced.

Sunt igitur quantitates quædam rectæ F P, P Q, &c. & totidem aliæ, tempora scilicet quibus percurruntur rectæ B Λ, Λ Ξ &c, motu æquabili cum celeritate dimidia ex B Θ; Et unaquæque quantitas in prioribus ad sequentem eadem proportione refertur, qua unaquæque posteriorum ad suam sequentem; sunt enim utrobique inter se æquales. Quibus autem proportionibus priores quantitates ad alias quasdam, nempe ad tangentes circuli Δ X, Γ Σ, &c, referuntur, iisdem proportionibus & eodem ordine posteriores quoque referuntur ad alias quasdam, nempe ad tempora motus

qualem diximus per tangentes cycloidis V S, M T &c. Ergo, ſicut ſe habent omnes ſimul priores ad omnes eas ad quas ipſæ referuntur, hoc eſt, ſicut tota F G ad tangentes omnes X Δ, Γ Σ, &c. ita tempus quo percurritur tota B I cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis V S, M T, &c *. Et invertendo itaque, tempora motuum dictorum per tangentes cycloidis, ad tempus per rectam B I cum celeritate dimidia ex B Θ, eandem rationem habebunt quam dictæ tangentes omnes circumferentiæ F H ad rectam F G; ac minorem proinde quam arcus F O ad rectam eandem F G; quia arcus F Φ, ideoque omnino & arcus F O major eſt dictis omnibus arcus F H tangentibus *. Atqui tempus per B E poſt N B, ad tempus per B I cum celeritate dimidia ex B Θ, poſuimus eſſe ut arcus F O ad rectam F G. Ergo dicta tempora omnia per tangentes cycloidis minora ſimul erunt tempore per B E poſt N B, cum antea majora eſſe oſtenſum ſit; quod eſt abſurdum. Itaque tempus per arcum cycloidis B E, ad tempus per tangentem B I, cum celeritate dimidia ex B Θ vel ex F A, non habet majorem rationem quam arcus circumferentiæ F H ad rectam F G.

* Prop. 2. Archimedis de Sphæroid. & Conoid.

* Prop. 20. huj.

Habeat jam, ſi poteſt, minorem. Ergo tempus aliquod majus tempore per arcum B E, (ſit hoc tempus Z) erit ad tempus dictum per B I, ut arcus F H ad rectam F G.

TAB. X. Fig. 2.

Quod ſi jam ſumatur arcus N M æqualis altitudine cum arcu B E, ſed cujus terminus ſuperior N ſit humilior puncto B, erit tempus per arcum N M majus tempore per arcum B E *. Manifeſtum autem quod punctum N tam propinquum ſumi poteſt puncto B, ut differentia dictorum temporum ſit quamlibet exigua, ac proinde minor ea qua tempus Z ſuperat tempus per arcum B E. Sit itaque punctum N ita ſumptum. Unde quidem tempus per N M minus erit tempore Z, habebitque proinde ad dictum tempus per B I, cum dimidia celeritate ex B Θ, minorem rationem quam arcus F H ad rectam F G. Habeat ergo eam quam arcus L H ad rectam F G.

* Prop. 22. huj.

Dividatur jam F G in partes æquales F P, P Q, &c. qua-

quarum unaquæque minor ſit arcus cycloidis B N altitudine, itemque minor altitudine arcus circumferentiæ F L; & additâ ad F G unâ earum partium G ζ, ducantur à punctis diviſionum rectæ baſi D C parallelæ, & ad tangentem B Θ terminatæ, P O, Q K, &c; itemque à puncto ζ recta ζ Ω quæ ſecet cycloidem in V, circumferentiam in η; quibusque in punctis ductæ parallelæ ſecant circumferentiam F H, ab iis tangentes deorſum ducantur usque ad proximam quæque parallelam, velut θ Δ, Γ Σ: Quarum infima à puncto H ducta occurrat rectæ ζ Ω in X. Similiter vero & à punctis, in quibus dictæ parallelæ occurrunt cycloidi, ducantur totidem tangentes deorſum, velut S Λ, T Ξ, &c. quarum infima, tangens nempe à puncto E ducta, occurrat rectæ ζ Ω in R.

De motu in Cycloide.

Quia igitur P ζ æqualis eſt F G altitudini arcus B E, cui æqualis eſt ex conſtructione altitudo arcus N M, erit & P ζ æqualis altitudini arcus N M. Eſt autem recta P O ex conſtructione ſuperior termino N. Ergo & ζ Ω, & in ea punctum V, ſuperius termino M. Quare, cum arcus S V æqualis ſit altitudinis cum arcu N M, ſed termino S ſublimiore quam N, erit tempus per S V brevius tempore per N M *.

* Prop. 22. huj.

Atqui tempus per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, brevius eſt tempore deſcenſus accelerati per arcum S T, incipientis in S. Nam celeritas ex B S, qua tota S Λ transmiſſa ponitur, æqualis eſt celeritati ex S T *, quæ motui per arcum S T in fine demum acquiritur; ipſaque S Λ minor eſt quam S T. Similiter tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, brevius eſt tempore deſcenſus accelerati per arcum T Y poſt S T; quum celeritas ex B T, qua tota T Ξ transmiſſa ponitur, ſit æqualis celeritati ex S Y, quæ in fine demum acquiritur motui dicto per arcum T Y poſt S T; ipſaque T Ξ minor ſit arcu T Y. Atque ita tempora omnia motuum æquabilium per tangentes cycloidis, cum celeritatibus per ſingulas quantæ acquiruntur deſcendendo ex B usque ad punctum ipſarum contactus, breviora ſimul erunt tempore deſcenſus accelerati

* Prop. 8. huj.

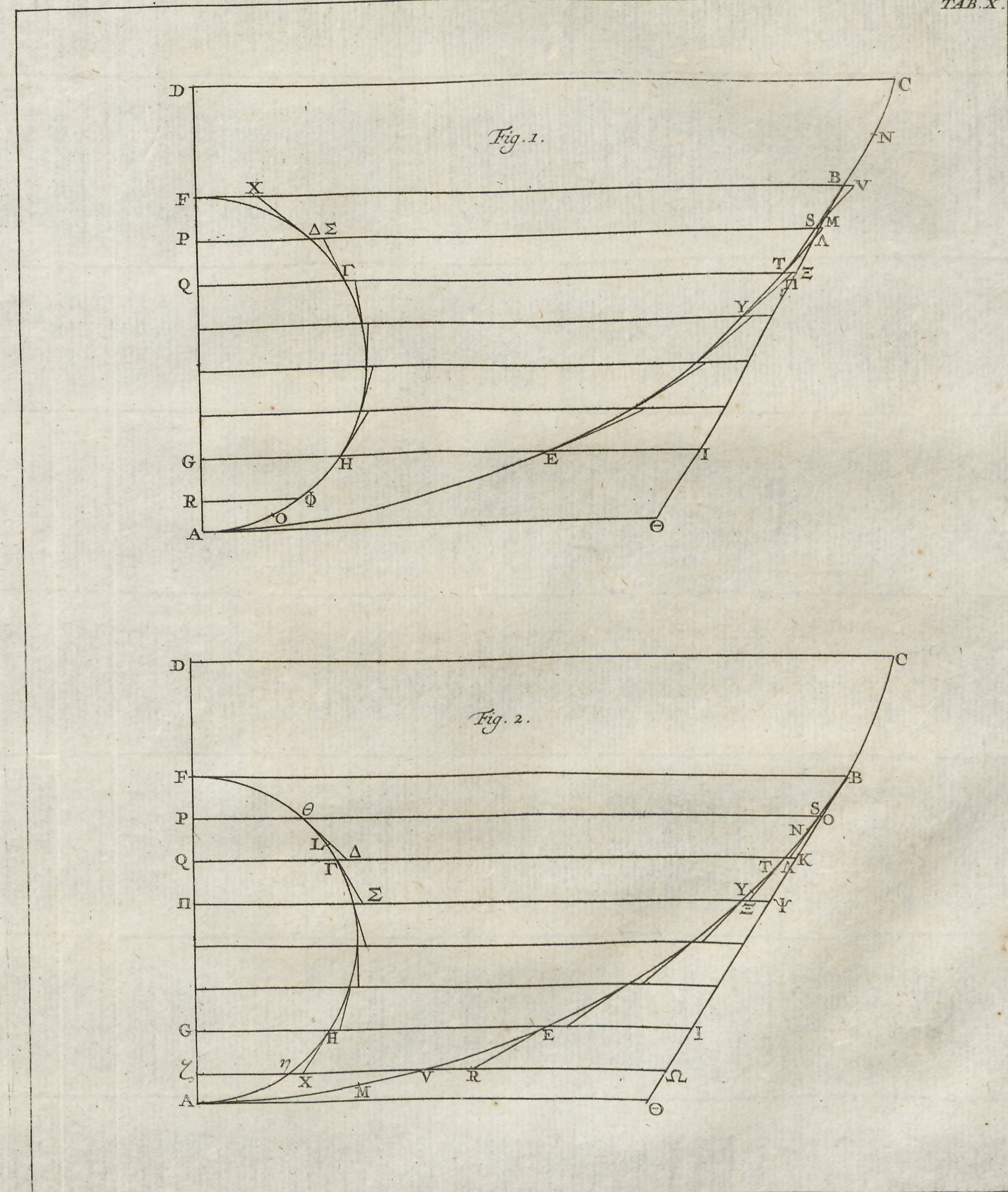
per arcum S V. Eadem vero & longiora essent, ut nunc ostendemus.

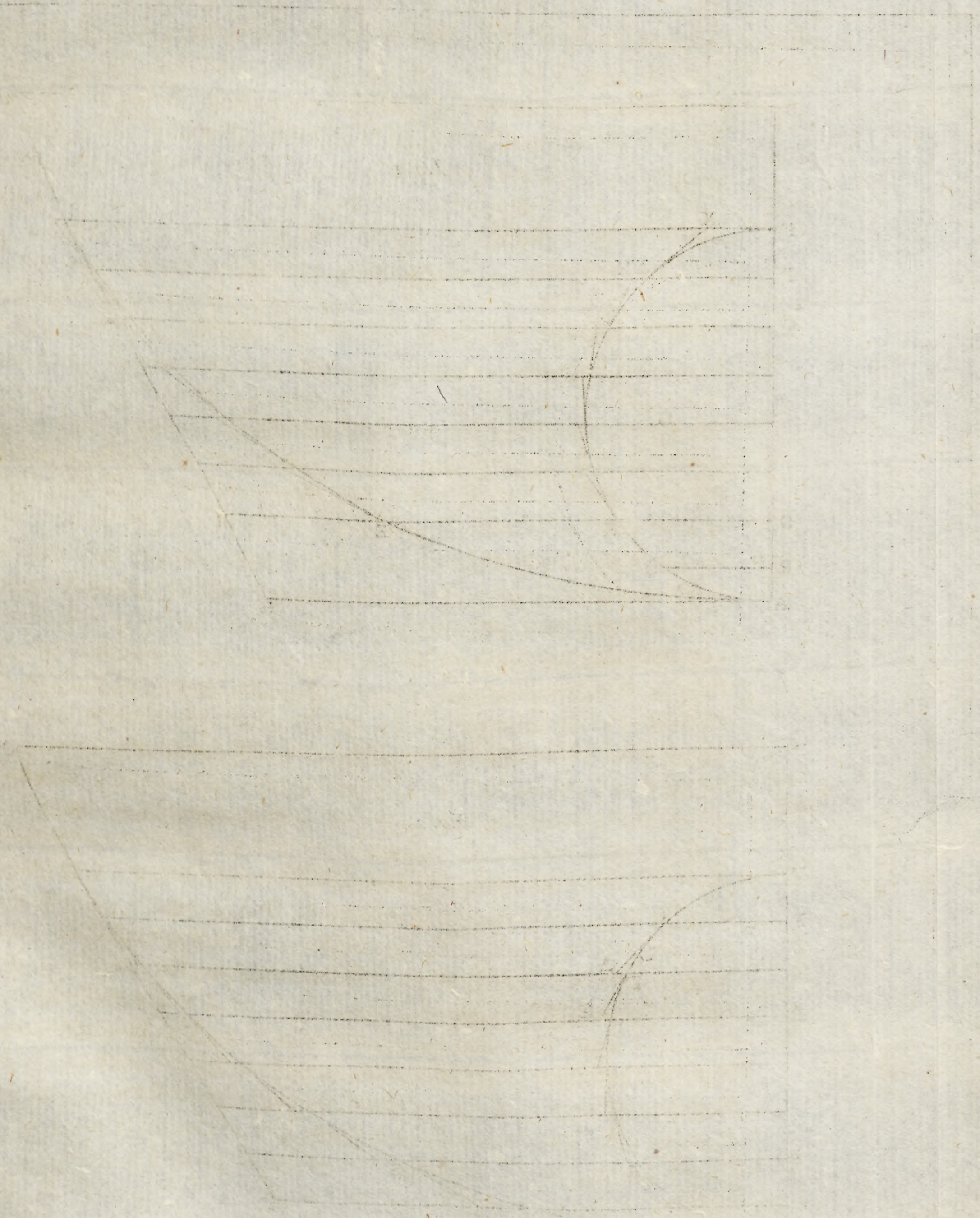
Est enim tempus dictum per tangentem S Λ, cum celeritate æquabili ex B S, ad tempus per rectam O K cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, sicut tangens semicirculi θ Δ ad rectam P Q*. similiterque tempus per tangentem T Ξ, cum celeritate æquabili ex B T, est ad tempus per rectam K Ψ cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, ut tangens Γ Σ ad rectam Q Π. Atque ita deinceps singula tempora per tangentes cycloidis, quæ sunt eadem supra dictis, erunt ad tempora motus æquabilis per partes sibi respondentes rectæ O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ut tangentes circumferentiæ θ η, iisdem parallelis inclusæ, ad partes rectæ P ζ ipsis respondentes. Unde, ut in priori parte demonstrationis, concludetur omnes simul rectas P Q, Q Π &c. hoc est, totam P ζ esse ad omnes simul tangentes θ Δ, Γ Σ, &c. sicut tempus quo percurritur tota O Ω, cum celeritate dimidia ex B Θ, ad tempora omnia motuum quales diximus per tangentes cycloidis S Λ, T Ξ, &c. Quare & convertendo, tempora omnia per tangentes cycloidis, eam rationem habebunt ad tempus dictum motus æquabilis per rectam O Ω, sive per B I, quam dictæ tangentes omnes arcus θ η ad rectam P ζ vel F G, ac proinde majorem quam arcus L H ad rectam F G; est enim arcus θ H, adeoque etiam omnino arcus L H, minor dictis tangentibus arcus θ η*. Sed tempus per N M posuimus ab initio ad idem tempus per B I se habere ut arcus L H ad rectam F G. Ergo tempus per N M, multoque magis tempus per S V, minus erit tempore per tangentes cycloidis. Quod est absurdum, cum hoc tempus, illo per arcum S V, antea minus ostensum fuerit. Patet igitur tempus per arcum cycloidis B E ad tempus per tangentem B I cum celeritate æquabili dimidia ex B Θ, non minorem rationem habere quam arcus F H ad rectam F G. Sed nec majorem habere ostensum fuit. Ergo eandem habeat necesse est. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

* Prop. 20. huj.

PRO-


Fig. 1.
D
C
N
F
X
B
V
P
Δ Σ
S
M
Λ
Q
Γ
T
Ξ
Π
Υ
G
H
E
I
R
Φ
O
A
Θ
Fig. 2.
D
C
F
B
P
θ
S
O
L
Δ
N
Q
Γ
T
Λ
K
Π
Σ
Υ
Ξ
Ψ
G
H
E
I
ζ
η
X
V
R
Ω
A
M
Θ



PROPOSITIO XXV.

De motu in Cycloide.

IN Cycloide cujus axis ad perpendiculum erectus est, vertice deorsum spectante, tempora descensus quibus mobile, à quocunque in ea puncto dimissum, ad punctum imum verticis pervenit, sunt inter se æqualia; habentque ad tempus casus perpendicularis per totum axem cycloidis eam rationem, quam semicircumferentia circuli ad diametrum.

Esto cyclois A B C cujus vertex A deorsum spectet, axis vero A D ad perpendiculum erectus sit, & à puncto quovis in cycloide sumpto, velut B; descendat mobile impetu naturali per arcum B A, sive per superficiem ita inflexam. Dico tempus descensus hujus esse ad tempus casus per axem D A, sicut semicircumferentia circuli ad diametrum. Quo demonstrato, etiam tempora descensus, per quoslibet cycloidis arcus ad A terminatos, inter se æqualia esse constabit.

TAB. XI. Fig. 1.

Describatur super axe D A semicirculus, cujus circumferentiam secet recta B F, basi D C parallela, in E; junctàque E A, ducatur ei parallela B G, quæ quidem cycloidem tanget in B. Eadem vero occurrat rectæ horizontali per A ductæ in G: sitque etiam super F A descriptus semicirculus F H A.

Est igitur, per præcedentem, tempus descensus per arcum cycloidis B A, ad tempus motus æquabilis per rectam B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus semicirculi F H A ad rectam F A. Tempus vero dicti motus æquabilis per B G, æquatur tempori descensus naturaliter accelerati per eandem B G, sive per E A, quæ ipsi parallela est & æqualis, hoc est, tempori descensus accelerati per axem D A*. Itaque tempus per arcum B A, erit quoque ad tempus descensus per axem D A, ut semicirculi circumferentia F H A ad diametrum F A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. Galil. de motu Accel.

Quod

DE MOTU IN CYCLOIDE.

Quod si tota cycloidis cavitas perfecta ponatur, constat mobile, postquam per arcum B A descenderit, inde continuato motu per alterum ipsi æqualem arcum ascensurum *, atque in eo tantundem temporis atque descendendo consumpturum *. Deinde rursus per A ad B perventurum, ac singularum ejusmodi reciprocationum, in magnis parvisve cycloidis arcubus peractarum, tempora fore ad tempus casus perpendicularis per axem D A, sicut circumferentia circuli tota ad diametrum suam.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XXVI.

TAB. XI. Fig. 1.

Iisdem positis, si ducatur insuper recta horizontalis H I *quæ arcum* B A *secet in* I, *circumferentiam vero* F H A *in* H: *dico tempus per arcum* B I, *ad tempus per arcum* I A *post* B I, *eam rationem habere quam arcus circumferentiæ* F H *ad* H A.

Occurrat enim recta H I tangenti B G in K, axi D A in L. Est itaque tempus per arcum B A, ad tempus motus æquabilis per B G cum celeritate dimidia ex B G, sicut arcus F H A ad rectam F A *. Tempus autem dicti motus æquabilis per B G, est ad tempus motus æquabilis per B K, cum eadem celeritate dimidia ex B G, sicut B G ad B K longitudine, hoc est, sicut F A ad F L. Et rursus tempus motus æquabilis, cum dicta celeritate, per B K, ad tempus per arcum B I, sicut F L ad arcum F H *. Igitur ex æquo erit tempus per arcum B A ad tempus per B I, ut arcus F H A ad F H. Et dividendo, & convertendo, tempus per B I, ad tempus per I A post B I, ut arcus F H ad H A. quod erat demonstrandum.

* Prop. 24. huj.

* Prop. 24. huj.

H O-

HOROLOGII OSCILLATORII

De linearum curvarum evolutione.

PARS TERTIA.

De linearum curvarum evolutione & dimensione.

DEFINITIONES.

I.

LINEA *in unam partem inflexa vocetur quam rectæ omnes tangentes ab eadem parte contingunt. Si autem portiones quasdam rectas lineas habuerit, hæ ipsæ productæ pro tangentibus habentur.*

II.

Cum autem duæ hujusmodi lineæ ab eodem puncto egrediuntur, quarum convexitas unius obversa sit ad cavitatem alterius, quales sunt in figura adscripta curvæ A B C, A D E, *ambæ in eandem partem cavæ dicantur.*

TAB. XI. Fig. 2.

III.

Si lineæ, in unam partem cavæ, filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur, & manente una fili extremitate illi affixa, altera extremitas abducatur, ita ut pars ea quæ soluta est semper extensa maneat; manifestum est curvam quandam aliam hac fili extremitate describi. Vocetur autem ea, Descripta ex evolutione.

De linearum curvarum evolutione. TAB. XI. Fig. 2.

I V.

Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta. In figura superiori, A B C *est evoluta,* A D E *descripta ex evolutione* A B C, *ut nempe cum extremitas fili ex* A *venit in* D, *pars fili extensa sit* D B *recta, reliqua parte* B C *adhuc applicata curvæ* A B C. *Manifestum est autem* D B *tangere evolutam in* B.

PROPOSITIO I.

R*Ecta omnis, quæ evolutam tangit, occurret lineæ ex evolutione descriptæ ad angulos rectos.*

TAB. XI. Fig. 3.

Sit A B evoluta, A H vero quæ ex evolutione illius descripta est. Recta autem F D C, tangens curvam A D in D, occurrat in C curvæ A C H. Dico ei occurrere ad angulos rectos: hoc est, si ducatur C E recta perpendicularis C D, dico eam in C tangere curvam A C H. Quia enim D C tangit evolutam in D, apparet ipsam referre positionem fili tunc cum ejus extremitas pervenit in C. Quod si igitur ostenderimus filum, in tota reliqua descriptione curvæ A C H, nusquam pertingere ad rectam C E præterquam in C puncto, manifestum erit rectam C E ibidem curvam A C H contingere.

Sumatur punctum aliquod in A C præter C, quod sit H, sitque primo remotius à principio evolutionis A quam punctum C, & intelligatur pars libera esse H G, cum extremitate sua ad H pervenit. Tangit ergo H G lineam A B in G. Cumque interea dum describitur pars curvæ C H, evolutus sit arcus D G, occurret C D à parte D producta ipsi H G, ut in F. Ponatur autem G H occurrere rectæ C E in E. Quia igitur duæ simul D F, F G, majores sunt quam D G, sive curva ea fuerit sive recta: fiet addendo utrinque rectam D C, ut rectæ C F, F G simul majores sint recta

C D

C D & ipsa D G. Sed propter evolutionem, apparet utrisque simul, rectæ C D, & lineæ D G, æquari rectam H G. Ergo duæ simul C F, F G majores quoque erunt recta H G; & ablata communi F G, erit C F major quam H F. Sed F E major est quam F C, quia angulus C trianguli F C E est rectus. Ergo F E omnino major quam F H. Unde apparet, ab hac quidem parte puncti C, fili extremitatem non pertingere ad rectam C E.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sit jam punctum H propinquius principio evolutionis A quam punctum C, sitque fili positio H G, tunc cum ejus extremitas esset in H, & ducantur rectæ D G, D H, quarum hæc occurrat rectæ C E in E: apparet autem D G rectam non posse esse in directum ipsi H G, adeoque H G D fore triangulum. Jam quia recta D G vel minor est quam D K G, vel eadem, si nempe evolutæ pars D G recta sit; additâ utrique G H, erunt rectæ D G, G H simul minores vel æquales duabus istis, scilicet D K G & G H, sive his æquali rectæ D C. Duabus autem rectis D G, G H minor est recta D H. Ergo hæc minor utique erit rectâ D C. Sed D E major est quam D C, quia in triangulo D C E angulus C est rectus. Ergo D H multo minor quam D E. Situm est ergo punctum H, hoc est extremitas fili G H, intra angulum D C E. Unde apparet neque inter A & C usquam illam pertingere ad rectam C E. Ergo C E tangit curvam A C in C; ac proinde D C, cui C E ducta est perpendicularis, occurrit curvæ ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

TAB. XII. Fig. 1.

Hinc etiam manifestum est curvam A H C in partem unam inflexam esse, & in eandem partem cavam ac ipsa A G B, cujus evolutione descripta est. Omnes enim tangentes lineæ A H C, cadunt extra spatium D G A H C: omnes vero tangentes lineæ A G D, intra dictum spatium. unde liquet cavitatem A H C respicere convexitatem A G D.

De linearum curvarum evolutione.
Tab. XII. Fig. 2.

PROPOSITIO II.

Omnis curva linea terminata, in unam partem cava, ut A B D, *ut potest in tot partes dividi, ut si singulis partibus subtensæ rectæ ducantur, velut* A B, B C, C D; *& à singulis item divisionis punctis, ipsaque curvæ extremitate rectæ ducantur curvam tangentes, ut* A N, B O, C P, *quæ occurrant iis, quæ in proxime sequentibus divisionis punctis curvæ ad angulos rectos insistunt, quales sunt lineæ* B N, C O, D P; *ut inquam subtensa quæque habeat ad sibi adjacentem curvæ perpendicularem, velut* A B *ad* B N, B C *ad* C O, C D *ad* D P, *rationem majorem quavis ratione proposita.*

Sit enim data ratio lineæ E F ad F G, quæ recto angulo ad F jungantur, & ducatur recta G E H.

Intelligatur primo curva A B D in partes tam exiguas secta punctis B, C, ut tangentes quæ ad bina quæque inter se proxima puncta curvam contingunt, occurrant sibi mutuo secundum angulos qui singuli majores sint angulo F E H; quales sunt anguli A K B, B L C, C M D. quod quidem fieri posse evidentius est quam ut demonstratione indigeat. Ductis jam subtensis A B, B C, C D, & erectis curvæ perpendicularibus B N, C O, D P, quæ occurrant productis A K, B L, C M, in N, O, P: dico rationes singulas rectarum, A B ad B N, B C ad C O, C D ad D P, majores esse ratione E F ad F G.

Quia enim angulus A K B major est angulo H E F, erit residuus illius ad duos rectos, nimirum angulus N K B, minor angulo G E F. Angulus autem B trianguli K B N est rectus, sicut & angulus F in triangulo E F G. Ergo ma-

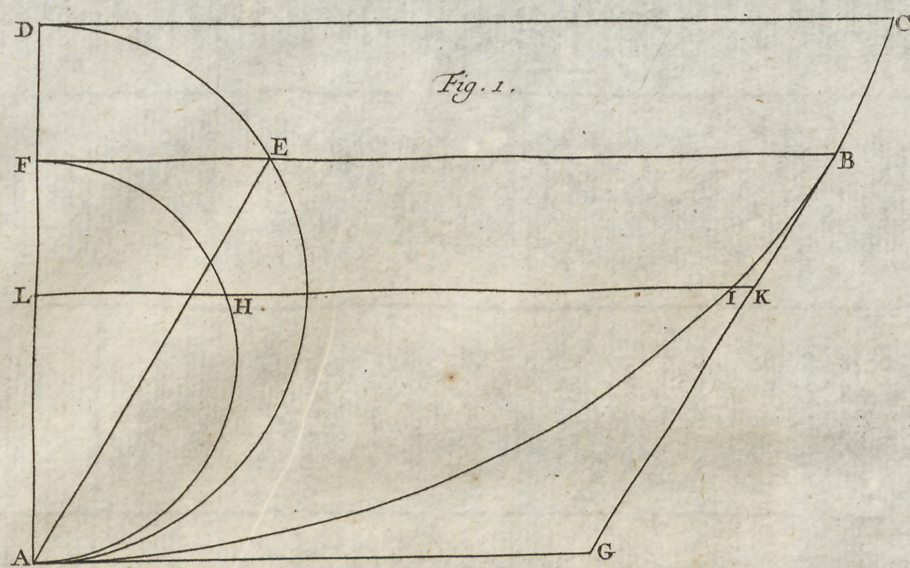


Fig. 1.

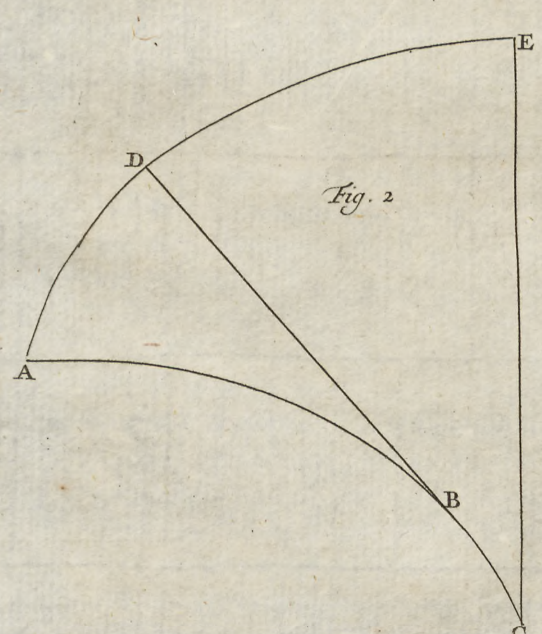


Fig. 2

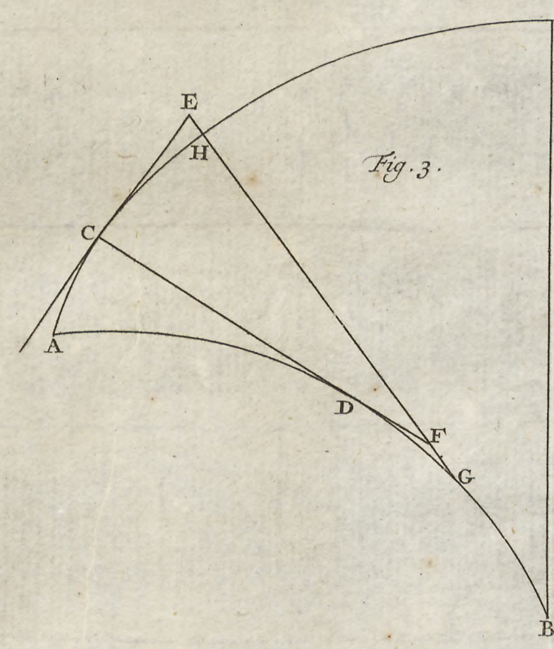


Fig. 3.

major erit ratio K B ad B N quam E F ad F G. Sed A B major est quam K B, quoniam angulus K in triangulo A K B est obtusus, est enim major angulo H E F qui est obtusus ex constructione. Ergo ratio A B ad B N major erit ratione K B ad B N, ac proinde omnino major ratione E F ad F G. Eodem modo & ratio B C ad C O, & C D ad D P, major ostendetur ratione E F ad F G. Itaque constat propositum.

De linearum curvarum evolutione.

PROPOSITIO III.

Duæ curvæ in unam partem inflexæ & in easdem partes cavæ ex eodem puncto egredi nequeunt, ita ad se invicem comparatæ, ut recta omnis quæ alteri earum ad angulos rectos occurrit, similiter occurrat & reliquæ.

Sint enim, si fieri potest, hujusmodi lineæ curvæ A C E, A G K, communem terminum habentes A, & sumpto in exteriore illarum puncto quolibet K, sit inde educta K E recta, curvæ A G K occurrens ad angulos rectos, ac proinde etiam curvæ A C E.

Tab. XIX. Fig. 3.

Potest jam recta quædam sumi major curva K G A, quæ sit Q. Divisa autem intelligatur ipsa K G A, ut in propositione antecedenti dictum fuit, in tot partes punctis H G F, ut subtensæ singulæ K H, H G, G F, F A, ad perpendiculares curvæ sibi contiguas H M, G N, F O, A P majorem rationem habeant quam linea Q ad rectam K E. Itaque & omnes simul dictæ subtensæ ad omnes dictas perpendiculares majorem habebunt rationem quam Q ad K E. Producantur autem perpendiculares eædem & occurrant curvæ A C E in D, C, B, nimirum ad angulos rectos ex hypothesi. Erit jam K E minor quam M D. Etenim, ducta E L ipsi K E perpendiculari, quoniam K E occurrit lineæ curvæ E C A ad angulos rectos, tanget E L curvam A C E, occurretque necessario rectæ M D inter D & M. Unde

 cum

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

cum K E ſit breviſſima omnium quæ cadunt inter parallelas E L, K M, erit ea minor quam M L, ac proinde minor quoque omnino quam M D. Eodem modo & H D minor oſtendetur quam N C, & G C minor quam O B, & F B minor quam P A. Cum ſit ergo P A major quam F B, erunt duæ ſimul P A, O F majores quam O B. Item quum O B ſit major quam G C, erunt duæ ſimul O B, N G, majores quam N C. Sed duæ P A, O F majores erant quam O B. Itaque tres ſimul P A, O F, N G omnino majores erunt quam N C. Rurſus, quia N C major quam H D, erunt duæ ſimul N C, M H majores quam M D. Unde, ſi loco N C ſumantur tres hæ ipſa majores P A, O F, N G, erunt omnino hæ quatuor P A, O F, N G, M H majores quam M D: ac proinde eædem quoque omnino majores recta K E, quia ipſa M D major erat quam K E. Diximus autem ſubtenſas omnes A F, F G, G H, H K majorem rationem habere ad omnes perpendiculares P A, O F, N G, M H, quam linea Q ad K E. Ergo cum dictis perpendicularibus minor etiam ſit K E, habebunt dictæ ſubtenſæ ad K E omnino majorem rationem quam Q ad K E. Ergo ſubtenſæ ſimul ſumptæ majores erunt rectâ Q. Hæc autem ipſa curvâ A G K major ſumpta fuit. Ergo ſubtenſæ A F, F G, G H, H K ſimul majores erunt curva A G K cujus partibus ſubtenduntur; quod eſt abſurdum, cum ſingulæ ſuis arcubus ſint minores. Non igitur poterunt eſſe duæ curvæ lineæ quæ quemadmodum dictum fuit ſeſe habeant. quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

SI ab eodem puncto duæ lineæ exeant in partem unam inflexæ, & in eandem partem cavæ, ita vero mutuo comparatæ ut rectæ omnes, quæ alteram earum contingunt, alteri occurrant ad angulos rectos; poſterior hæc prioris evolutione, à puncto communi cœpta, deſcribetur.

Sun-

Sunto lineæ A B C, A D E, in partem unam inflexæ, & quarum uttraque in easdem partes cava existat, habeantque communem terminum A punctum. Omnes autem rectæ tangentes lineam A B C; velut B D, C E, occurrant lineæ A D E ad angulos rectos. Dico evolutione ipsius A B C, à termino A incepta, describi A D E.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

TAB. XII. Fig. 4.

Si enim fieri potest, describatur dicta evolutione alia quædam curva A F G. Ergo lineæ rectæ quælibet, evolutam A B C tangentes, ut B D, C E, occurrent ipsi A F G ad angulos rectos *, puta in F & G. Sed eædem tangentes etiam ad rectos angulos occurrere ponuntur lineæ A D E. Sunt igitur lineæ curvæ A D E, A F G, eodem puncto A terminatæ, inque partem unam flexæ, & ambæ in eandem partem cavæ, quippe utraque in eandem atque ipsa A B C; nam de linea A D E constat ex hypothesi, de A F G vero ex propositione prima hujus; & omnes quæ uni earum occurrunt ad angulos rectos, etiam alteri similiter occurrunt. quod quidem fieri non posse antea ostensum est *. Quare constat ipsam A D E descriptum iri evolutione lineæ A B C. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. 3. huj.

PROPOSITIO V.

SI Cycloidem recta linea in vertice contingat, super qua, tanquam basi, alia cyclois priori similis & æqualis constituatur, initium sumens à puncto dicti verticis; recta quælibet inferiorem cycloidem tangens, occurret superioris portioni, sibi superpositæ, ad angulos rectos.

Tangat cycloidem A B C in vertice A recta A G, super qua, tanquam basi, similis alia cyclois constituta sit A E F, cujus vertex F. Cycloidem autem A B C tangat recta B K in B. Dico eam productam occurrere cycloidi A E F ad angulos rectos.

TAB. XVI. Fig. 1.

Describatur enim circa A D, axem cycloidis A B C, circulus

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

culus genitor A H D, cui occurrat B H, basi parallela, in H, & jungatur H A. Quia ergo B K tangit cycloidem in B, constat eam parallelam esse rectæ H A *. Itaque A H B K parallelogrammum est, ac proinde A K æqualis H B, hoc est, arcui A H *. Sit porro jam descriptus circulus K M, genitori circulo, hoc est ipsi A H D, æqualis, qui tangat basin A G in K, rectam vero B K productam secet in puncto E. Quia ergo ipsi A H parallela est B K E, ac proinde angulus E K A æqualis K A H, manifestum est B K productam abscindere à circulo K M arcum æqualem ei quem à circulo A H D abscindit recta A H. Itaque arcus K E æqualis est arcui A H, hoc est rectæ H B, hoc est rectæ K A. Hinc vero sequitur, ex cycloidis proprietate, cum circulus genitor M K tangebat regulam in K, punctum describens fuisse in E. Itaque recta K E occurrit cycloidi in E ad angulos rectos *. Est autem K E ipsa B K producta. Ergo patet productam B K occurrere cycloidi ad angulos rectos. quod erat demonstrandum.

* Propos. 15. partis 2.

* Propos. 14. partis 2.

* Propos. 15. partis 2.

PROPOSITIO VI.

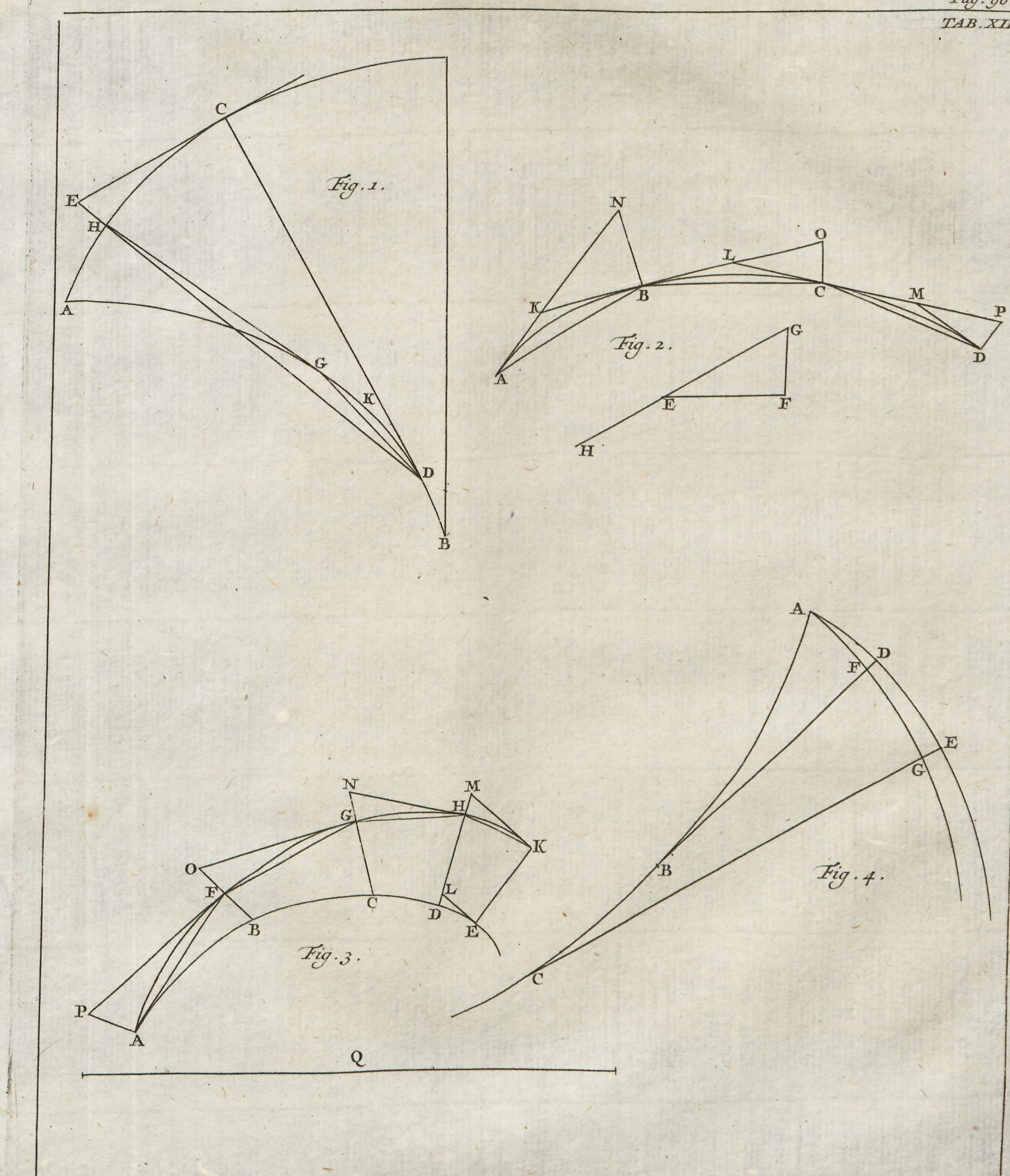
Semicycloidis evolutione, à vertice cœpta, alia semicyclois describitur evolutæ æqualis & similis, cujus basis est in ea recta quæ cycloidem evolutam in vertice contingit.

TAB. XVI. Fig. 1.

Sit semicyclois A B C, cui superimposita sit alia similis A E F, quemadmodum in propositione præcedenti: Dico, si linea flexilis, circa semicycloidem A B C applicata, evolvatur, incipiendo ab A, eam describere extremitate sua ipsam semicycloidem A E F. Quia enim ex puncto A egrediuntur semicycloides A B C, A E F, in unam partem inflexæ, & ambæ in eandem cavæ, ac præterea ita comparatæ, ut omnes tangentes semicycloidis A B C occurrant semicycloidi A E F ad angulos rectos, sequitur hanc evolutione illius, à termino A incepta, describi *. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. hujus.

Et


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.

Et apparet, si dimidiam cycloidem, ipsi A B C gemellam, contrario situ ab altera parte lineæ C G disponamus, velut C N, ejus evolutione, vel etiam dum filum, jam extensum in C F, circa eam replicatur, alteram semicycloidem F N fili extremitate descriptum iri, quæ simul cum priore A E F integram constituat.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Atque ex his, & propositione 25 de descensu gravium, manifestum jam est quod supra in Constructione Horologii de æquabili penduli motu dictum fuit. Patet enim perpendiculum, inter laminas binas, secundum semicycloidem inflexas, suspensum agitatumque, motu suo cycloidis arcum describere, ac proinde æqualibus temporibus quaslibet ejus reciprocationes absolvi. Non refert enim utrum in superficie, secundum cycloidem curvata, mobile feratur, an filo alligatum lineam ipsam in aëre percurrat, cum utrobique eandem libertatem, eandemque in omnibus curvæ punctis inclinationem ad motum habeat.

PROPOSITIO VII.

Cyclois linea sui axis, sive diametri circuli genitoris, quadrupla est.

Repetita enim figura præcedenti: cum post totam semicycloidem A B C evolutam, filum occupet rectam C F, quæ dupla est A D, proptarea quod axes cycloidum A B C, A E F sunt æquales; apparet semicycloidem ipsam A B C, filo sibi circum applicito æqualem, duplam esse sui axis A D, ac totam proinde cycloidem axis sui quadruplam.

TAB. XVI. Fig. 1.

Apparet etiam tangentem B E, quæ refert partem fili extensam, antea curvæ parti B A applicatam, huic ipsi longitudine æquari. Est autem B E dupla ipsius B K, sive A H, quoniam in propositione quinta ostensum est K E ipsi A H æqualem esse. Itaque pars cycloidis A B rectæ A H, sive B K, dupla erit: existente nimirum B H parallela basi cycloidis: idque ubicunque in ea punctum B sumptum fuerit.

N Hanc

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Hanc cycloidis dimensionem primus invenit, via tamen longe alia, eximius geometra Christophorus Wren Anglus, eamque deinde eleganti demonstratione confirmavit, quæ edita est in libro de cycloide viri clarissimi Ioannis Wallisij. De eadem vero linea, alia quoque multa extant pulcherrima inventa nostri temporis mathematicorum, quibus præcipuè occasionem præbuere problemata quædam à Blasio Paschalio Gallo proposita, qui in his studiis præcellebat. Is cum sua, tum aliorum inventa recensens, primum omnium Mersennum lineam hanc in rerum natura advertisse ait. Primum Robervallium tangentes ejus definivisse, ac plana & solida dimensum esse. Item centra gravitatis tum plani, tum partium ejus invenisse. Primum Wrennium curvæ cycloidis æqualem rectam dedisse. Me quoque primum reperisse dimensionem absolutam portionis cycloidis, quæ rectâ, basi parallelâ, abscinditur per punctum axis, quod quarta parte ejus à vertice abest. quæ nimirum portio æquatur dimidio hexagono æquilatero, intra circulum genitorem descripto. Seipsum denique solidorum ac semisolidorum, tam circa basin quàm circa axem, centra gravitatis definivisse, itemque partium eorum. Lineæ etiam ipsius (Sed hæc post acceptam à Wrennio dimensionem) centrum gravitatis invenisse, & dimensionem superficierum convexarum, quibus solida ista eorumque partes comprehenduntur; earumque superficierum centra gravitatis. Ac denique dimensionem curvarum cujusvis cycloidis, tam protractæ quam contractæ: hoc est earum quæ describuntur à puncto intra vel extra circumferentiam circuli genitoris sumpto. Et horum quidem demonstrationes à Paschalio sunt editæ. A quibus suas quoque, de eadem linea, subtilissimas meditationes exposuit Cl. Wallisius, atque eadem illa omnia suo Marte se reperisse, ac problemata à Paschalio proposita solvisse contendit. Quod idem & doctissimus Lovera sibi vindicat. Quantum vero unicuique debeatur, ex scriptis eorum eruditi dijudicent. Nos propterea tantum præcedentia retulimus, quod silentio prætereunda non videbantur egregia adeo inventa, quibus factum est, ut, ex lineis omnibus, nulla nunc melius aut peni-

penitiùs quam cyclois cognita sit. Methodum vero nostram, qua in hac metienda usi sumus, in aliis quoque experiri libuit, de quibus porro nunc agemus.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

PROPOSITIO VIII.

Cujus lineæ evolutione parabola describatur ostendere.

Sit paraboloides A B, cujus axis A D; vertex A; proprietas autem ista, ut ordinatim ad axem applicatâ B D, cubus abscissæ ad verticem D A æquetur solido, basin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem lineæ cuidam datæ M; quæ quidem curva pridem geometris nota fuit; & ponatur axi D E juncta in directum A E, quæ habeat $\frac{8}{27}$ ipsius M. Jam si filum continuum circa E A B applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico descriptam ex evolutione esse parabolam E F, cujus axis E A G, vertex E, latus rectum æquale duplæ E A.

TAB. XIII. Fig. 1.

Sumpto enim in curva A B puncto quolibet B, ducatur quæ in ipso tangat curvam recta B G, occurrens axi E A in G. & ex G ducatur porro G F, quæ ad rectos angulos occurrat parabolæ E F in F; & sit ipsi G F perpendicularis F H, quæ parabolam in F continget; & denique F K ordinatim ad axem E G applicetur.

Est igitur K G æqualis dimidio lateri recto, hoc est, ipsi E A; ac proinde, additâ vel ablatâ utrimque A K, erit E K æqualis A G. Est autem A G triens ipsius A D, quoniam B G tangit paraboloidem in B: illud enim ex natura curvæ hujus facile demonstrari potest. Ergo & E K æqualis est trienti A D: & K H, quæ ex natura parabolæ dupla est K E, æquabitur duabus tertiis A D. Itaque cubus ex K H æqualis est $\frac{8}{27}$ cubi ex A D, hoc est, solido basin habenti quadratum D B, altitudinem vero æqualem $\frac{8}{27}$ M, hoc est, ipsi A E. Quamobrem ut quadratum D B ad quadratum K H, ita erit K H longitudine ad A E, hoc est ad K G. Erat autem K H æqualis $\frac{2}{3}$ A D, hoc est ipsi G D. Ergo

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

ut quadratum B D ad quadratum D G ita est H K ad K G. Ut autem H K ad K G, ita est quadratum F K ad quadratum K G. Ergo sicut quadratum B D ad quadratum D G, ita quadratum F K ad quadratum K G. Et proinde sicut B D ad D G longitudine, ita F K ad K G. Unde sequitur B G F esse lineam rectam. Sed G F occurrit parabolæ E F ad angulos rectos. Ergo apparet B G, tangentem paraboloidis, productam occurrere eidem parabolæ ad angulos rectos. Idque similiter de quavis illius tangente demonstrabitur. Ergo constat ex evolutione lineæ E A B, à termino E incepta, describi parabolam E F *. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. huj.

PROPOSITIO IX.

Rectam lineam invenire æqualem datæ portioni curvæ paraboloidis, ejus nempe in qua quadrata ordinatim applicatarum ad axem, sunt inter se sicut cubi abscissarum ad verticem.

TAB. XIII. Fig. 2.

Quomodo hoc fiat ex prop. præcedenti manifestum est. Parabola vero E F ad constructionem non requiritur, quæ sic peragetur. Data quavis parte paraboloidis hujus A B, cui rectam æqualem invenire oporteat, ducatur B G tangens in puncto B, quæ occurrat axi A G in G. Tanget autem si A G fuerit tertia pars A D, inter verticem & ordinatim applicatam B D interceptæ. Porro sumpta A E æquali $\frac{8}{27}$ lineæ M, quæ latus rectum est paraboloidis A B, ducatur E F parallela B G, occurratque lineæ A F, quæ parallela est B D, in F. Jam si ad rectam B G addatur N F, excessus rectæ E F supra E A, habebitur recta æqualis curvæ A B. Cujus demonstratio ex ante dictis facile perspicitur.

Semper ergo curva A B tantum superat tangentem B G, quantum recta E F rectam E A.

Rursus autem hic in lineam incidimus, cujus longitudinem alii jam ante dimensi sunt. Illam nempe quam anno 1659 Joh. Heuratius Harlemensis rectæ æqualem ostendit, cujus demonstratio post commentarios Joh. Schotenii in Cartesii Geo-

Geometriam, eodem anno editam, adjecta est. Et ille quidem omnium primus curvam lineam, ex earum numero quarum puncta quælibet geometricè definiuntur, ad hanc mensuram reduxit, cum sub idem tempus Cycloidis longitudinem dedisset Wrennius, non minus ingenioso epicheremate.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Scio equidem, ab edito Heuratii invento, Doctissimum Wallisium Wilhelmo Nelio, nobili apud suos juveni, idem attribuere voluisse, in libro de Cissoide. Sed mihi, quæ illic adfert perpendenti, videtur non multum quidem ab invento illo Nelium abfuisse, neque tamen plane id adsecutum esse. Nam neque ex demonstratione ejus, quam Wallisius affert, apparet illum satis perspexisse quænam foret curva illa, cujus, si construeretur, mensuram datam fore videbat. Et credibile est, si scivisset ex earum numero esse quæ jampridem Geometris cognitæ fuerant, vel ipsum, vel alios ejus nomine, tam nobile inventum Geometris maturius impertituros fuisse, quod, si quod aliud, merebatur ut Archimedeum illud εὕρηκα exclamarent. Sane ejusdem inventi, tanquam à se profecti, etiam Fermatius, Tholosanus senator ac Geometra peritissimus, demonstrationes conscripsit, quæ anno 1660 excusæ sunt; sed illæ sero utique.

Cum vero in his simus, etiam de nobis dicere liceat, quid ad promovendum tam eximium inventum contulerimus: siquidem & Heuratio ut eo perveniret occasionem præbuimus, & dimensionem curvæ parabolicæ ex hyperbolæ data quadratura, quæ Heuratiani inventi pars est, ante ipsum atque omnium primi reperimus. Etenim sub finem anni 1657 in hæc duo simul incidimus, curvæ parabolicæ quam dixi dimensionem, & superficiei conoidis parabolici in circulum reductionem. Cumque Schotenio, aliisque item amicorum, per literas indicassemus, duo quædam non vulgaria circa parabolam inventa nobis sese obtulisse, eorumque alterum esse conoidicæ superficiei extensionem in circulum, ille literas eas cum Heuratio, quo tum familiariter utebatur, communicavit. Huic vero, acutissimi ingenii viro, non difficile fuit intelligere, conoidis istius superficiei affinem esse dimensionem ipsius cur-

De lineArum curvarum evolutione.

væ parabolicæ. Qua utraque inventa, ulterius inde investigans, in alias istas curvas paraboloides incidit, quibus rectæ æquales absolute inveniuntur.

Ac de Conoidis quidem superficie in planum redacta, ne quis forte testimonium desideret, pauca hæc adscribere visum est ex literis viri clarissimi, atque inter præcipuos hodie Geometras censendi, Franc. Slusii, quibus eo ipso anno mihi inventum illud, ac prolixius forte quam pro merito, gratulatus est. In quibus literis 24. Decemb. anni 1657. datis, ista habentur. *Duo tantum addo, unum &c. Alterum est, me has omnes curvas, ipsumque adeo locum linearem integrum, nihili pene facere præ invento hoc tuo, quo superficiei in conoide parabolico rationem ad circulum suæ baseos demonstrasti. Hanc pro circuli quadratura pulcherrimam ἀπαγωγὴν præfero libens iis omnibus, quas ex loco lineari nec paucas olim deduxi, & quas tecum, si ita jusseris, data occasione communicabo.*

Anno autem insequenti etiam superficies conoidum hyperbolicorum & sphæroidum reperi, quomodo ad circulos reduci possent, constructionesque eorum problematum, non addita tamen demonstratione, Geometris quibuscum tunc literarum commercium habebam, in Gallia Paschalio aliisque, in Anglia Wallisio impertii, qui non multo post sua quoque super his, una cum aliis multis subtilibus inventis in lucem edidit, fecitque ut nostris demonstrationibus perficiendis supersederem. Quoniam vero non inelegantes visæ sunt constructiones nostræ, neque adhuc publice extant, placet hoc loco illas adscribere.

Conoidis parabolici superficiei curvæ circulum æqualem invenire.

Tab. XIII. Fig. 8.

Sit datum conoides cujus sectio per axem parabola A B C, axis ejus B D, vertex B, diameter basis A C, quæ sit axi B D ad angulos rectos. Et oporteat superficiei portionis curvæ invenire circulum æqualem.

Pro-

Producto axe à parte verticis, sumatur B E æqualis B D, & jungatur E A, quæ parabolam A B C in A continget. Porro secetur A D in G, ut sit A G ad G D sicut E A ad A D. Et utrisque simul A E, D G æqualis statuatur recta H. Item trienti basis A C æqualis sit recta L, & inter H & L media proportionalis inveniatur K. qua tanquam radio circulus describatur. Is æqualis erit superficiei curvæ conoidis A B C. Hinc sequitur, si fuerit A E dupla A D, superficiem conoidis curvam ad circulum baseos fore ut 14 ad 9. Si A E tripla A D, ut 13 ad 6. si A E quadrupla A D, ut 14 ad 5. Atque ita semper fore ut numerus ad numerum, si A E ad A D ejusmodi rationem habuerit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Sphæroidis oblongi superficiei circulum æqualem invenire.

Esto sphæroides oblongum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E, cujus minor diameter D E.

TAB. XIII. Fig. 4.

Ponatur D F æqualis C B, seu ponatur F alter focorum ellipseos A D B E, rectæque F D parallela ducatur B G, occurrens productæ E D in G. centroque G, radio G B, describatur super axe A B arcus circumferentiæ B H A. Interque semidiametrum C D & rectam utrisque æqualem, arcui A H B & diametro D E, media proportionalis sit recta K. Erit hæc radius circuli qui superficiei sphæroidis A D B E æqualis sit.

Sphæroidis lati sive compressi superficiei circulum æqualem invenire.

Sit sphæroides latum cujus axis A B, centrum C, sectio per axem ellipsis A D B E.

TAB. XIII. Fig. 5.

Sit rursus focorum alteruter F, divisâque bifariam F C in G, intelligatur parabola A G B quæ basin habeat axem A B, verticem vero punctum G. Sitque inter dimatrum D E, & rectam curvæ parabolicæ A G B æqualem, media propor-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

portionalis linea H. Erit hæc radius circuli qui ſuperficiei ſphæroidis propoſiti æqualis ſit.

Conoidis hyperbolici ſuperficiei curvæ circulum æqualem invenire.

TAB. XIV. Fig. 1.

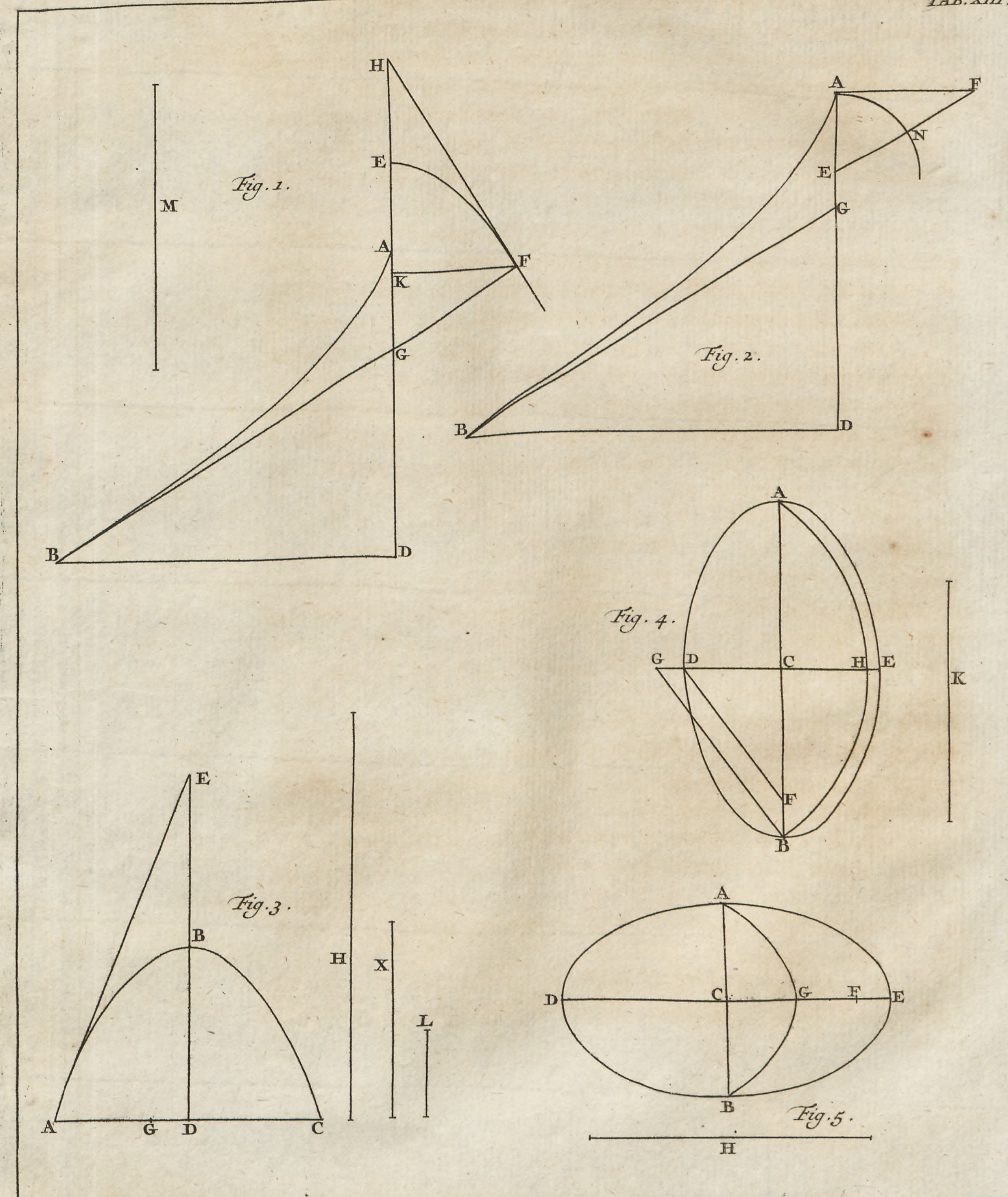
ESto conoides hyperbolicum cujus axis A B, ſectio per axem hyperbola C A D, cujus latus tranſverſum E A, centrum F, latus rectum A G.

Sumatur in axe recta A H, æqualis dimidio lateri recto A G. & ut H F ad A F longitudine ita, ſit A F ad F K potentiâ. Et intelligatur vertice K alia hyperbola deſcripta K L M, eodem axe & centro F cum priore, quæque latera rectum & transverſum illi reciproce proportionalia habeat. Occurrat autem ipſi producta B C in M, ſitque A L parallela B C. Erit jam ſicut ſpatium A L M B, tribus rectis lineis & curva hyperbolica comprehenſum, ad dimidium quadratum ex B C, ita ſuperficies conoidis curva ad circulum baſeos ſuæ, cujus diameter C D. Unde conſtructio reliqua facile abſolvetur, poſitâ hyperbolæ quadraturâ.

Quum igitur conoidis parabolici ſuperficies ad circulum redigatur, æque ac ſuperficies ſphæræ, ex notis geometriæ regulis; in ſuperficie ſphæroidis oblongi, ut idem fiat, ponendum eſt arcus circumferentiæ longitudinem æquari poſſe lineæ rectæ. Ad ſphæroidis vero lati, itemque ad conoidis hyperbolici ſuperficiem eadem ratione complanandam, hyperbolæ quadratura requiritur. Nam parabolicæ lineæ longitudo, quam in ſphæroide hoc adhibuimus, pendet à quadratura hyperbolæ, ut mox oſtendemus.

Verum, quod non indignum animadverſione videtur, invenimus absque ulla hyperbolicæ quadraturæ ſuppoſitione, circulum æqualem conſtrui ſuperficiei utrique ſimul, ſphæroidis lati & conoidis hyperbolici.

Dato enim ſphæroide quovis lato, poſſe inveniri conoides hyperbolicum, vel contra, dato conoide hyperbolico, poſſe inveniri ſphæroides latum ejusmodi, ut utriusque ſi-


Fig. 1.
M
H
E
A
K
F
G
B
D
Fig. 2.
A
F
N
E
G
B
D
Fig. 3.
E
B
A
G
D
C
H
X
L
Fig. 4.
A
G
D
C
H
E
K
F
B
Fig. 5.
A
D
C
G
F
E
B
H

mul superficiei exhibeatur circulus æqualis. cujus exemplum in casu uno cæteris simpliciore sufficiet attulisse.

Sit sphæroides latum cujus axis S I, sectio per axem ellipsis S T I K; cujus ellipsis centrum O, axis major T K. ponatur autem ellipsis hæc ejusmodi, ut latus transversum T K habeat ad latus rectum eam rationem, quam linea secundum extremam & mediam rationem secta, ad partem sui majorem.

TAB. XIV. Fig. 2.

Sumatur B C potentia dupla ad S O, item B A potentia dupla ad O K. & sint hæ quatuor continue proportionales B C, B A, B F, B E, & ponatur E P æqualis E A. Intelligatur jam conoides hyperbolicum Q F N, cujus axis F P; axi adjecta, sive $\frac{1}{2}$ latus transversum F B; dimidium latus rectum æquale B C.

Hujus conoidis superficies curva, unà cum superficie sphæroidis S I, æquabitur circulo cujus datus erit radius M L, qui nempe possit quadratum T K cum duplo quadrato S I.

Curvæ parabolicæ æqualem rectam lineam invenire.

Sit parabolæ portio A B C, cujus axis B K, basis A C axi ad angulos rectos; & oporteat curvæ A B C rectam æqualem invenire.

TAB. XIV. Fig. 3.

Accipiatur basi dimidiæ A K æqualis recta I E, quæ producatur ad H, ut sit I H æqualis A G, quæ parabolam in puncto basis A contingens, cum axe producto convenit in G. Sit jam portio hyperbolæ D E F, vertice E, centro I descriptæ, cujusque diameter sit E H; basis vero D H F ordinatim ad diametrum applicata. Latus rectum pro lubitu sumi potest. Quod si jam super basi D F intelligatur parallelogrammum constitutum D P Q F, quod portioni D E F æquale sit; ejus latus P Q ita secabit diametrum hyperbolæ in R, ut R I sit æqualis curvæ parabolicæ A B, cujus dupla est A B C.

Apparet igitur hinc quomodo à quadratura hyperbolæ pendeat curvæ parabolicæ mensura, & illa ab hac vicissim.

Quæcunque vero problemata ad alterum è duobus hisce reducuntur, quamlibet veræ proximam solutionem per numeros accipiunt, logarithmorum admirabili invento. Cum per hos hyperbolæ quadratura, ut olim invenimus, numeris quam proxime explicetur. Est autem regula hujusmodi.

Tab. XV. Fig. 1.

Sit D A B portio hyperbolæ, cujus asymptoti C S, C V, ductis D E, B V parallelis asymptoto S C.

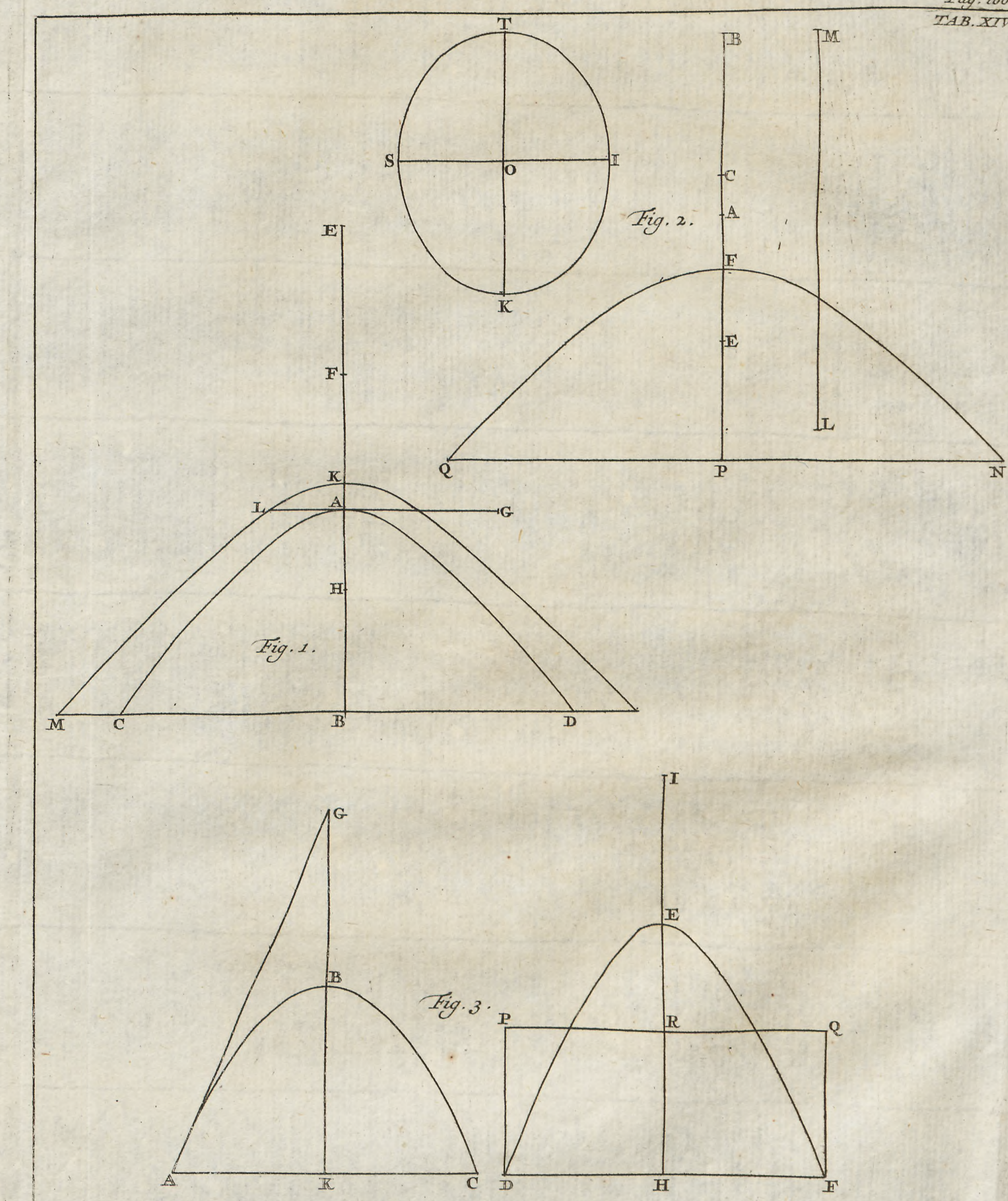
Accipiatur differentia logarithmorum qui conveniunt numeris, eandem inter se rationem habentibus quam rectæ D E, B V; ejusque differentiæ quæratur logarithmus. Cui addatur logarithmus hic (qui semper est idem) 0, 36221, 56887. Summa erit logarithmus numeri qui spatium D E V B A D designabit, tribus rectis & curva D A B comprehensi, in partibus qualium parallelogrammum D C est 100000, 00000. Unde porro facile quoque habebitur area portionis D A B.

Sit ex. gr. proportio D E ad B V ea quæ 36 ad 5.

Ab	1, 55630, 25008,	logar°. 36.
auferatur	0, 69897, 00043.	logar^us^. 5.
Erit	0, 85733, 24965.	differ. logar^orum^.
Et	9, 93314, 92856.	logar^us^. differentiæ.
Cui addatur	0, 36221, 56887.	logar^us^. semper addendus.
Fit	10, 29536, 49743.	logar^us^. spatii D E V B A D.

Habebit hujus logarithmi numerus 11 characteres, quum characteristica sit 10. Quæratur itaque primo numerus proxime minor, conveniens invento logarithmo, qui numerus est 19740. Deinde ex differentia logarithmi ejusdem, & proxime eum in tabula sequentis, reliqui characteres eliciantur 81026, scribendi post priores, ut fiat 197408, 10260, addito ad finem zero, ut efficiatur numerus characterum 11. Est ergo area spatii D E V B A D proxime partium 197408, 10260, qualium partium parallelogrammum D C est 100000, 00000.

PRO-


Fig. 1.
E F K A L G H M C B D
Fig. 2.
T S O I K B C A F E M L Q P N
Fig. 3.
G B A K C I E P R Q D H F

PROPOSITIO X.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Lineas curvas exhibere quarum evolutione ellipses & hyperbolæ describantur, rectasque invenire iisdem curvis æquales.

Sit ellipsis vel hyperbole quælibet A B, cujus axis transversus A C; centrum figuræ D; latus rectum duplum ipsius A E. Et sumpto in sectione quovis puncto, ut B, applicetur ordinatim ad axem recta B K, & ad dictum punctum B tangens ducatur quæ conveniat cum axe in F; sitque B G ipsi F B perpendicularis, axique occurrat in G; & producatur B G usque ad H, ut B H ad H G habeat rationem eam quæ componitur ex rationibus G F ad F K, & A D ad D E.

TAB. XV. Fig. 2. & 3.

Dico curvam E H M, cujus puncta omnia inveniuntur eodem modo quo punctum H, esse eam cujus evolutione, unà cum recta E A, describetur sectio A B. Ipsam autem B H tangere curvam in H, & esse toti H E A æqualem. Quamobrem, si ab H B auferatur E A, reliqua recta portioni curvæ H E æquabitur. Apparet autem, cum curvæ puncta quævis indifferenter, certaque ratione inveniantur, esse eam utrobique ex earum genere, quæ merè geometricæ censentur. Unde & relatio horum omnium punctorum ad puncta axis A C, æquatione aliqua exprimi poterit, quam æquationem ad sextam dimensionem ascendere invenio; minimumque habere terminorum, si fuerit A B hyperbola cujus latera transversum rectumque æqualia. Tunc enim ducta ex quovis curvæ puncto, ut H, ad axem C A N perpendiculari H N; vocatâque A C, a; C N, x; & N H, y; erit semper cubus ab $x\,x\text{-}y\,y\text{-}a\,a$ æqualis $27\,x\,x\,y\,y\,a\,a$. Sed hoc casu brevius quoque multo, quam prædicta constructione, curvæ E H M puncta reperiri possunt, ut in sequentibus ostendetur.

Cæterum notandum est, in ellipsi singulos quadrantes singularum linearum evolutione describi; sicut quadrans A B L

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

evolutione lineæ A E H M, quadrans C L evolutione similis huic oppositæ C O M. Est enim hæc in sectione utraque diversitas, quod cum principium quidem curvæ E H M, tam in ellipsi quam in hyperbola, sit punctum E, sumpta A E æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti; in hyperbola in infinitum inde dicta linea extenditur, at in ellipsi finitur in puncto axis minoris M, sumpta L M æquali $\frac{1}{2}$ lateris recti, secundum quod possunt ordinatim applicatæ ad dictum minorem axem. Namque hos terminos esse hujus curvæ, facile apparebit ortum ejus consideranti, quodque in ellipsi est sicut A D ad D E, ita L M ad M D.

Horum autem demonstrationi non immorabimur, sed ad ipsam methodum tradendam pergemus, qua & hæ curvæ ex sectionibus conicis, & aliæ innumeræ ex aliis quibuscunque datis inveniuntur.

PROPOSITIO XI.

DAtâ lineâ curvâ, invenire aliam cujus evolutione illa describatur; & ostendere quod ex unaquaque curva geometrica, alia curva itidem geometrica existat, cui recta linea æqualis dari possit.

TAB. XV. Fig. 4. & 5.

Sit curva quæpiam, vel pars ejus, in partem unam inflexa A B F, & recta K L, ad quam puncta omnia referantur; & oporteat invenire curvam aliam, ut D E, cujus evolutione ipsa A B F describatur.

Ponatur jam inventa; & quoniam tangentes omnes curvæ D E, necesse est occurrere lineæ A B F, ex evolutione descriptæ, ad angulos rectos; patet quoque vicissim eas quæ ipsi A B F ad rectos angulos insistunt, ut B D, F E, tacturas evolutam C D E.

Intelligantur autem puncta B, F, inter se proxima; & siquidem à parte A evolutio incipere ponatur, ulteriusque inde distet F quam B, etiam contactus E ulterius quam D distast-

ſtabit ab A; interſectio vero rectarum B D, F E, quæ eſt G, cadet ultra punctum D in recta B D. Nam concurrere ipſas B D, F E neceſſe eſt, cum curvæ B F ad partem cavam inſiſtant rectis angulis.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Quanto autem punctum F ipſi B propinquius fuerit, tanto propius quoque puncta D, G & E convenire apparet; ideoque, ſi interſtitium B F infinite parvum intelligatur, tria dicta puncta pro uno eodemque erunt habenda; ac præterea, ductâ rectâ B H, quæ curvam in B tangat, eadem quoque pro tangente in F cenſebitur. Sit B O parallela K L, & in hanc perpendiculares cadant B K, F L: ſecetque F L rectam B O in P, & ſint puncta notata M, N, in quibus rectæ, B D, F E, occurrant ipſi K L. Quia igitur ratio B G ad G M eſt eadem quæ B O ad M N, data hac dabitur & illa; & quia recta B M datur magnitudine ac poſitione, dabitur & punctum G in producta B M, ſive D in curva C D E, quia G & D in unum convenire diximus. Datur autem ratio B O ad M N, ſimpliciter quidem in Cycloide, ubi primùm omnium illam inveſtigavimus, invenimuſque duplam; in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compoſitionem. Nam quia ratio B O ad M N componitur ex rationibus B O ad B P, ſive N H ad L H, & ex B P ſive K L ad M N; patet, ſi rationes hæ utræque dentur etiam ex iis compoſitam rationem B O ad M N datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in ſequentibus patebit; ac proinde iis ſemper curvas adſignari poſſe, quarum evolutione deſcribantur, quæque ideo ad rectas lineas ſint reducibiles.

TAB. XVI. Fig. 2.

Ponatur primò parabola eſſe A B F, cujus vertex A, axis A Q. Cum igitur lineæ B M, F N, ſint parabolæ ad angulos rectos; ductæque ſint ad axem A Q perpendiculares B K, F L; erunt, ex proprietate parabolæ, ſingulæ M K, N L dimidio lateri recto æquales; & ablata communi L M, æquales inter ſe K L, M N. Hinc, quum ratio B G ad G M componatur ex rationibus N H ad H L, & K L ad M N, uti dictum fuit, ſitque earum poſterior ratio

De linearum curvarum evolutione.

æqualitatis; liquet rationem B G ad G M fore eandem quæ N H ad H L; & dividendo, B M ad M G, eandem quæ N L ad L H, sive M K ad K H; nam L H, K H pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F. Data autem est ratio M K ad K H, dato puncto B; quoniam tam M K, quam K H dantur magnitudine; nam M K æquatur dimidio lateri recto, K H vero duplæ K A. Dataque etiam est positione & magnitudine recta B M. Ergo & M G data erit, adeoque & punctum G, sive D, in curva R D E; quod nempe invenitur producta B M usque in G, ut sit B M ad M G sicut $\frac{1}{2}$ lateris recti ad duplam K A.

Et sic quidem, adsumptis in parabola A B F aliis quotlibet punctis præter B, totidem quoque puncta lineæ R D E, simili ratione, invenientur; atque hoc ipso lineam R D E geometricam esse constat, unáque proprietas ejus innotescit, ex qua cæteræ deduci possunt. Ut si inquirere deinde velimus, quanam æquatione exprimatur relatio punctorum omnium curvæ C D E ad rectam A Q: ducta in hanc perpendiculari D Q, vocatoque latere recto parabolæ A B F, a; A K, b; A Q, x; Q D, y. Quoniam ratio B M ad M D, hoc est, K M ad M Q, est ea quæ $\frac{1}{2} a$ ad $2 b$, estque ipsa K M $\infty \frac{1}{2} a$, erit & M Q æqualis $2 b$. Est autem M A $\infty \frac{1}{2} a + b$. ergo A Q sive x æqualis $3 b + \frac{1}{2} a$. Unde $b \infty \frac{1}{3} x - \frac{1}{6} a$. Porro quoniam, sicut quadratum M K, hoc est, $\frac{1}{4} a a$ ad quadratum K B, hoc est, $a b$, ita qu. M Q, hoc est, $4 b b$ ad qu. Q D; erit qu. Q D, sive $y y \infty \frac{16 b^3}{a}$. Ubi, si in locum b substituatur $\frac{1}{3} x - \frac{1}{6} a$, quod illi æquale inventum est, fiet $y y \infty 16.$ cub. $\frac{1}{3} x - \frac{1}{6} a$ divisis per a. Ac proinde $\frac{27}{16} a y y \infty$ cubo ab $x - \frac{1}{2} a$. Accipiatur A R in axe parabolæ $\infty \frac{1}{2} a$; eritque R Q $\infty x - \frac{1}{2} a$. Curvam igitur C D ejus naturæ esse liquet, ut semper cubus lineæ R Q æquetur parallelepipedo, cujus basis qu. Q D, altitudo $\frac{27}{16} a$; ac proinde ipsam paraboloidem esse, cujus evolutione describi parabolam A B supra ostendimus; cujus nimirum paraboloidis latus rectum æquetur $\frac{27}{16}$ lateris recti parabolæ A B. tunc enim hujus latus rectum æquale fit $\frac{16}{27}$ lateris recti paraboloidis, quemadmodum ibi fuit definitum.

Quo-

Quomodo porro ratio O B ad B P, five N H ad H L, non tantum cum A B F parabola eft, fed etiam alia quælibet curva geometrica, femper inveniri poffit manifeftum eft. Quoniam tantum recta F H ducenda eft, quæ curvam in adfumpto puncto F tangat, & F N ipfi F H perpendicularis: unde N H & H L datæ erunt, ac proinde ratio quoque earum data.

De linearum curvarum evolutione.

Tab. XV. Fig. 4. & 5.

At non æque liquet quo pacto ratio K L ad M N innotefcat, quam tamen femper quoque reperiri poffe fic often-demus.

Sint rectæ K T, L V, perpendiculares fuper K L, fitque K T æqualis K M, & L V æqualis L N, & ducatur V X parallela L N, quæ occurrat ipfi K T in X. Quoniam ergo femper eadem eft differentia duarum L K, N M, quæ duarum L N, K M, hoc eft, quæ duarum L V, K T; eft autem differentiæ ipfarum L V, K T æqualis X T, & X V ipfi L K; erit proinde N M æqualis duabus fimul V X, X T, vel ei quo V X ipfam X T fuperat. Atque adeo, fi data fuerit ratio V X ad X T, data quoque erit ratio V X ad utramque fimul V X, X T, vel ad exceffum V X fupra X T, hoc eft, data erit ratio V X five L K ad N M. Sciendum eft autem, quoniam K T ipfi K M, & L V ipfi L N, æquales fumptæ funt, locum punctorum T, V, fore lineam quandam vel rectam vel curvam datam, ut mox oftendetur. Et fiquidem fit linea recta; ut contingit fi A B F coni fectio fuerit, & K L axis ejus; conftat rationem V X ad X T datam fore, data pofitione ipfius lineæ V T, quæ locus eft puuctorum V, T; femperque eandem tunc haberi dictam rationem, qualecunque fuerit intervallum K L.

At fi locus alia linea curva fuerit, diverfa erit ratio V X ad X T, prout majus minufve fuerit intervallum K L. Inquirendum eft autem quænam futura fit ifta ratio, cum K L infinite parvum imaginamur, quoniam & puncta B, F, proxima invicem pofuimus. Similiter itaque & puncta V, T, lineæ curvæ minimam particulam intercipere intelligendum eft; unde recta V T, cum ea quæ in T curvam contingit, coincidet. Sit ergo tangens illa T Y; poteft enim duci quoniam

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

niam curva, ad quam ſunt puncta T, V, geometrica eſt. Ratio igitur Y K ad K T data erit, adeoque & V X ad X T. ex qua etiam rationem L K ad N M dari oſtendimus.

Quænam vero ſit linea ad quam ſunt puncta T, V, invenitur ponendo certum punctum S in recta K L, & vocando S K, x; K T, y. Nam quia data eſt curva A B F, eique B M ad angulos rectos ducta, invenietur inde quantitas lineæ K M, per methodum tangentium à Carteſio traditam, quæ ipſi K T, ſive y æquabitur, & ex ea æquatione, natura curvæ T V innoteſcet, ad quam deinde tangens ducenda eſt. Sed clariora omnia fient ſequenti exemplo.

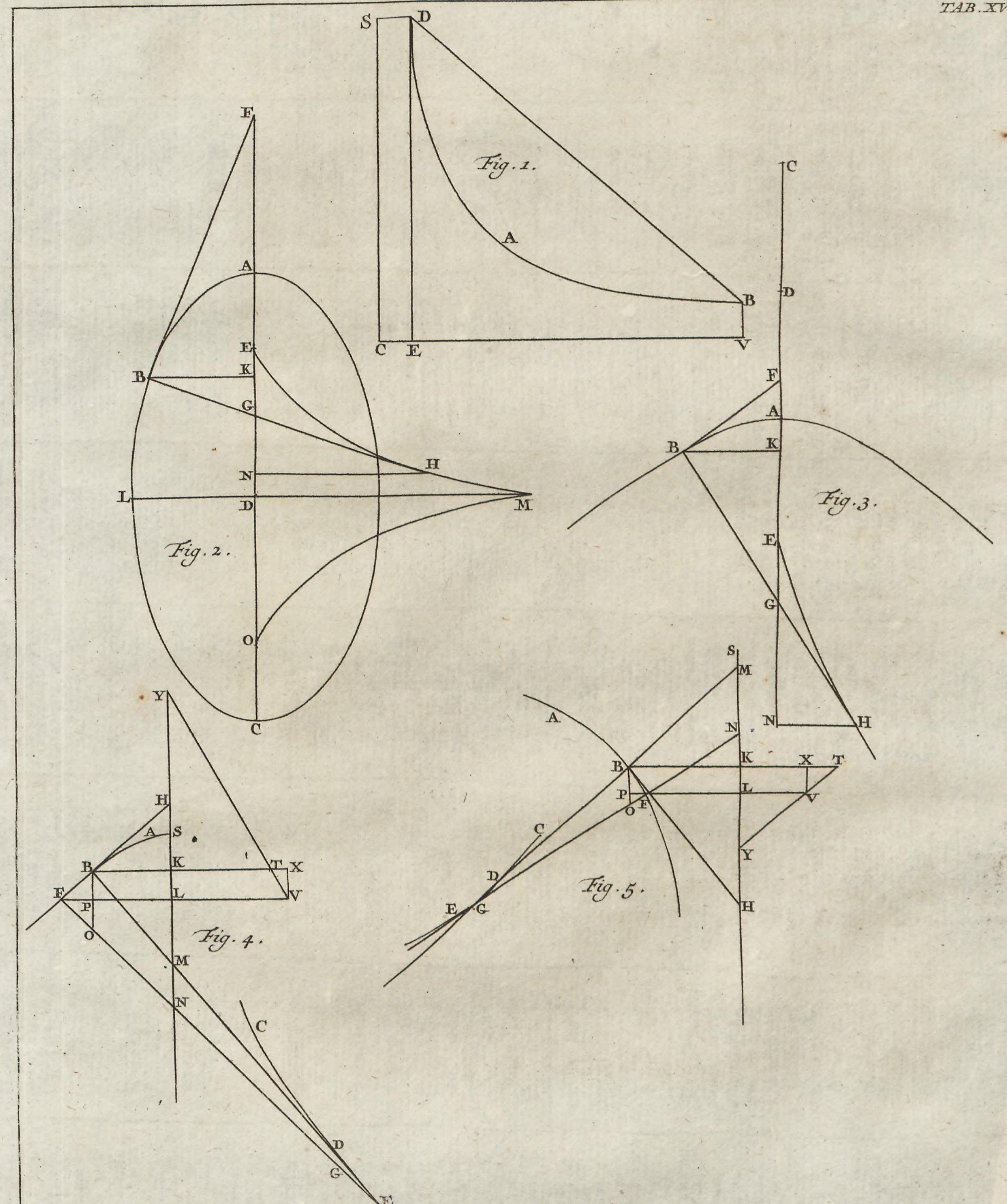
TAB. XVI. Fig. 3.

Sit A B F paraboloides illa, cui ſuperius rectam æqualem invenimus; in qua nempe cubi perpendicularium in rectam S K, ſint inter ſe ſicut quadrata ex ipſa S K abſciſſarum. Et oporteat invenire curvam C D E cujus evolutione paraboloides S B F deſcribatur.

Hic primum ratio B O ad B P facile invenitur, quia tangentem paraboloidis in puncto B duci ſcimus, ſumpta S H æquali $\frac{1}{2}$ S K. Cui tangenti cum B M ad angulos rectos inſiſtat, dantur jam lineæ M H, H K, ac proinde earum inter ſe ratio, quæ eſt eadem quæ O B ad B P.

Ut autem ratio B P, ſive K L ad M N innoteſcat, ponantur ad K L perpendiculares rectæ K T, L V, æquales ſingulis K M, L N, ſitque V X parallela L K. Jam quia ex duabus ſimul K L, L N, auferendo K M, relinquitur M N *; hoc eſt, auferendo ex duabus X V, V L, ſive X V,

* *In Exemplari ſuo ad marginem ſcripſit Auctor.* ſupponitur hic rectam L N majorem eſſe quam K M, quod melius fuerat antea probari, etſi verum eſt. *Demonſtratio autem haud difficilis eſt, ſit abſciſſa* S K ∞ x; *perpendicularis* K B ∞ u; *latus rectum paraboloidis* ∞ a. *Quia* S H ∞ $\frac{1}{2}$ SK, *eſt* H K ∞ $\frac{3}{2}$SK ($\frac{3}{2}$x). *Propter angulum rectum* H B M, *triangula rectangula* H B K, K B M *ſimilia ſunt, &* H K ($\frac{3}{2}$x), K B (u), K M, *ſunt in continua proportione; ergo* K M ∞ $\frac{2uu}{3x}$, *cujus quadratum eſt* $\frac{4u^4}{9xx}$ ∞ $\frac{4au^4}{9axx}$; *ſed ut notavit auctor ex natura Paraboloidis* A B F, u^3 ∞ axx; *ergo quadratum lineæ* K M ∞ $\frac{4au^4}{9axx}$ ∞ $\frac{4au^4}{9u^3}$ ∞ $\frac{4}{9}$au *unde ſequitur ipſam* K M, *augeri ſi creſcat* B K (u). *Cum autem* L F *excedat* B K, L N *ſuperabit* K M, quod demonſtrandum erat.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

XV, XK, ipſam KT; hinc autem relinqui apparet VX & XT: erunt igitur hæ duæ VX, XT ipſi MN æquales, ac proinde ratio KL ad MN eadem quæ VX ad duas ſimul VX, XT. Ut autem hæc ratio innoteſcat cum intervallum KL eſt minimum; oportet ſecundum prædicta inquirere quis ſit locus, ſive linea ad quam ſunt puncta T, V. Quod ut fiat ſit latus rectum paraboloidis ABF $\infty\ a$; SK $\infty\ x$; KT $\infty\ y$.

De linearum curvarum evolutione.

Quia igitur proportionales ſunt KH, KB, KM, eſtque HK $\infty\ \frac{3}{2}x$: KB ex natura paraboloidis æqualis R. cub. axx: fiet KM, hoc eſt KT $\infty\ \frac{2}{3}$ R. cub. $aax \infty y$, ac proinde $\frac{8}{27}aax \infty y^3$. Unde patet locum punctorum T, V, eſſe paraboloidem illam, quam cubicam vocant geometræ. Cui proinde ad T tangens ducetur, ſumptâ SY duplâ ipſius SK, junctâque YT. Et jam quidem ratio VX ad duas ſimul VX, XT, quam diximus eandem eſſe ac KL ad MN, erit ea quæ YK ad utramque ſimul YK, KT. Hæc autem ratio data eſt, ergo & ratio KL ad MN. Sed & rationem OB ad PB datam eſſe oſtenſum eſt. Ergo, cum ex duabus hiſce componatur ratio BD ad DM, ut ſupra patuit, dabitur & hæc; & dividendo, ratio BM ad MD; adeoque & punctum D in curva DE.

Ad conſtructionem autem breviſſimam hoc pacto hic perveniemus. KT ſive KM dicta fuit y. Itaque MH erit $y + \frac{3}{2}x$. Et MH ad HK, ſive OB ad BP, ut $y + \frac{3}{2}x$ ad $\frac{3}{2}x$. ſive, ſumptis omnium duplis, ut $2y + 3x$ ad $3x$. Deinde quia YK $\infty\ 3x$, erit YK ad YK + KT, ſive per prædicta, KL ad MN, ut $3x$ ad $3x + y$. Atqui ex rationibus OB ad BP, & KL ad MN, componi diximus rationem BD ad DM. Ergo ratio BD ad DM erit compoſita ex rationibus $2y + 3x$ ad $3x$, & $3x$ ad $3x + y$; ideoque erit ea quæ $2y + 3x$ ad $3x + y$. & dividendo, ratio BM ad MD, eadem quæ y ad $3x + y$.

Sit SZ perpendicularis ad SK, eique occurrat MB producta in Z. Quia ergo ratio BM ad MD inventa eſt ea quæ y ad $y + 3x$, hoc eſt quæ MK ad MK + 3KS. Sicut au-

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

tem M K ad M K + 3 K S, ita M B ad M B + 3 B Z: erit proinde M B ad M D ut M B ad M B + 3 B Z. Unde liquet M D æqualem ſumendam ipſi M B + 3 B Z. Atque ita quotlibet puncta curvæ C D E invenire licebit. Cujus curvæ portio quælibet ut D S, rectæ D B, quæ paraboloidi S A B ad angulos rectos occurrit, æqualis erit. Conſtat autem geometricam eſſe, & ſi velimus, poſſumus æquatione aliqua relationem exprimere punctorum omnium ipſius ad puncta axis S K.

TAB. XVII. Fig. 1.

Simili modo autem, ſi inquiramus in paraboloide illa ſive parabola cubica, in qua cubi ordinatim applicatarum ad axem, ſunt inter ſe ſicut portiones axis abſciſſæ, inveniemus curvam cujus evolutione deſcribitur, quæque proinde rectæ lineæ æquari poterit, nihilo difficiliori conſtructione per puncta determinari. Nam ſi fuerit illa S A B; axis S M; (dicitur autem improprie axis in hac curva, cum forma ejus ſit ejusmodi, ut ductâ S Z, quæ ſecet S M ad angulos rectos, ea portiones ſimiles curvæ habeat ad partes oppoſitas;) agatur per punctum quodlibet B, in paraboloide ſumptum, recta B D, quæ curvam ad angulos rectos ſecet, axique ejus occurrat in M, rectæ vero S Z in Z. Deinde ſumatur B D æqualis dimidiæ B M, unà cum ſeſquialtera B Z. Eritque D unum è punctis curvæ quæſitæ R D vel R I, cujus evolutione, juncta tamen recta quadam R A, deſcribetur paraboloides S A B. Sunt autem hic, quod notatu dignum eſt, quodque in aliis etiam nonnullis harum paraboloidum contingit, duæ evolutiones in partes contrarias, quarum utraque à puncto certo A initium capit; ita ut evolutione ipſius A R D, in infinitum porro continuatæ, deſcribatur paraboloidis pars infinita A B F; evolutione autem totius A R I, ſimiliter in infinitum extenſæ, tantum particula A S. Punctum autem A definitur, ſumptâ S P quæ ſit ad latus rectum paraboloidis, ſicut unitas ad radicem quadrato-quadraticam numeri 91125, (is cubus eſt ex 45) applicatâque ordinatim P A. Unde porro punctum R, confinium duarum curvarum R D, R I, invenitur ſicut cætera omnia harum

TAB. XVI.

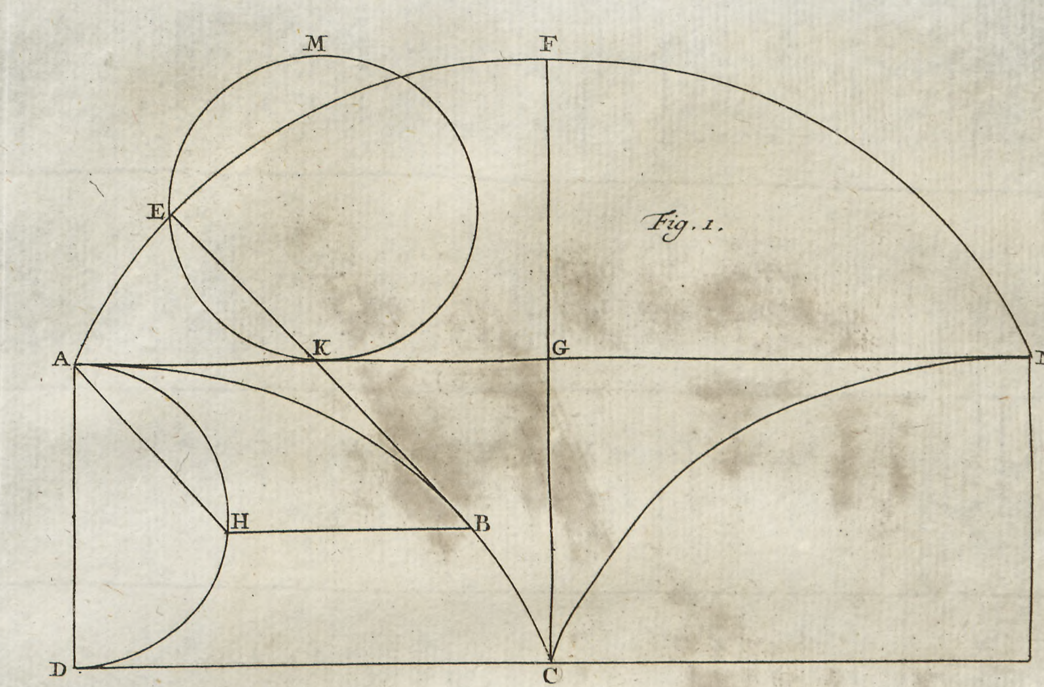


Fig. 1.

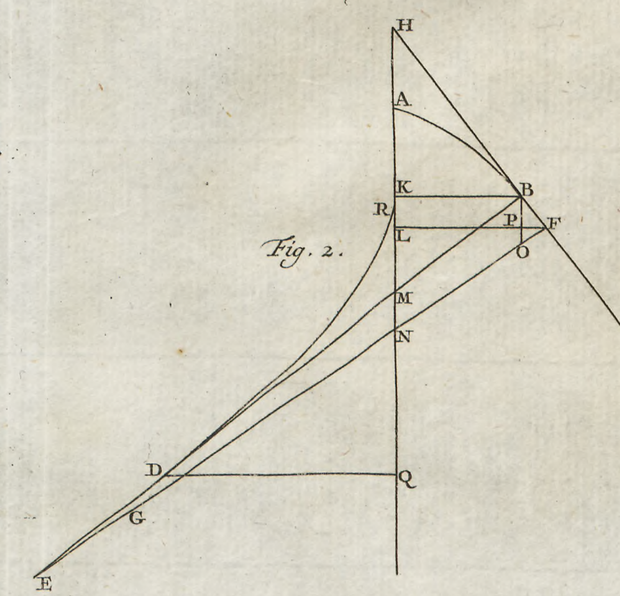


Fig. 2.

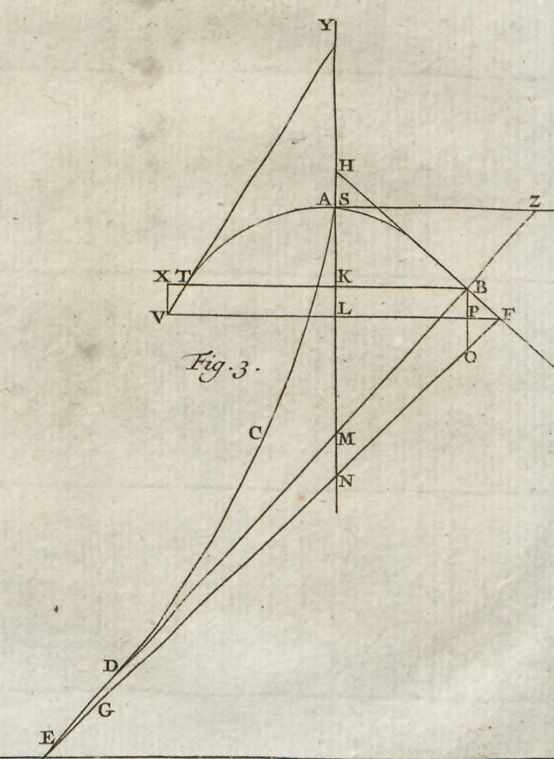


Fig. 3.

rum curvarum, hoc eſt, ſicut punctum D modo inventum fuit.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Denique, quæcunque fuerit ex paraboloidum genere curva S A B, ſemper æque facile curvam aliam, cujus evolutione ipſa deſcribatur, quæque propterea rectæ adæquari poſſit, per puncta inveniri comperimus. Atque adeo conſtructionem univerſalem ſequenti tabella exhibemus, quæ quouſque libuerit extendi poterit.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} a\,x \infty y^2 \\ a^2 x \infty y^3 \\ a\,x^2 \infty y^3 \\ a\,x^3 \infty y^4 \\ a^3 x \infty y^4 \end{array} \right. \text{Erit} \left\{ \begin{array}{l} BM + 2\,BZ \\ \frac{1}{2}BM + \frac{3}{2}BZ \\ 2\,BM + 3\,BZ \\ 3\,BM + 4\,BZ \\ \frac{1}{3}BM + \frac{4}{3}BZ \end{array} \right\} \infty\ BD.$$

TAB. XVII. Fig. 2.

Sit S B parabola, vel paraboloidum aliqua, cujus vertex S; recta S K vel axis, vel axi perpendicularis, ad quam referuntur æquatione puncta paraboloidis; & ipſa quidem S K ſemper ad partem cavam ducta intelligitur; cui perpendicularis S Z. Ponendo jam S K ∞ x; B K ∞ y, quæ à puncto quovis curvæ perpendicularis eſt ipſi S K; & latere recto curvæ ∞ a; prior pars tabellæ, quæ ad ſiniſtram eſt, naturam ſingularum paraboloidum ſingulis æquationibus explicat. Quibus reſpondent in parte dextra quantitates lineæ B D, quæ ſi curvæ S B inſiſtat ad angulos rectos, exhibitura ſit punctum D in curva quæſita C D. Exempli gratia, ſi S B eſt parabola quæ ex coni ſectione fit, ei ſcimus convenire æquationem tabellæ primam, $a\,x \infty y^2$; cui reſpondet ab altera parte B M + 2 B Z ∞ B D. Unde longitudo lineæ B D cognoſcitur, adeoque inventio quotlibet punctorum curvæ C D. Quam quidem, hoc caſu, paraboloidem eſſe ſupra demonſtratum fuit, eam nempe, cujus æquatio tertia eſt hujus tabellæ.

Conſtruitur autem tabella hoc pacto, ut B M ſumatur multiplex ſecundum numerum qui eſt exponens poteſtatis x in æquatione; B Z vero, multiplex ſecundum exponentem poteſtatis y; ex his autem utriſque compoſitæ accipiatur pars denominata ab exponente poteſtatis a.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

Præter hasce autem paraboloides lineas, alias item invenimus, à quibus, non absimili constructione, deducuntur curvæ rectis comparabiles. Assimilantur autem hyperbolis, eo quod asymptotos suas habent, sed tantum angulum rectum constituentes. Et harum primam quidem statuimus hyperbolam ipsam, quæ est è coni sectione.

TAB. XVII. Fig. 3.

Reliquarum vero naturam ut explicemus; sunto P S, S K, asymptoti curvæ A B, rectum angulum comprehendentes, & à curvæ puncto quolibet B ducatur B K parallela P S, sitque S K ∞ x; K B ∞ y. Si igitur hyperbola sit A B, scimus rectangulum linearum S K, K B, hoc est, rectangulum $x\,y$ semper eidem quadrato æquale esse, quod vocetur $a\,a$.

Proxima vero hyperboloidum erit, in qua solidum ex quadrato lineæ S K, in altitudinem K B ductum, hoc est, solidum $x\,x\,y$, cubo certo æquabitur, qui vocetur a^3. Atque ita innumeræ aliæ hujus generis hyperboloides existunt, quarum proprietatem sequens tabella singulis æquationibus exhibet, simulque rationem construendi curvam D C, cujus evolutione quæque generetur.

$$\text{Si}\ \begin{cases} x\,y \; ∞ \; a^2 \\ x^2 y \; ∞ \; a^3 \\ x\,y^2 \; ∞ \; a^3 \\ x^3 y \; ∞ \; a^4 \\ x\,y^3 \; ∞ \; a^4 \end{cases} \quad \text{Erit}\ \left.\begin{cases} \tfrac{1}{2}BM + \tfrac{1}{2}BZ \\ \tfrac{2}{3}BM + \tfrac{1}{3}BZ \\ \tfrac{1}{3}BM + \tfrac{2}{3}BZ \\ \tfrac{3}{4}BM + \tfrac{1}{4}BZ \\ \tfrac{1}{4}BM + \tfrac{3}{4}BZ \end{cases}\right\} ∞ \; BD.$$

Recta D B M Z curvam A B, ut antea quoque, secat ad angulos rectos, occurritque asymptotis S K, S P, in M & Z. Si igitur exempli gratia hyperbola fuerit A B, cujus æquatio est $x\,y$ ∞ a^2, sumetur B D ∞ $\tfrac{1}{2}$ B M + $\tfrac{1}{2}$ B Z, quemadmodum tabella præcipit. Eritque punctum D in curva D C quæsita, cujus alia quotlibet puncta sic inveniri poterunt, & portio ejus quælibet rectæ lineæ adæquari. Et hæc quidem eadem illa est curva, cujus relationem ad axem hyperbolæ superius æquatione expressimus. Constructio autem tabellæ hujus plane eadem est quæ superioris.

Cæterum, quoniam tum ad harum curvarum, tum ad earum

rum quæ ex paraboloidibus naſcuntur conſtructionem, ducendæ ſunt lineæ D B Z, quæ ad datum punctum B ſecent curvas A B, ſive ipſarum tangentes B H, ad angulos rectos; dicemus in univerſum quomodo hæ tangentes inveniantur. In æquatione itaque, quæ cujusque curvæ naturam explicat, quales æquationes duabus tabellis præcedentibus exponuntur, conſiderare oportet quæ ſint exponentes poteſtatum x & y, & facere ut, ſicut exponens poteſtatis x ad exponentem poteſtatis y, ita ſit S K ad K H. Juncta enim H B curvam in B continget. Velut in tertia hyperboloide, cujus æquatio eſt $x y^2 \propto a^3$: quia exponens poteſtatis x eſt 1, poteſtatis autem y exponens 2; oportet eſſe ut 1 ad 2 ita S K ad K H. Horum autem demonſtrationem noverunt analyticæ artis periti, qui jam pridem omnes has lineas contemplari cœperunt; & non ſolum paraboloidum iſtarum, ſed & ſpatiorum quorundam infinitorum, inter hyperboloides & aſymptotos interjectorum, plana ſolidaque dimenſi ſunt. Quod quidem & nos, facili atque univerſali methodo, expedire poſſemus, ex ſola tangentium proprietate ſumpta demonſtratione. Sed illa non ſunt hujus loci.

DE LINEARUM CURVARUM EVOLUTIONE.

HOROLOGII OSCILLATORII
PARS QUARTA.
De centro Oſcillationis.

CEntrorum Oſcillationis, ſeu Agitationis, inveſtigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliiſque multis, doctiſſimus Merſennus propoſuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Carteſii haud pridem editis, quibus ad Merſennianas ſuper his rebus reſponſum continetur. Poſtulabat autem centra illa ut invenirem in circuli ſectoribus,

De centro oscillationis.

bus, tam ab angulo quam à medio arcu ſuſpenſis, atque in latus agitatis, item in circuli ſegmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media baſi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum ſimplex, hoc eſt, pondus filo appenſum reperiatur ea longitudine, ut oſcillationes faciat temporum eorundem ac figuræ iſtæ, uti dictum eſt, ſuſpenſæ. Simul vero pretium operæ, ſi forte quæſitis ſatisfeciſſem, magnum ſane & invidioſum pollicebatur. Sed a nemine id quod deſiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam pateſceret; velut à limine repulſus, longiori inveſtigatione tunc quidem abſtinui. Qui vero rem ſeſe confeciſſe ſperabant viri inſignes, Carteſius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam ſcopum attigerunt, niſi in paucis quibuſdam facilioribus, ſed quorum tamen demonſtrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifeſtum fore ſpero, ſi quis forte quæ ab illis tradita ſunt, cum noſtris hiſce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonſtrata arbitror, & experimentis prorſus convenientia reperi. Occaſio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati noſtri temperandorum ratione oblata eſt, dum pondus mobile, præter id quod in imo eſt, illis applico, ut in deſcriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auſpiciis atque à prima origine rem exorſus, tandem difficultates omnes ſuperavi, nec tantum problematum Merſennianorum ſolutionem, ſed alia quoque illis difficiliora reperi, & viam denique, qua in lineis, ſuperficiebus, ſolidiſque corporibus certa ratione centrum illud inveſtigare liceret. Unde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæſita fuerant, cognoſcendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Acceſſit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, ſæculiſque omnibus duraturæ, menſuræ definitionem abſolutiſſimam per hæc tradere poſſem; qualis eſt ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

DE-

DEFINITIONES.

De centro oscillationis.

I.

PEndulum dicatur figura quælibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.

II.

Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.

III.

Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.

IV.

Pendulum verò compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura quælibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.

V.

Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes,

nes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.

VI.

Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum.

VII.

Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.

VIII.

Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.

IX.

Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.

X.

Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.

XI.

Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.

XII.

XII.

Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineæve planum rectus est.

XIII.

Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.

HYPOTHESES.

I.

Si pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.

Altitudo autem in his secundum distantiam à plano horizontali consideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, secundum rectas ipsi perpendiculares, descendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expresse, vel à legentibus supplendum est, cum absque eo centri gravitatis consideratio locum non habeat.

Ipsa vero hypothesis nostra quominus scrupulum moveat, nihil aliud sibi velle eam ostendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe sursum non ferri. Nam primo, si unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis suæ altius ascendere non posse extra dubium est. ascendere autem tunc intelligitur scilicet, cum ejus centrum gravitatis ascendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter se per lineas inflexiles conjunctis, concedi necesse est, quoniam nihil vetat ipsa tanquam unum aliquod considerari.

Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro ascendere poterit.

Quod si jam pondera quotlibet non inter se connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis esse scimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compositæ altitudinem censeri debere; siquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci possunt, nullâ aliâ accersitâ potentiâ quam quæ ipsis ponderibus inest, sed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus est. Quare, sicut fieri non potest ut pondera quædam, in plano eodem horizontali posita, supra illud planum, vi gravitatis suæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque dispositorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum transiens, perduci posse, sic ostendetur.

Tab. XVII. Fig. 4.

Sint pondera A, B, C, positione data, quorum commune gravitatis centrum sit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus sectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera sibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A sit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Rursus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ secet planum E F in F; ubi necessario quoque erit centrum gravitatis binorum istorum ponderum connexorum, cum trium, in E, G, H, positorum, centrum gravitatis sit D, & ejus quod est in E, centrum gravitatis sit quoque in plano E D F. Moventur igitur rursus pondera H, G, super puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac simul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipsam sui centri gravitatis D altitudinem, suo

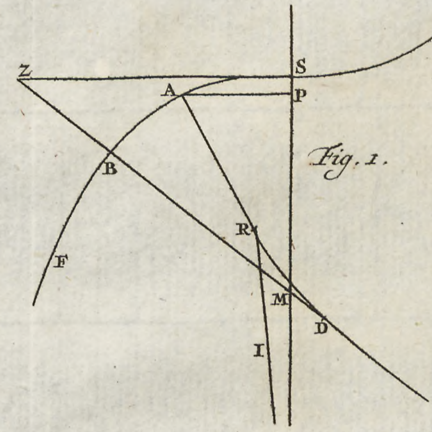


Fig. 1.

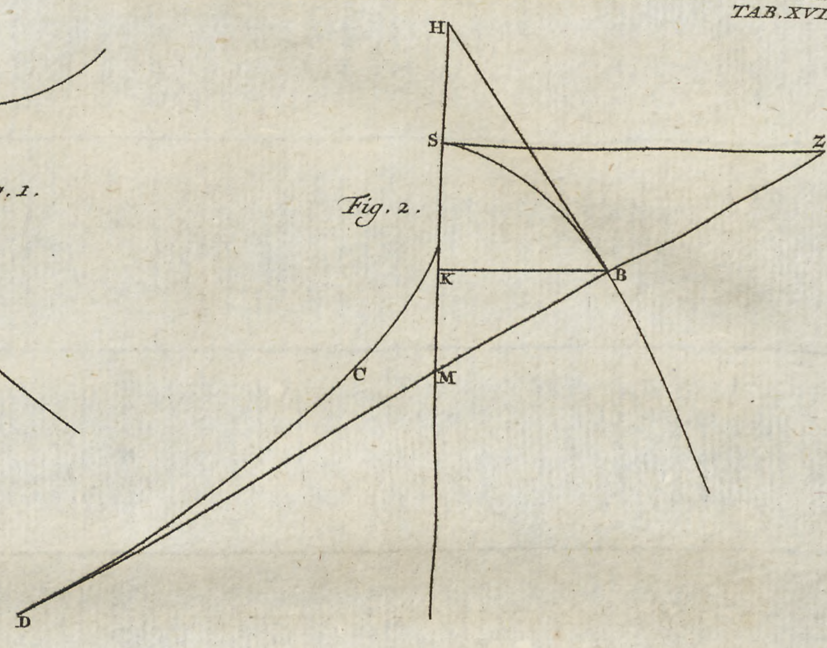


Fig. 2.

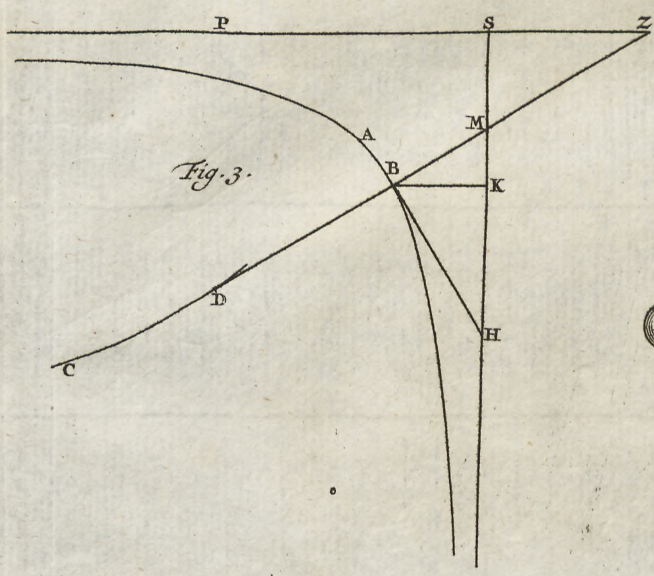


Fig. 3.

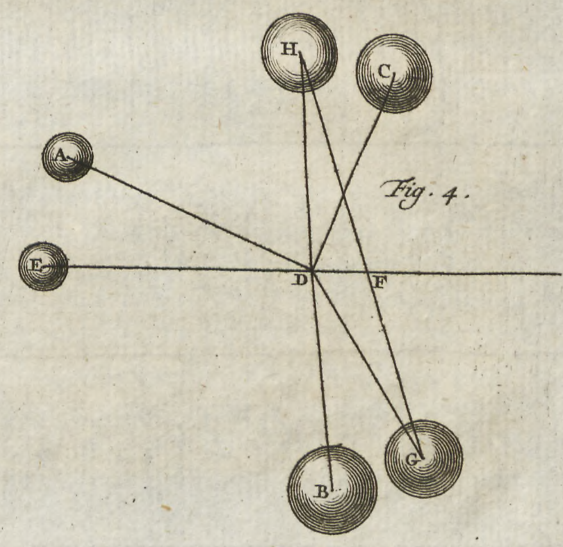
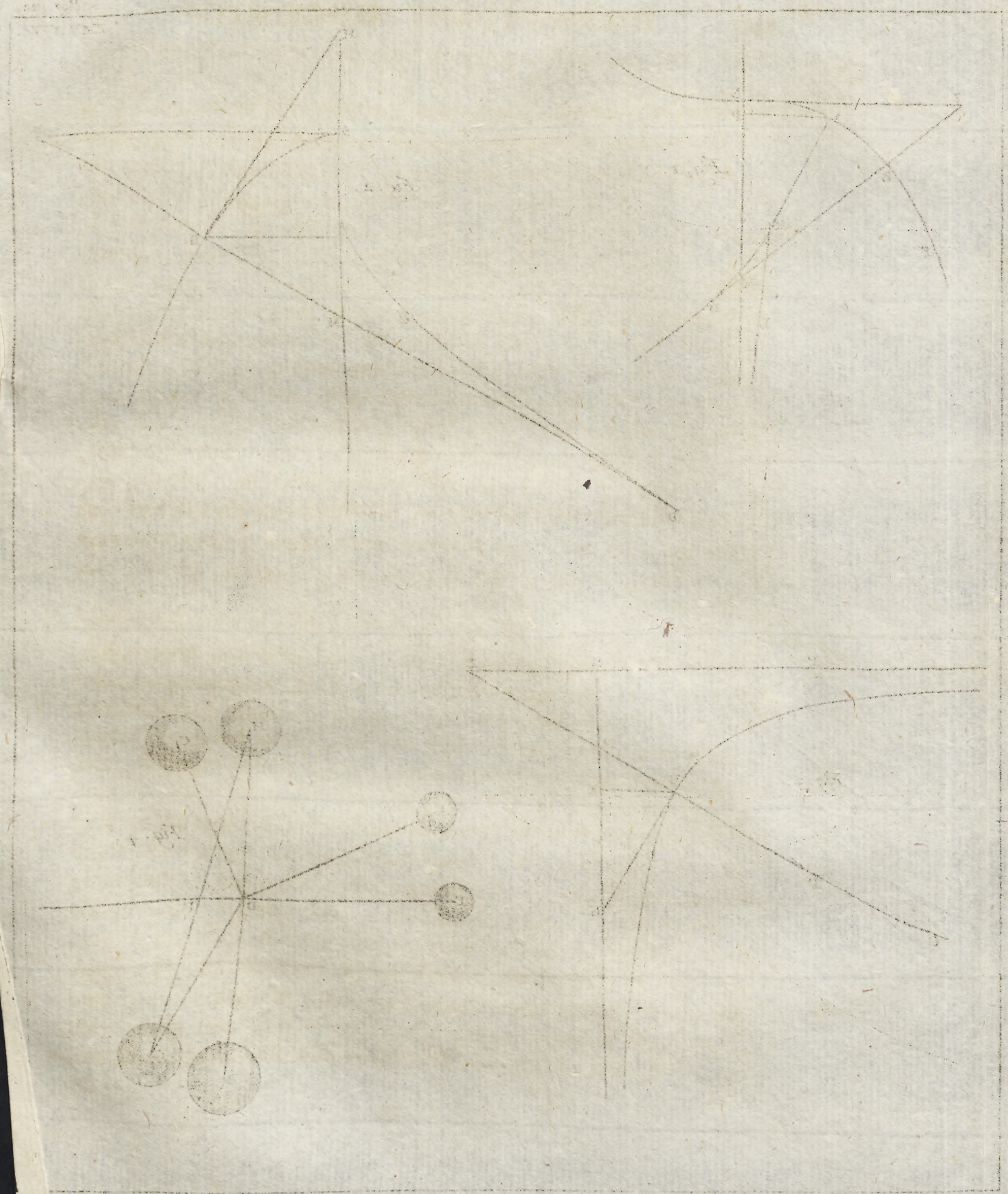


Fig. 4.



suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eademque de quotcunque aliis est demonstratio.

Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sanè, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haudquaquam possibilem esse.

I I.

Remoto aëris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi volumus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.

De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia; siquidem, quæcunque fuerit penduli figura, æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

PROPOSITIO I.

Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singulæ in sua pondera ductæ, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.

Sint pondera A, B, C, sita ad eandem partem plani, cu-

TAB. XVIII. Fig. 1.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

cujus ſectio recta D F, inque ipſum à ſingulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico ſummam productorum, quæ fiunt à ſingulis ponderibus in ſuas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.

Intelligantur enim perpendiculares, à ſingulis ponderibus eductæ, continuari in alteram partem plani D F, ſintque ſingulæ D K, E L, F M, ipſi H G æquales; omneſque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ ſingulæ cum ſibi oppoſitis A, B, C, æquilibrium faciant ad interſectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, ſicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, ſive G H, ductæ in K. Similiter E B in B æquabitur E L, ſive G H, in L; & F C in C æquabitur F M, ſive G H, in M. Ergo ſumma productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur ſummæ productorum ex G H in omnes K,L,M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipſis A, B, C, etiam iisdem A, B, C, ex centro ipſorum gravitatis G ſuſpenſis, æquiponderabunt. Unde, cum diſtantia G H æqualis ſit ſingulis D K, E L, F M, neceſſe eſt magnitudines A, B, C, ſimul ſumptas, æquari ipſis K, L, M. Itaque & ſumma productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonſtrandum.

Etſi vero in demonſtratione poſitæ fuerint rectæ A K, B L, C M, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, ſi omnia ſimul in alium quemlibet ſitum transponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes ſint eædem quæ prius. Quare conſtat propoſitum.

PRO-

PROPOSITIO II.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XVIII. Fig. 1.

Positis quæ prius, si pondera omnia A, B, C, sint æqualia; dico summam omnium perpendicularium A D, B E, C F, æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ, G H, multiplici secundum ponderum numerum.

Quum enim summa productorum, à ponderibus singulis in suas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia; sitque hic, propter ponderum æqualitatem, summa illa productorum æqualis producto ex uno pondere in summam omnium perpendicularium; itemque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem secundum ponderum numerum: patet summam perpendicularium necessario jam æquari ipsi G H, multiplici secundum ponderum numerum. quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Si magnitudines quædam descendant omnes, vel ascendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines descensus vel ascensus cujusque, in ipsam magnitudinem ductæ, efficient summam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine descensus vel ascensus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.

TAB. XVIII. Fig. 2.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C.

 In-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta M P, atque in ipsum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P.

Quia igitur summa productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis est facto ex G P in omnes A, B, C*. Similiterque summa productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

* Prop. I. huj.

PROPOSITIO IV.

SI pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.

TAB. XVIII. Fig. 3. 4.

Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F: attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto

ꝺto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt L G, M H, N K. Unde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines *, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex C B A D in K H G D. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercussa intelligantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales E F, F R, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius est quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

* Propos. 4. part. 2.

* Hypoth. 1. huj.

PROPOSITIO V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum sua-

suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

TAB. XIX. Fig. 1. 2.

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur), A, B, C, suspensa ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conspicitur, rectus intelligitur. In quo plano sit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diversis esse nihil refert. Distantia puncti E ab axe, nempe recta E D, vocetur d. Item ponderis A distantia A D, sit e; B D, f; C D, g. Ducendo itaque singula pondera in quadrata suarum distantiarum, erit productorum summa $aee + bff + cgg$. Et rursus, ducendo summam ponderum in distantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Unde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$. Cui longitudini si æqualis statuatur longitudo penduli simplicis F G, quæ etiam x vocabitur; dico hoc illi composito isochronum esse.

* Prop. 1. huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimissa librari, & in recta D E sumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oscillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium secabit. punctum vero L arcum illi similem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret similem arcum E I. Quod si in arcubus G M, N L, sumptis punctis quibuslibet, similiter ipsos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas esse ostendatur ponderis G in O, & puncti L in P; constabit inde æqualibus temporibus utros-

que

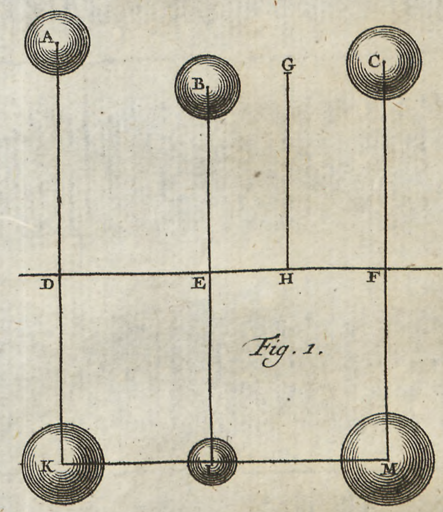


Fig. 1.

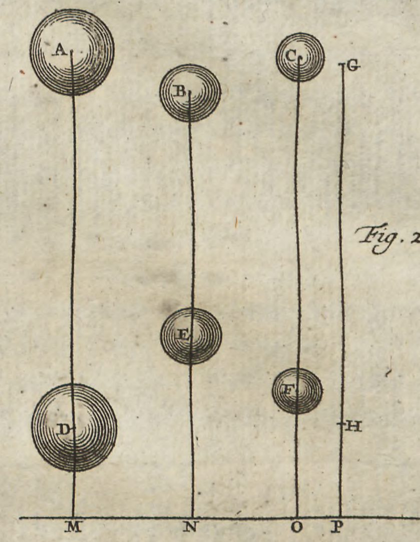


Fig. 2.

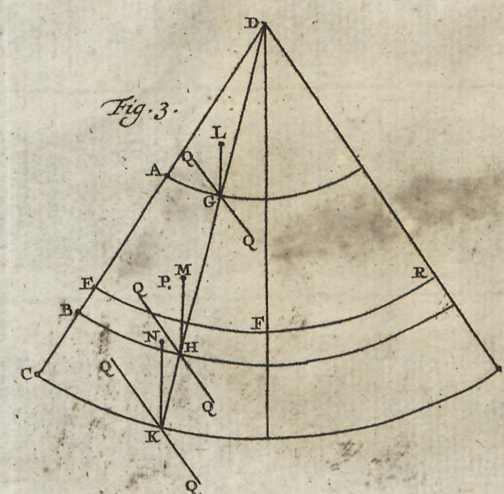


Fig. 3.

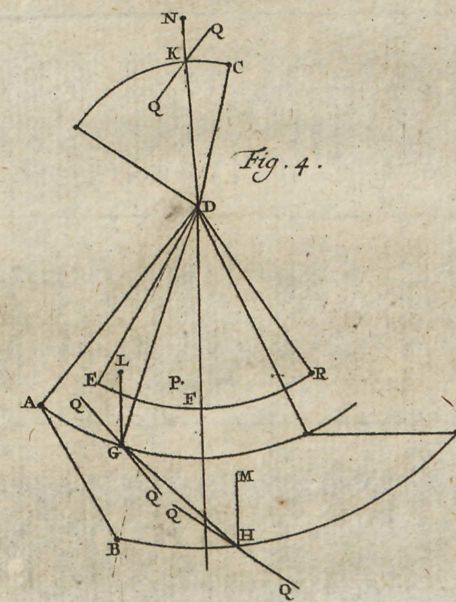
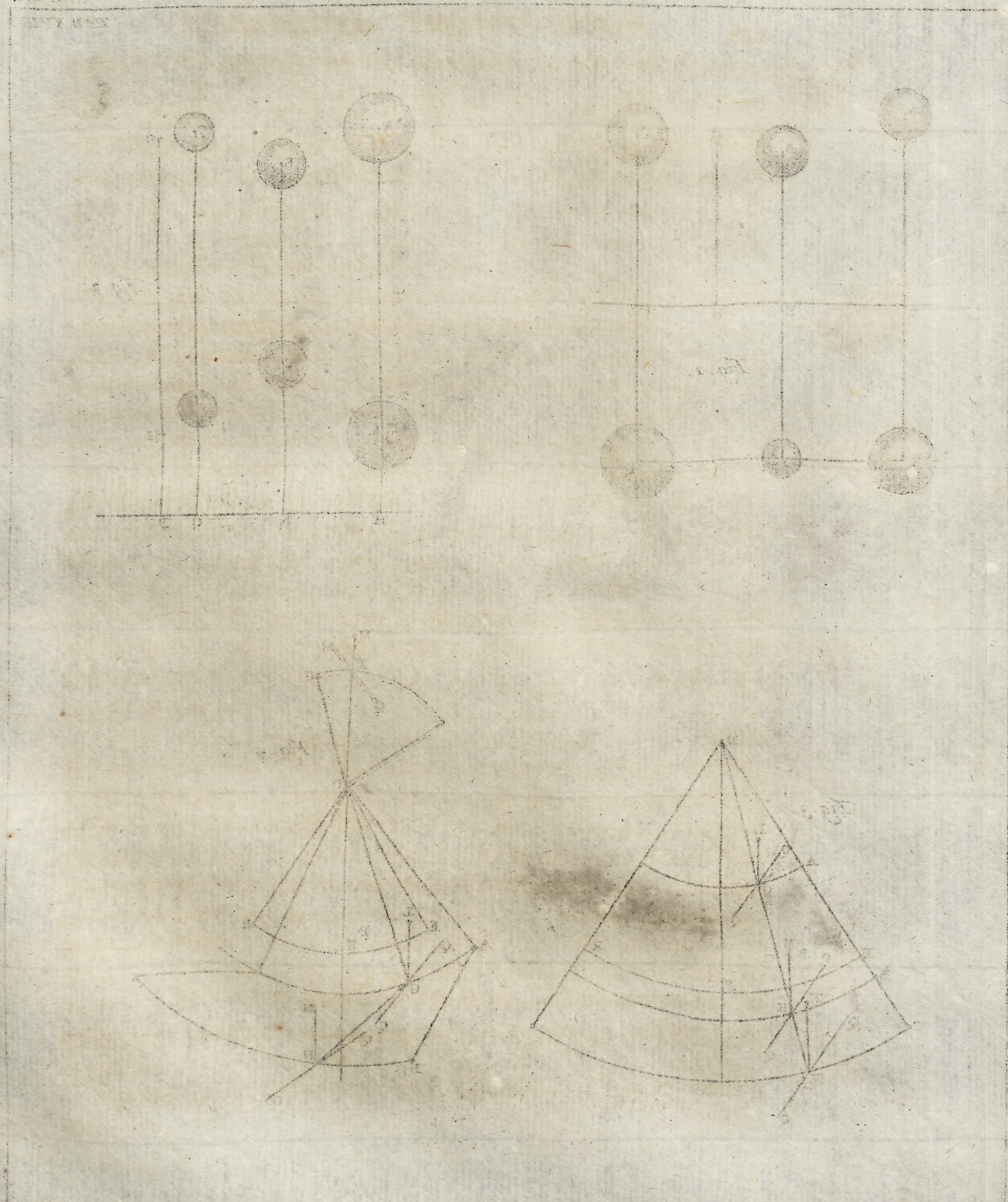


Fig. 4.



que arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe. Oſtendetur autem hoc modo.

Sit primo, ſi poteſt, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Conſtat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, ſimul centrum gravitatis E percurrere arcum ſimilem E Q. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares ſurſum, quæ occurrant ſubtenſis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y. & S P vocetur y. Unde, cum ſit ut L D, x, ad E D, d, ita S P, y, ad R Q; erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Jam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde deſcendit altitudinem aſcendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipſi P S æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua aſcenditur ad altitudinem P S. Dum vero L tranſit in P, ſimul pondera A, B, C, ſimiles arcus percurrunt ipſi L P, nimirum A T, B V, C X. Eſtque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, ſicut diſtantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita eſt altitudo ad quam illa celeritate aſcendi poteſt, ad altitudinem quò hac celeritate aſcendi poteſt *. Ergo etiam, ut quadratum diſtantiæ D L, quod eſt $x x$, ad quadratum diſtantiæ D A, quod eſt $e e$, ita eſt altitudo quo aſcenditur celeritate puncti L, quum eſt in P, (quæ altitudo major dicta eſt quam P S ſive y,) ad altitudinem quo aſcenditur celeritate ponderis A in T; ſi nempe poſtquam in T pervenit, relicto pendulo, ſeorſim motum ſuum ſurſum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$.

* Prop. 3. & 4. part. 2.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam aſcenderet pondus B, celeritate acquiſita per arcum B V, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam aſcenderet pondus C, celeritate acquiſita per arcum C X, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Unde, ductis ſingulis al-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

titudinibus istis in sua pondera, erit summa productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia posita est longitudo x æqualis $\frac{aee + bff + gg}{ad + bd + cd}$; erit $adx + bdx + cdx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in y, & dividendo per xx, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aecy + bffy + cggy}{xx}$. Unde quod dictum est consequitur. Est autem summa ista productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam ascendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in summam ipsorum ponderum, $a + b + c$; si nempe singula, uti dictum, seorsim quousque possunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex descensu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui descensus est R Q, sive $\frac{dy}{x}$, ut supra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum summam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus ostensum fuerit, sequitur ascensum centri gravitatis ponderum A, B, C, si, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, singula celeritates acquisitas sursum convertant, majorem fore ejusdem centri gravitatis descensu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod est absurdum, cum dictus ascensus descensui æqualis esse debeat, per antecedentem.

Eodem modo, si dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem esse celeritate ponderis G quum in O pervenerit; ostendemus ascensum possibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem esse quam descensum, quod eidem propositioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem sit celeritas puncti L, ad P translati, quæ ponderis G in O. Unde, ut superius dictum, sequitur pendulum simplex F G composito ex A, B, C, isochronum esse.

PROPOSITIO VI.

Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus composito; si summa quadratorum facto-

rum

rum à distantiis, quibus unumquodque pondus abest ab axe oscillationis, applicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni.

Sint posita eadem quæ prius, sed pondera omnia inter se æqualia intelligantur, & singula dicantur a. Rursus vero nulla eorum magnitudo consideretur, sed pro minimis habeantur, quantum ad extensionem.

Itaque penduli simplicis isochroni longitudo, per propositionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas divisa ac dividens utraque per a dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo significatur summa quadratorum à distantiis ponderum ab axe oscillationis, applicata ad distantiam centri gravitatis omnium ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum numerum ipsorum ponderum, qui hic est 3. facile enim perspicitur numerum hunc, in quem ducitur distantia d, respondere necessario ipsi ponderum numero. Quare constat propositum.

Quod si pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta sint, atque ex termino ejus superiore suspensa; constat distantiam centri gravitatis, ex omnibus compositæ, ab axe oscillationis, multiplicem secundum ponderum numerum, æquari summæ distantiarum omnium ponderum ab eodem oscillationis axe*; ac proinde, hoc casu, habebitur quoque longitudo penduli simplicis, composito isochroni, si summa quadratorum à distantiis ponderum singulorum ab axe oscillationis, dividatur per summam earundem omnium distantiarum.

* Prop. 2. huj.

DEFINITIO XIV.

SI fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, quæ deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiei descriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.

TAB. XXI. Fig. 3.

In schemate adjecto, est A B E C figura data; recta eam tangens M D; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, E F; cuneus autem figura solida planis A B E C, M F G, & parte superficiei, à recta E F descriptæ, comprehensa.

DEFINITIO XV.

DIstantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica.

TAB. XIX. Fig. 3.

Nempe in figura eadem, si K sit centrum gravitatis cunei, recta vero K I ad basin ejus A B E C perpendicularis ducta sit, & rursus I M perpendicularis ad M D; erit I M, quam subcentricam dicimus.

PROPOSITIO VII.

CUneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis

lis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus.

Sit, super figura plana A C B, cuneus A B D abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per E E, rectam tangentem figuram A C B, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam E E ducta sit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipsi F A æqualem.

Tab. XIX. Fig. 4.

Intelligatur enim figura A C B divisa in particulas minimas æquales quarum una G. Itaque constat, si harum singulæ ducantur in distantiam suam ab recta E E, summam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes *, hoc est, ei quod fit ducendo figuram ipsam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ singulæ ut G, in distantias suas G H ductæ, æquales sunt parallelepipedis, vel prismatibus minimis, super ipsas erectis, atque ad superficiem obliquam A D terminatis, quale est G K; quia horum altitudines ipsis distantiis G H æquantur, propter angulum semirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipse æquabitur solido super basi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonstrandum.

* Prop. 3. huj.

PROPOSITIO VIII.

SI figuram planam linea recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à singulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, simul sumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici secundum ipsarum particularum numerum; quod

nem-

nempe rectangulum fit à distantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à subcentrica cunei, qui per illam super figura abscinditur.

Tab. XIX. Fig. 4.

Positis enim cæteris omnibus quæ in constructione præcedenti, sit L A cunei A B D subcentrica in rectam E E. Oportet igitur ostendere, summam quadratorum omnium à distantiis particularum figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut G K, æquales esse distantiis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G, ab recta A E. Quare, si jam parallelepipedum G K ducamus in distantiam G H, perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantiæ G H. Eodemque modo se res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta A E, æquantur simul producto ex cuneo A B D in distantiam L A*, quia cuneus gravitat super puncto L. Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G, in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc est, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis est producto ex figura A C B in rectam F A*. Rursus quia figura A C B æqualis est producto ex particula una G, in numerum ipsarum particularum; sequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, à particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, sive à particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G, necesse est summam eandem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum in quas figura A C B divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

* Prop. præced.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta E D; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam E D, sicut à particula F ducta est F K. Oporteatque invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus.

TAB. XIX. Fig. 5. 6.

Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est E D, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A L sit recta G A, secans E D in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam A L, sit H A. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.

Occurrat enim F K, si opus est producta, tangenti A L in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta E D à figura distat, & tangens A L ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K L, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem insuper quadratis L F. Sed quadrata K L æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia esse constat totidem rectangulis

E A G,

E A G, quia omnes F L æquales totidem G A *. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G*, hoc est, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque insuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria ista; nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G; faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat ostendendum.

* Prop. 2. huj.
* Prop. præced.

Tab. XX. Fig. 1. 2.

Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K L, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F; hoc est, totidem quadratis E A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum totidem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rursus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare constat propositum.

Hinc sequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit A H; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum A L abscissi. Itaque A G unius casus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G illius. Sicut autem rectæ A G inter se, ita in utroque casu cunei per A L abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

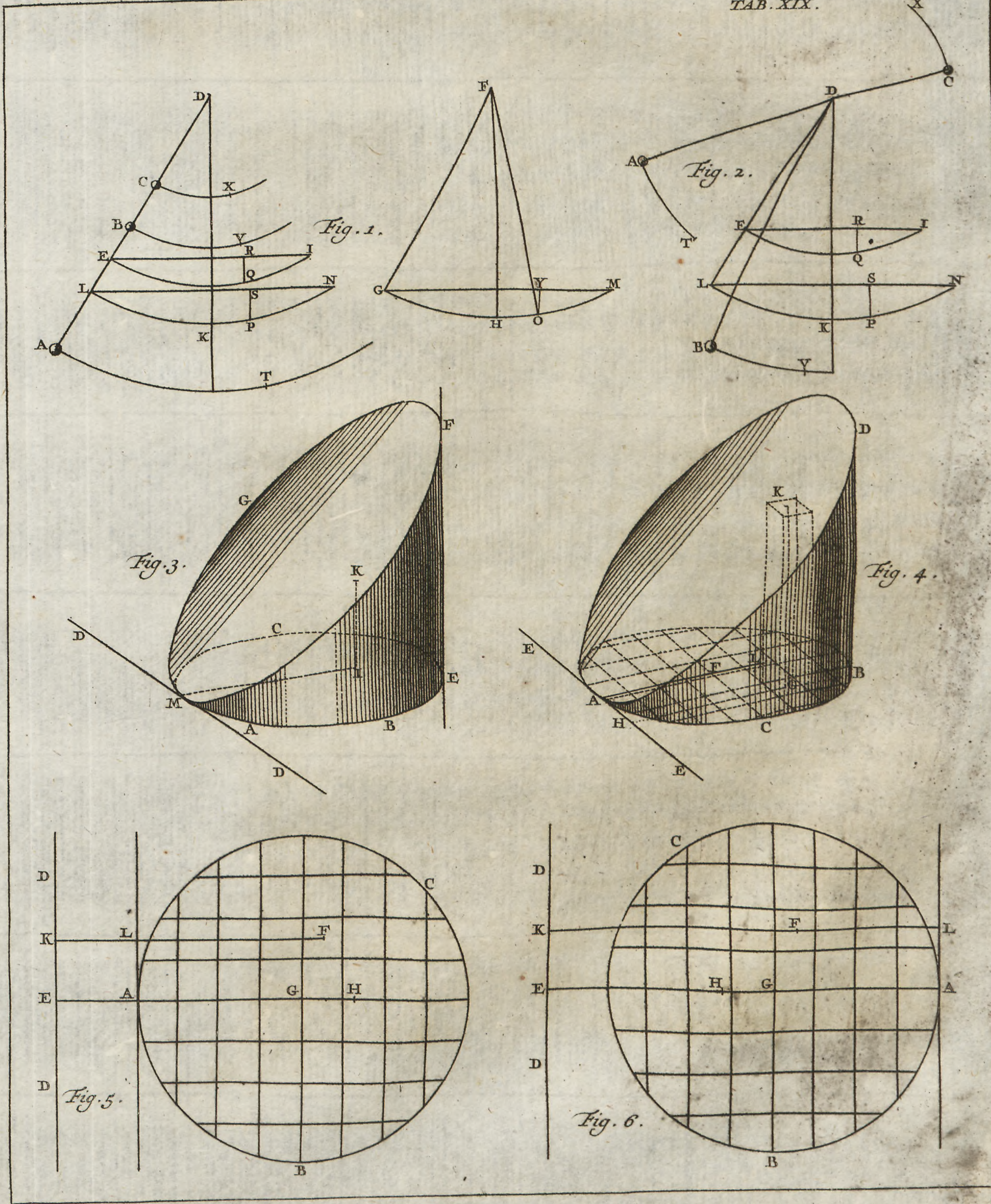
Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A L abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A L abscissi, subcentricam.

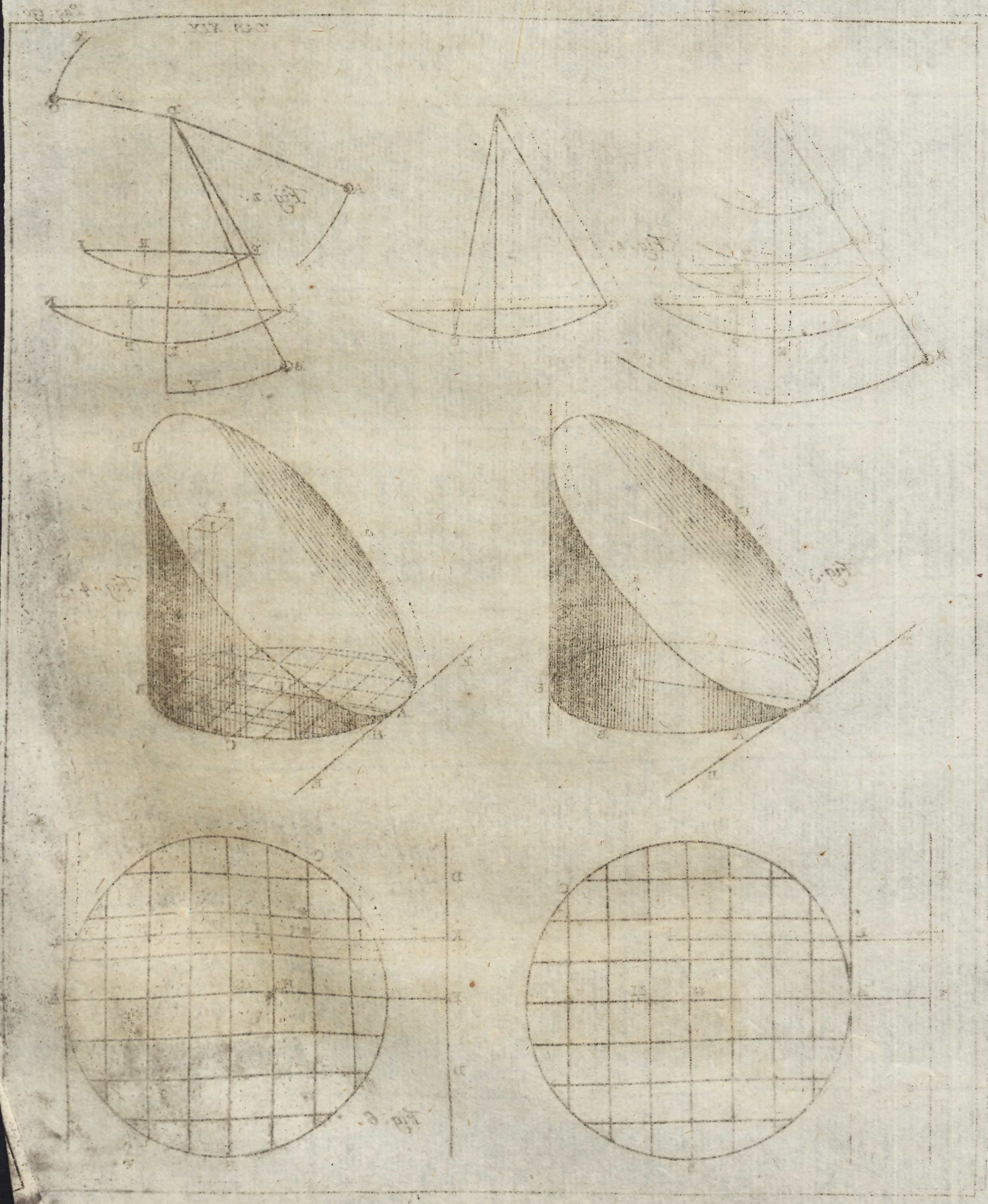
PROPOSITIO X.

Tab. XX. Fig. 3.

Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta E D *transeat per* G, *centrum gravitatis*

TAB. XIX.





tis figuræ A B C; *erit ſumma quadratorum à diſtantiis particularum, in quas figura diviſa intelligitur, ab recta* E D, *æqualis rectangulo ſoli* A G H, *multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum.*

Hoc enim manifeſtum eſt, quum nullum tunc ſit quadratum E G.

PROPOSITIO XI.

Tab. XX. Fig. 4.

Poſitis rurſus cæteris ut in præcedentium penultima; ſi D E *ſit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales ſimileſque portiones eam dividens, ſitque inſuper* V G *diſtantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, ſuper ipſam abſciſſi per ipſam* E D, *ſubcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H.

Eſt enim rectangulum X G V, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejuſdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium *. Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex ſecundum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demiſſarum; hoc eſt, rectangulo A G H multiplici ſecundum eundem particularum numerum, ut conſtat ex propoſ. præcedenti. Unde ſequitur rectangula X G V, A G H inter ſe æqualia eſſe. quod erat demonſtrandum.

* Prop. 8. huj.

PROPOSITIO XII.

Datis in plano punctis quotlibet; ſi ex centro gravitatis eorum circulus quilibet deſcribatur;

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia lineæ rectæ; erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano æqualis.

TAB. XX. Fig. 5.

Sint data puncta A B C D: centrumque gravitatis eorum, sive magnitudinum æqualium ab ipsis suspensarum, sit E; & centro E describatur circulus quilibet F *f*, in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.

Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O; C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipsam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipsam E R. Porro sit jam

A L ∞ *a*	A K ∞ *e*	radius E F ∞ *z*
B M ∞ *b*	B O ∞ *f*	G S ∞ *x*
C N ∞ *c*	C P ∞ *g*	
D H ∞ *d*	D Q ∞ *h*	

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; si addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta; earum partium uni æqualis erit E R *. Similiterque, divisâ in totidem partes summâ perpendicularium A K, B O, C P, D Q, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam G K, sive ipsa R G *. Itaque, si summa omnium A L, B M, C N, D H, sive $a + b + c + d$ vocetur l: summa vero omnium, A K, B O, C P, D Q, sive $e + f + g + h$, vocetur m: & numerus, dato-

* Prop. 2. huj.

* Prop. 2. huj.

datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur θ; erit $E R = \frac{l}{\theta}$; & $R G = \frac{m}{\theta}$. Cumque $G S$ sit x, erit $R S$ sive $F T = x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, si $G R$ major quam $G S$; & semper quadratum $F T = xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato $F E = zz$, relinquetur quadratum $T E = zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde $T E = \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem $E R = \frac{l}{\theta}$. Itaque $T R = \frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ $T R$, brevitatis gratia, dicatur y. Colligamus jam porro summam quadratorum omnium $F A$, $F B$, $F C$, $F D$. Quadratum $A F$ æquatur quadratis $A V$, $V F$. Est autem $A V$ æqualis differentiæ duarum $V K$, $A K$, sive duarum $S G$, $A K$; ac proinde $A V = x - e$ vel $e - x$; & qu. $A V = xx - 2ex + ee$. $V F$ vero æqualis est differentiæ duarum $F S$, $V S$ sive duarum $F S$, $A L$; ac proinde $V F = y - a$ vel $a - y$; & qu. $V F = yy - 2ay + aa$. Additisque quadratis $A V$, $V F$, fit quadratum $F A = xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum $F B$, $F C$, $F D$; atque omnia ordine disposita erunt hæc;

qu. $F A = xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. $F B = xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. $F C = xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. $F D = xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero summa; si ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh = nn$; & quadrata $aa + bb$, $+ cc + dd = kk$; erit ista, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem θ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, positumque fuerat $e + f + g + h = m$, & $a + b + c + d = l$.

In ista vero summa, si in terminis θyy & $2ly$, pro y, ponatur id cujus loco positum erat, nempe $\frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$

fiet $+ \theta yy = \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

 &

& $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

vel $+\theta yy \propto \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$.

$+2$ & $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

Ac proinde, utroque caſu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $-\frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quò appoſitis reliquis quantitatibus, ſumma prædicta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, fiet tota ſumma, nempe quadratorum F A, F B, F C, F D, $\propto \theta zz + nn + kk - \frac{mm + ll}{\theta}$. Quod apparet eſſe planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ ſint; ſemperque idem reperiri, ubicunque in circumferentia ſumptum fuerit punctum F. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi puncta data diverſas gravitates habere ponantur, invicem commenſurabiles, ut ſi punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rurſus deſcribatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac ſingularum quadrata multiplicia ſumantur ſecundum numerum ponderis puncti ſui; ut quadratum A F duplum, B F triplum, C F quadruplum, D F ſeptuplum; dico rurſus ſummam omnium æqualem fore ſpatio dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum ſumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonſtratione, ſi imaginemur puncta ipſa multiplicia ſecundum numeros attributæ cuique gravitatis; quaſi nempe in A duo puncta conjuncta ſint, in B tria, in C quatuor, in D ſeptem, atque illa omnia æqualiter gravia.

PROPOSITIO XIII.

Si figura plana, vel linea in plano exiſtens, aliter atque aliter ſuſpendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis ſuæ diſtent; agitata motu in latus, ſibi ipſi iſochrona eſt.

Sit

Sit figura plana, vel linea in plano existens A B C, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano describatur, E C F. Dico, si à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, suspensa figura agitetur in latus; sibi ipsi, sive eidem pendulo simplici, isochronam esse.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.
TAB.XX. Fig. 6.

Sit prima suspensio ex E puncto, quando autem est extra figuram, ut hic, putandum est lineam E H, ex qua figura pendet, rigidam esse, atque immobiliter ipsi affixam.

Intelligatur figura A B C divisa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ sint; quas quidem manifestum est, quum moveatur figura motu in latus, esse ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, divisa per rectam E D, multiplicem secundum numerum particularum in quas figura divisa est, efficiunt longitudinem penduli simplicis, figuræ isochroni *, quæ sit K L. Suspensâ autem figurâ ex puncto G, rursus longitudo penduli simplicis isochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punctum G, per rectam G D, multiplicem secundum earundem particularum numerum *. Quum igitur puncta G & E sint in circumferentia descripta cetnro D, quod est centrum gravitatis figuræ A B C, sive centrum gravitatis punctorum omnium, quæ centra sunt particularum figuræ æqualium; erit proinde summa quadratorum à lineis, quæ à dictis particulis ad punctum G ducuntur, æqualis summæ quadratorum à lineis quæ ab iisdem particulis ducuntur ad punctum E *. Hæ vero quadratorum summæ, utraque suspensione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in suspensione ex E, ad rectam E D, multiplicem secundum numerum omnium particularum; in suspensione autem ex G, ad rectam D G, multiplicem secundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac posteriori, quum nempe suspensio est ex G, fieri longitudinem penduli isochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc est, eandem ipsi K L.

* Prop. 6. huj.

* Prop. 6. huj.

* Prop. præced.

Eodem modo, si ex C, vel alio quovis puncto circumferentiæ E C F, figura suspendatur, eidem pendulo K L isochrona esse probabitur. Itaque constat propositum.

PROPOSITIO XIV.

Datâ figurâ solidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam transeat; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.

TAB. XXI. Fig. 1.

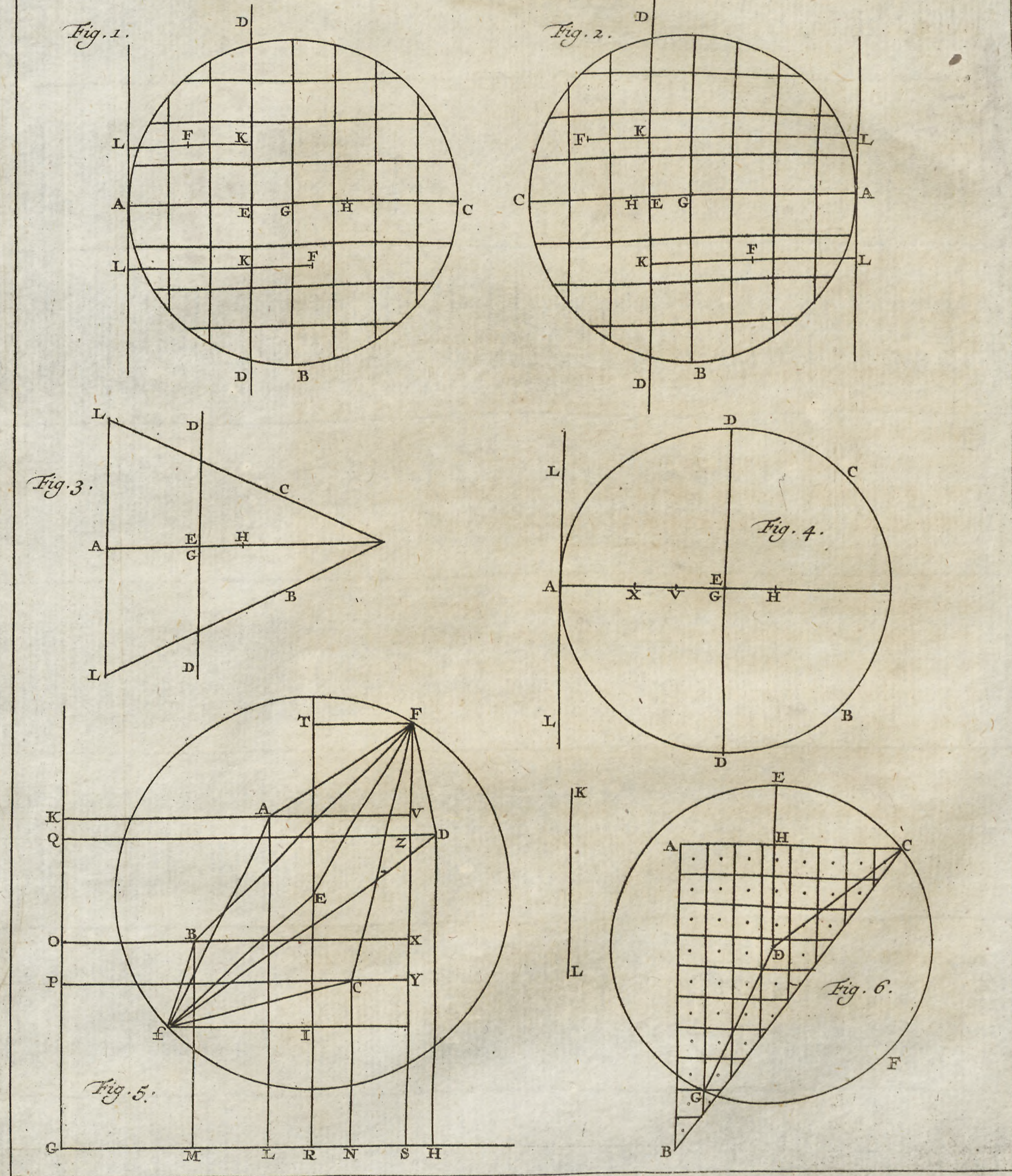
Sit data figura solida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum A B C D constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E summam invenire.

Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula dictarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut F E, æquari quadratis duarum F G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur*. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per E G & E C; habebimus etiam huic æqualem summam

* 47. lib. 1. Eucl.

TAB. XX.



mam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ solidæ A B C D, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis Q Q, R R, quæ respondeant planis figuram solidam A B C D secantibus M M, N N, & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Ut si linea R R sit ad Q Q quemadmodum planum N N ad M M. Quod si igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido A B C D; erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut Q Q R R, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento M M N N, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G; æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ propos. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejusdem cum solido A B C D latitudinis, hoc est, quam includant plana B Y, D Z solidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis V V, X X &c. quæ respondeant planis figuram A B C D secantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illorum

rum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z; nec non distantia indidem centri gravitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam *. Vel, figura S Y T Z ordinata existente, ut S T sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergo & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostensa, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per E transeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

PROPOSITIO XV.

TAB. XXI. Fig. 1. & 2.

Isdem positis, si solidum A B C D *sit ejusmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis à tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere est,* O Q P, *detur distantia* Φ P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abest ab axe* O P; *licebit hinc invenire summam quadratorum à distantiis particularum solidi* A B C D *à plano* E C. *Oportet autem ut sectiones omnes,* N N, M M, *sint plana similia; utque per omnium centra gravitatis transeat planum* E C; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris*

ris contingit. Atque eorum planorum distantias centri gravitatis, super tangentibus axi oscillationis parallelis, datas esse necesse est; uti & subcentricas cuneorum, qui super ipsis abscinduntur, ductis planis per easdem tangentes.

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr. sectionis B D à dicta linea in B, quæ sit B C; itemque subcentricam cunei, super sectione B D abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit B K. Fig. 2.

Etenim his datis, divisâque P V bifariam in Δ, si fiat sicut Δ P ad P Φ, ita rectangulum B C K ad spatium quoddam Z; dico hoc ipsum, multiplex per numerum particularum solidi A B C D, æquari summæ quæsitæ quadratorum, à distantiis earundem particularum à plano E C.

Quadrata enim à distantiis particularum planæ sectionis B D, à plano E C, quod per centrum gravitatis suæ transit; sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti B N N D à plano eodem, æquari constat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, si planæ sectionis N N distantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, sit N X; subcentrica vero cunei super ipsa abscissi, plano per eandem rectam, sit N F; erunt quadrata à distantiis particularum planarum sectionis N N à plano E C, sive quadrata à distantiis particularum solidarum segmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipsarum sectionis N N, vel segmenti N M M N. Est autem B D divisa similiter in C & K, atque N N in X & F. Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, sicut quadratum B D ad quadratum N N.

* Prop. 10. huj.

Est autem & numerus particularum sectionis B D, ad numerum particularum sectionis N N, sicut sectiones ipsæ;

 hoc

hoc eſt, ſicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum ſectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum ſectionis N N, duplicatam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N; hoc eſt, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti B N N D à plano E C, ad ſummam alteram quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti N M M N, ut qu. V V ad qu. R R. Eademque ratione oſtendetur, ſummas quadratorum à diſtantiis partiIarum in reliquis ſegmentis ſolidi A B C D, eſſe inter ſe in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ baſi cujusque ſegmenti reſpondent. Quare ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum omnium ſegmentorum ſolidi A B C D à plano E C, erit ad ſummam quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmentorum totidem, maximo ſegmento æqualium, hoc eſt, cylindri vel priſmatis B D S S, eandem cum ſolido A B C D baſin altitudinemque habentis, ſicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. ad quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc eſt, ſicut ſolidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui baſin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem ſolidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi conſtat ex ratione planorum quorum converſione generantur, hoc eſt, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione diſtantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abſunt ab axe O P; hoc eſt, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem eſt quæ ſolidi A B C D ad cylindrum vel priſma B D S S, hoc eſt, eadem quæ numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, eſt eadem, ex conſtructione, quæ ſpatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta ſumma quadratorum, à diſtantiis omnium particularum

larum ſolidi A B C D à plano E C, ad ſummam quadratorum, à diſtantiis omnium particularum cylindri vel priſmatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S, & ex ratione ſpatii Z ad rectangulum B C K: hoc eſt, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis eſt ſecundæ; nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S, æquale ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ejuſdem priſmatis vel cylindri B D S S à plano E C; ſiquidem rectangulum idem B C K, multiplex per numerum particularum ſegmenti B N N D, æquatur quadratis diſtantiarum particularum ejuſdem ſegmenti à plano E C *. Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ſolidi ejuſdem A B C D à plano E C *. quod erat demonſtrandum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 10. huj.

* Prop. 14. lib. 5. Eucl.

Notandum vero, quando ſolidum A B D rotundum eſt circa axem A C, fieri ſemper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C; quoniam ſubcentrica cunei, abſciſſi ſuper circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur $\frac{1}{4}$ radii B C. Unde, ſi P V æqualis poſita ſit B C, ſequitur, faciendo ut P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc eſt, $\frac{1}{4}$ quadrati B C, hoc eſt, qu. P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipſum rectangulum Δ P Φ, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi A B D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iiſdem cadunt in planum E C.

PROPOSITIO XVI.

Figura quævis, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum; si aliter atque aliter suspendatur, agiteturque super axibus inter se parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter distent, sibi ipsi isochrona est.

TAB.XXI. Fig. 3.

Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, sitque primo suspensa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oscillationis. In quo si centro E, radio E F, describatur circumferentia F H G, sumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo secundò suspendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oscillationis plano. Dico isochronam fore sibi ipsi agitatæ circa axem in F.

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis; manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio A B C D.

Quum igitur E sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus est ad planum A B C D, quovis situ æquilibrium servet; facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio A B C D signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum E. Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse E punctum.

Porrò

Porrò summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ à singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H, patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio A B C D signatis, ducuntur ad punctum H, eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis *; & rectæ quoque E F, E H, inter se æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H. Quare constat propositum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 12. huj.

PROPOSITIO XVII.

Dato plano, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensæ magnitudinis, orietur longitudo penduli simplicis ipsi isochroni.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sit figura A B C, cujus centrum gravitatis E, suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H, cujus multiplex per numerum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc esse longitudinem penduli simplicis, isochronas oscillationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.

TAB. XXII. Fig. 1.

Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni*. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam F E, multiplicem secundum particularum numerum; sive, omissa communi multiplicitate, si planum H applicetur ad distantiam F E; orietur quoque longitudo penduli simplicis isochroni. Quam proinde ipsam longitudinem F G esse constat. quod erat demonstrandum.

* Prop. 6. huj.

PROPOSITIO XVIII.

Si spatium planum, cujus multiplex secundum numerum particularum suspensæ magnitudinis, æquetur quadratis distantiarum ab axe gravitatis, axi oscillationis parallelo; id, inquam, spatium si applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis ejusdem magnitudinis.

TAB. XXII. Fig. 2.

Esto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E; quæ-

quæque suspensa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oscillationis G. Porrò axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E transiens, parallelus. Divisaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, sit quadratis distantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe secundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad distantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem esse intervallo E G, quo centrum oscillationis inferius est centro gravitatis magnitudinis A B C D.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Ut enim universali demonstratione quod propositum est comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adposita, O Q P; quæ nempe, secta planis horizontalibus iisdem cum magnitudine A B C D, habeat segmenta intercepta inter bina quæque plana, in eadem inter se ratione cum segmentis dictæ magnitudinis, quæ ipsis respondent; sintque segmenta singula figuræ O Q P, divisa in tot particulas æquales, quot continentur segmentis ipsis respondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi possunt fieri, qualiscunque fuerit magnitudo A B C D, sive linea, sive superficies, sive solidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod sit T, eadem altitudine esse manifestum est cum centro gravitatis magnitudinis A B C D; ideoque, si planum horizontale, per F ductum, secet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales esse distantias S T, F E.

Porrò autem constat quadrata distantiarum, ab axe oscillationis F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli isochroni*; quæ longitudo posita fuit F G. Illorum vero quadratorum summam, æqualem esse perspicuum est, quadratis distantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis distantiarum à plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto*. Atqui quadrata distantiarum magnitudinis A B C D à plano horizontali per F, æquantur quadratis distantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ qua-

* Prop. 6. huj.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

quadrata (si O sit punctum supremum figuræ O Q P, & O H subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per rectam O V, parallelam S F) æqualia sunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus secundum numerum particularum dictæ figuræ *, sive magnitudinis A B C D. Quadrata vero distantiarum magnitudinis A B C D à plano F E, quantumcunque axis oscillationis F distet à centro gravitatis E, semper eadem sunt: quæ proinde putemus æquari spatio Z, multiplici secundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata distantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oscillationis F, æquantur istis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejusdem magnitudinis; si applicentur hæc omnia ad distantiam F E sive S T, orietur longitudo F G penduli isochroni magnitudini A B C D*. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus suum S T, orietur ipsa S T, sive F E. Ergo reliqua E G est ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare superest ut demonstremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim constabit, etiam planum I, applicatum ad distantiam F E, efficere longitudinem ipsi E G æqualem. Illud autem sic ostendetur. Rectangulum O T H, multiplex secundum numerum particularum figuræ O Q P, sive magnitudinis A B C D, æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta X T *, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipsi S F parallela; ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis A B C D, à plano horizontali K K, ducto per centrum gravitatis E; cum distantiæ utrobique sint eædem. At vero planum Z, similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis A B C D à plano verticali F E. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum à plano F E, una cum dictis quadratis distantiarum à plano horizontali per E, æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per E,

* Prop. 10. huj.

qui

qui sit axi F parallelus *. Itaque rectangulum O T H una cum plano Z, multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis A B C D, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum I æquale est rectangulo O T H & plano Z simul sumptis. quod ostendendum supererat.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 47. lib. 1. Eucl.

Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

Sive enim magnitudo A B C D suspendatur ab axe F, sive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per E, qui sit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis; Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L, fuerit dicta distantia E Y, erit ipsa æqualis E G; & tota Y L æqualis G F; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum fit magnitudini A B C D.

PROPOSITIO XIX.

Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantiæ axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantiæ centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, suspensa primum

TAB. XXII. Fig. 1.

mum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; sitque in prima suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A.

Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, qua nempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum.

* Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

PROPOSITIO XX.

Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.

Tab. XXII. Fig. 3.

In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspensionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est.

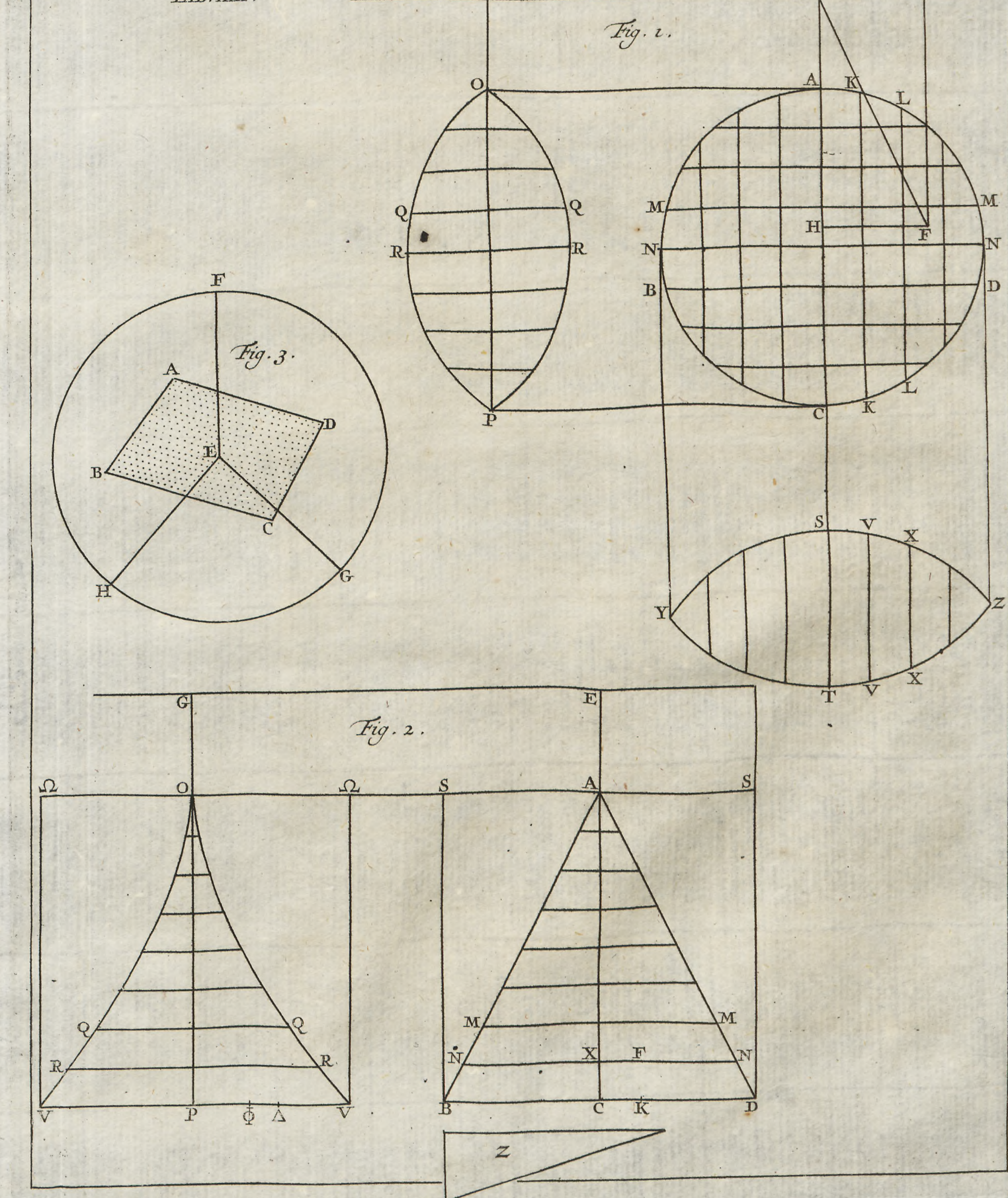
PROPOSITIO XXI.

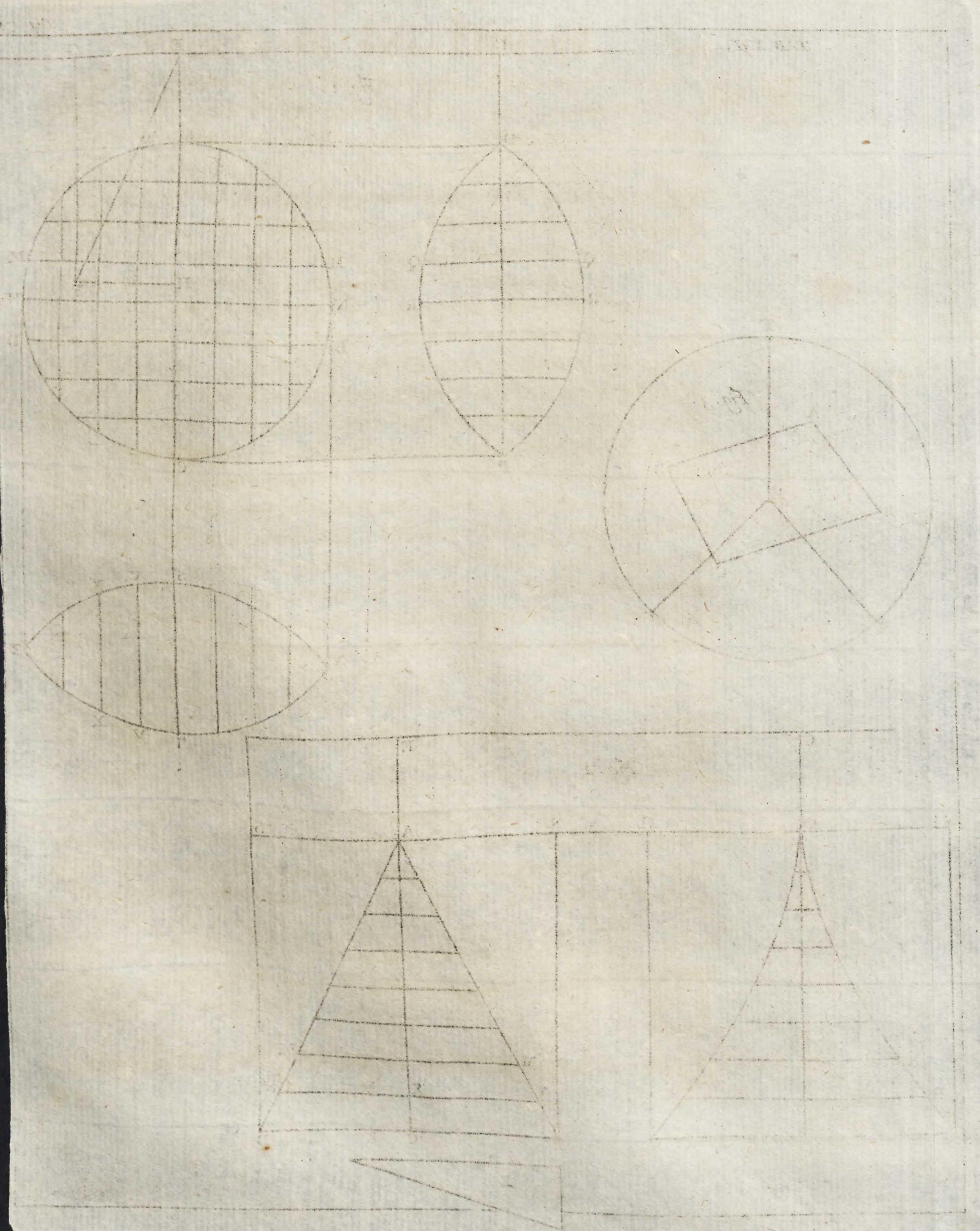
Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur.

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit

in

TAB. XXI.





in pleriſque figuris, quæ in Geometria conſiderari conſueverunt, definire oſcillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oſcillationis motum ſupra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus ſit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quod ſi priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, ſicut figura B C D circa axem E F; hic, ſi cuneus ſuper figura intelligatur abſciſſus, plano quod ita ſecet planum figuræ, ut interſectio, quæ hic eſt D D, ſit parallela oſcillationis axi; deturque diſtantia centri gravitatis figuræ ab hac interſectione, ut hic A D; itemque ſubcentrica cunei dicti ſuper eadem interſectione, quæ hic ſit D H. Habebitur centrum oſcillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad diſtantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis. Eſt enim rectangulum D A H, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis diſtantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravitatis A parallela ducitur axi oſcillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad diſtantiam F A, orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis A *.

TAB. XXII. Fig. 4. & 5.

* Prop. 12. huj.

* Prop. 18. huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi axis oſcillationis ſit D D, fieri centrum oſcillationis H punctum; adeoque longitudinem D H, penduli ſimplicis iſochroni figuræ B C D, eſſe tunc ipſam ſubcentricam cunei, abſciſſi plano per D D, ſuper ipſam D D. Quod unum ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum ſuper figuris planis inveniantur, perſequi non eſt inſtituti noſtri, & jam in multis nota ſunt. Velut, quod ſi figura B C D ſit circulus, erit D H æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit D H ∞ $\frac{2}{3}$ diametri. Unde & ratio apparet cur virga, ſeu linea gravitate prædita, altero capite ſuſpenſa, iſochrona ſit pen-

dulo longitudinis subsesquialteræ. Considerando nempe lineam ejusmodi, ac si esset rectangulum minimæ latitudinis.

Quod si figura triangulum fuerit, vertice sursum converso, fit D H $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorsum, $\frac{1}{2}$ diametri.

Quod autem propositione 16 demonstratum fuit, id ad hujusmodi figuræ planæ motum ita pertinere sciendum. Nempe, si aliam atque aliam positionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo penduli isochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propositione illa manifestum est.

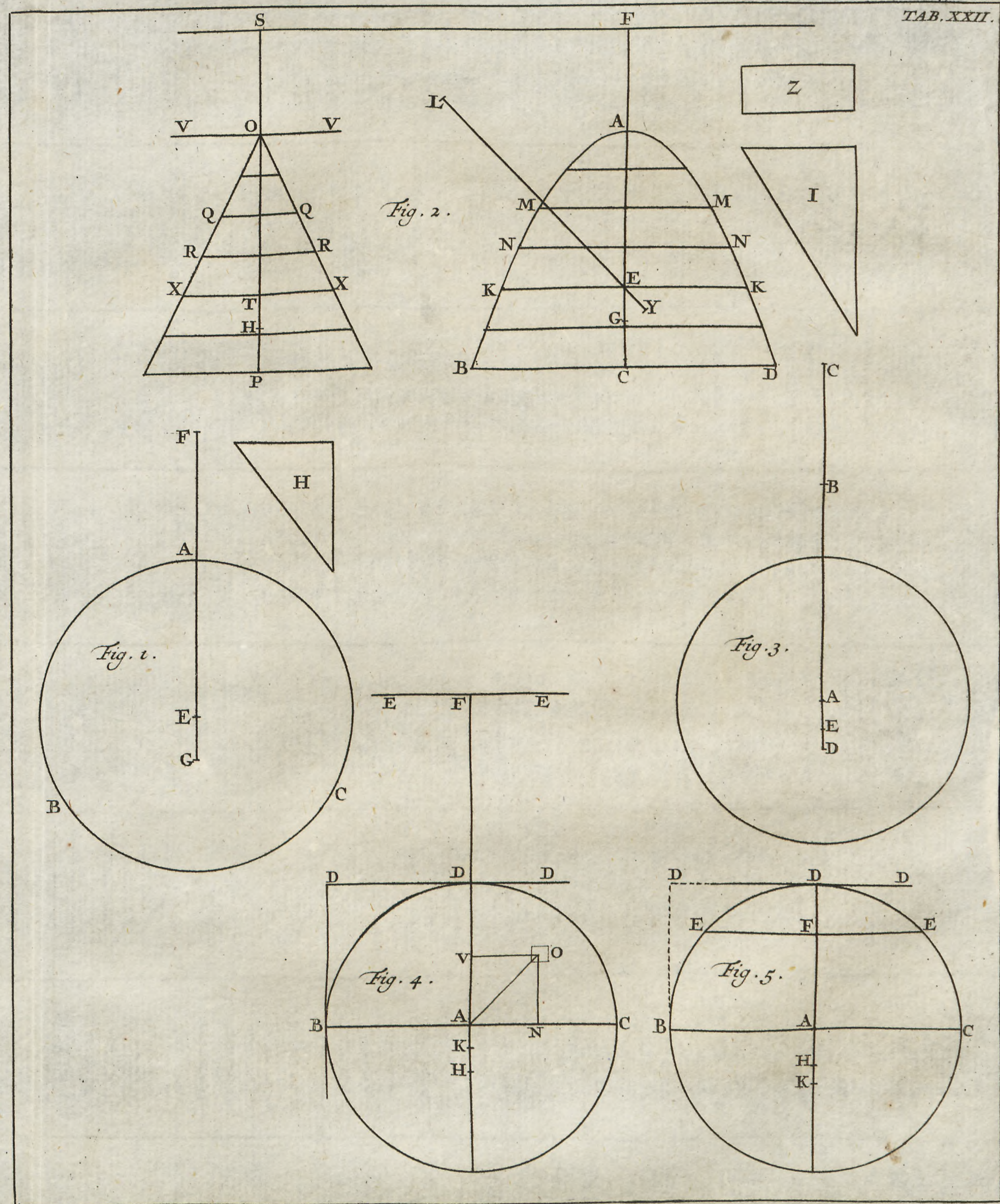
TAB. XXIII. Fig. 1. & 2.

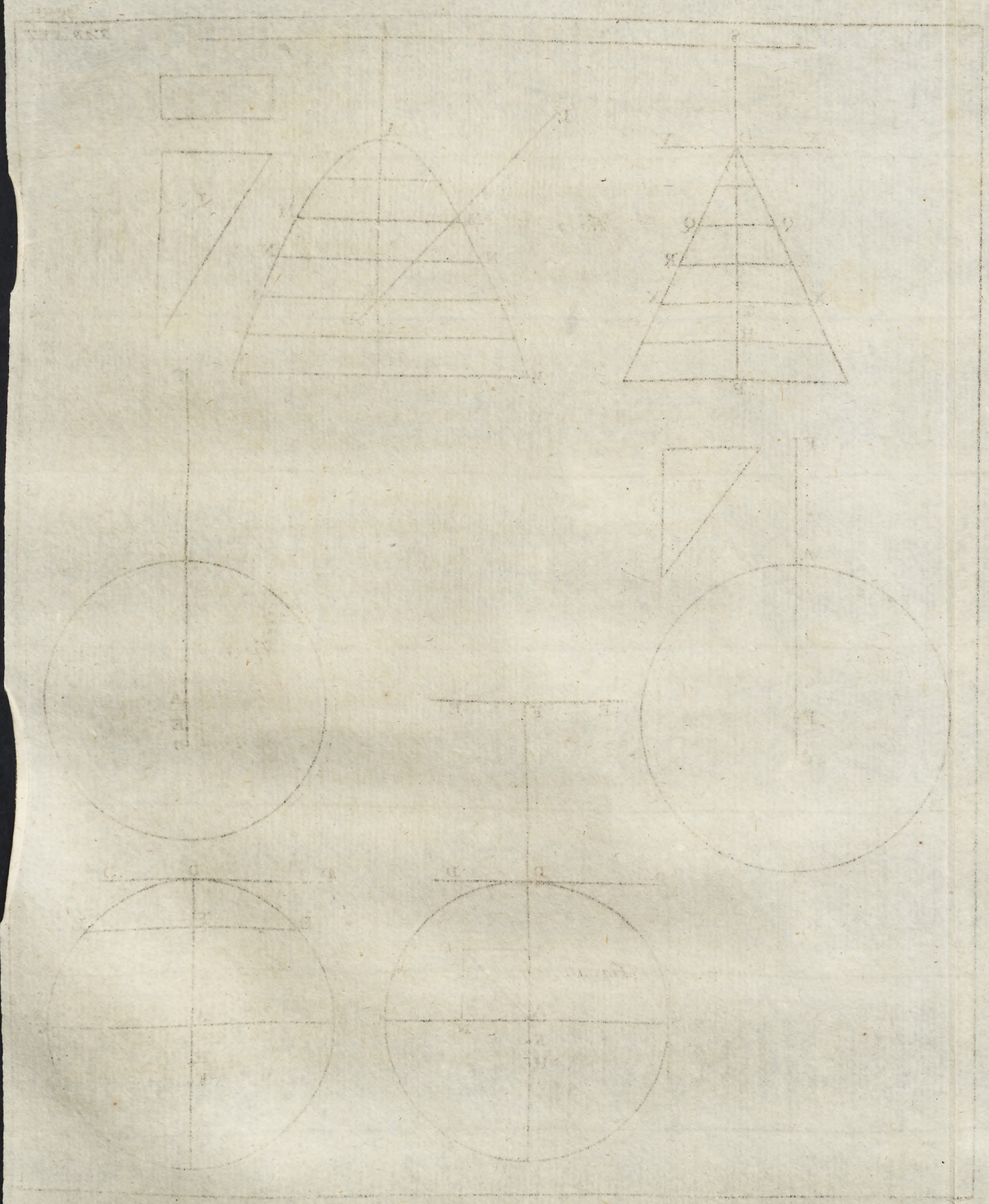
Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut si figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus; hic jam habenda est summa quadratorum a distantiis particularum omnium ab recta quæ per centrum gravitatis A intelligitur axi oscillationis parallela; secundum ea quæ prop. 18. exposita fuere. Hoc est summa quadratorum a distantiis ab ipso A centro gravitatis, quoniam figura plana est. Sive etiam summæ quadratorum a distantiis tam ab recta B A C quam ab recta D A. Constat enim quadratum rectæ O A, quam pono esse distantiam unius cujusdam particulæ a centro A, æquari quadratis distantiarum O N, O V, quibus eadem particula abest a rectis B A C, D A *. Atqui summa quadratorum a distantiis ab recta B A C æquatur rectangulo D A H, si D H sit subcentrica cunei super figura abscissi per tangentem D D, parallelam B A *. item summa quadratorum a distantiis ab recta D A æquatur rectangulo B A L, si B L sit subcentrica cunei abscissi per tangentem B D parallelam A D. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, subcentricamque H D cunei prioris, etiam subcentricam L B cunei posterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ simul sumpta faciunt hic spatium applicandum, quod deinceps etiam rectangulum oscillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad distantiam

* Per 47. lib. 1. Elem.

* Prop. 10. huj.

F A,


S
F
Z
V O V
L
A
Q Q
R R
X X
T
H
P
Fig. 2.
M M
N N
K K
E
G
Y
I
B C D
C
F
H
B
A
Fig. 1.
E
G
B
C
Fig. 3.
A
E
D
E F E
D D D
V O
Fig. 4.
B A N C
K
H
D D D
E F E
Fig. 5.
B A C
H
K



F A, dabit distantiam A K, qua centrum oscillationis K inferius est centro gravitatis A.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Si vero F A sit axis figuræ B C D, potest, pro cuneo abscisso per B D super figura tota, adhiberi cuneus super figura dimidia D B M abscissus plano per D M. Nam, si cunei hujus subcentrica super D M sit O A, distantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M sit N A, æquale esse constat rectangulum O A N rectangulo B A L *. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, constituet quoque planum applicandum ad distantiam F A, ut fiat distantia A K.

TAB. XXIII. Fig. 1.

* Prop. 11. huj.

Et horum quidem manifesta est demonstratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia secundum numerum particularum figuræ, æqualia sint quadratis distantiarum à centro gravitatis A; sive, quod idem hic est, ab axe gravitatis axi oscillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad distantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K *.

* Prop. 18. huj.

Centrum oscillationis Circuli.

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter se æqualia esse liquet, simulque efficere semissem quadrati à semidiametro. Unde, si fiat ut F A ad semidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit distantia A K, à centro gravitatis ad centrum oscillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia sumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in sequentibus figuris planis centra oscillationis quæsivimus, quæ simpliciter adscripsisse sufficiet. Nempe,

Centrum oscillationis Rectanguli.

In rectangulo omni, ut C B, spatium applicandum, sive rectangulum oscillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à semidiagonio A C. Unde sequitur, si rectangulum

TAB. XXIII. Fig. 3.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

ab aliquo angulorum suspendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi isochronum esse $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

Centrum oscillationis Trianguli isoscelis.

TAB. XXIII. Fig. 4.

In triangulo isoscele, cujusmodi C B D, spatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigesimæ quartæ quadrati baseos C D. Unde, si ab angulo baseos ducatur D G, perpendicularis super latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G; sitque A centrum gravitatis trianguli; divisoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipsi B A; erit B K longitudo penduli isochroni, si triangulum suspendatur ex vetrice B. Cum autem ex puncto mediæ basis E suspenditur, longitudo penduli isochroni E K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum isosceles rectangulum, si ex puncto mediæ basis suspendatur, isochronum esse pendulo longitudinem diametro suæ æqualem habenti. Similiterque, si suspendatur ab angulo suo recto, eidem pendulo isochronum esse.

Centrum oscillationis Parabolæ.

In parabolæ portione recta, spatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ basis. Cumque parabola ex verticis puncto suspensa est, invenitur penduli isochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque insuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ basis suspenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & insuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

Centrum oscillationis Sectoris circuli.

TAB. XXIII. Fig. 5.

In circuli sectore B C D, si radius B C vocetur r: semi arcus C F, p: semisubtensa C E, b: fit spatium applicandum æquale $\frac{1}{2}rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc est, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A; ponendo A esse centrum gravitatis sectoris. Tunc enim B A ∞ $\frac{2br}{3p}$. Si autem suspendatur sector

ex

ex B, centro circuli sui, fit pendulum ipsi isochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc est, trium quartarum rectæ, quæ sit ad radium B F ut arcus C F D ad subtensam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis subcentricis cuneorum; tum illius qui super sectore toto abscinditur, plano ducto per B K parallelam subtensæ C D, cujus cunei subcentricam super B K invenimus esse $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3pr}{8b}$, vocando a sinum versum E F; tum illius qui super dimidio sectore B F C abscinditur plano per B F, cujus nempe cunei subcentricam super B F invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$.

De centro oscillationis.

Sed & alia via, sectoris centrum oscillationis, facilius invenitur, quæ est hujusmodi. Intelligatur sectoris B C D pars minima sector B C P, qui trianguli loco haberi potest. Quadrata autem, à distantiis particularum ejus à puncto B, æqualia sunt quadratis distantiarum ab recta B R, bifariam sectorem dividente, una cum quadratis distantiarum ab recta B Q, quæ ipsi B R est ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data est major, quoniam angulus C B P minimus; ideoque illa pro nullis habenda sunt.

TAB. XXIII. Fig. 6.

Positâ vero B O duarum tertiarum B R, hoc est, posito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R: ut nempe N sit centrum gravitatis cunei, super triangulo B C P abscissi plano per B Q. His positis, constat quadrata, à distantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici secundum particularum ejusdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale censendum quadratis distantiarum à puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata distantiarum harum, ad quadrata distantiarum totius sectoris B C D, sicut sector B C P ad sectorem B C D, hoc est, sicut numerus particularum sectoris B C P, ad numerum particularum sectoris B C D; hoc enim facile intelligitur, eo quod sector B C D dividatur in sectores qualis B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex secundum

nume-

DE CENTRO OSCILLATIONIS. numerum particularum ſectoris B C D, æquale erit quadratis diſtantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, diſtantiam inter ſuſpenſionem & centrum gravitatis ſectoris, dabit longitudinem penduli iſochroni, cum ſector ex B ſuſpenditur *. Eſt autem rectangulum N B O ∞ $\frac{1}{2} rr$: diſtantia autem B A, ut jam ante diximus, ∞ $\frac{2br}{3p}$. Unde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli iſochroni, ut ante quoque inventa fuit.

* Prop. 17. huj.

Centrum oſcillationis Circuli, aliter quam ſupra.

TAB. XXIV. Fig. 1.

Eodem modo etiam ſimpliciſſime, in circulo, centrum oſcillationis invenire licet. Sit enim circulus G C F, cujus centrum B; ſectorque in eo minimus intelligatur B C P, ſicut ante in ſectore B C D.

Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejusmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum.

Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B *. quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus.

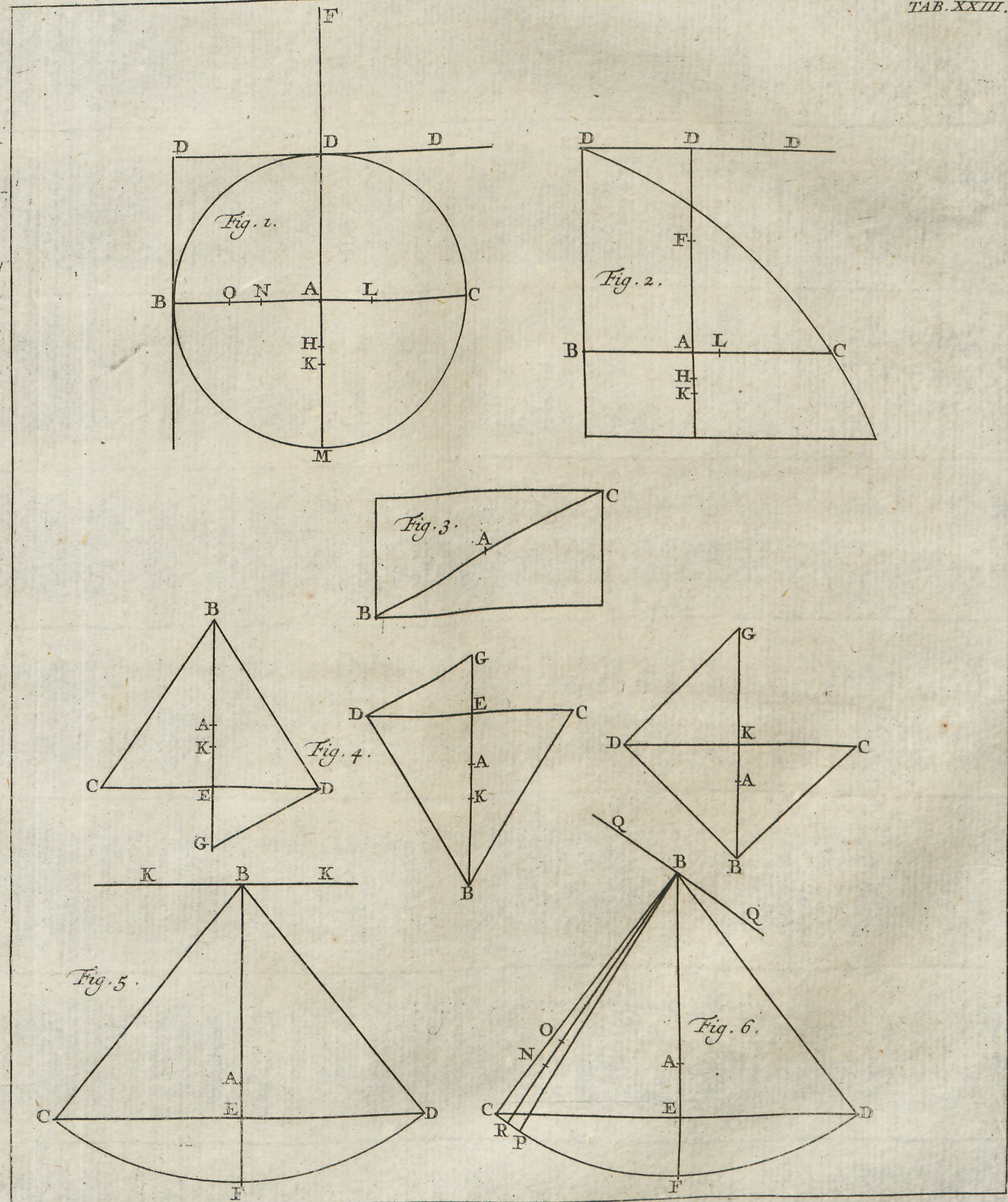
* Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.

TAB. XXIV. Fig. 2.

Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc pacto reperitur. Eſto enim circumferentia deſcripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex ſecundum numerum particularum in quas circumferentia diviſa intelligitur, æquatur quadratis à diſtantiis omnium earum

TAB. XXIII.



earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic ſpatium applicandum*. Patetque hinc, ſi ſuſpenſio ſit ex G, puncto circumferentiæ, penduli iſochroni longitudinem æquari diametro G F.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.
* Prop. 18. huj.

Centrum oſcillationis Polygonorum ordinatorum.

Haud abſimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum iſochronum invenitur. Fit enim, ſpatium applicandum, æquale ſemiſſi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una cum vigeſima quarta parte quadrati lateris. At, ſi perimetro polygoni pendulum iſochronum quæratur, fit ſpatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris.

TAB. XXIV. Fig. 3.

Loci plani & ſolidi uſus in hac Theoria.

Eſt præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Ut ſi propoſitum ſit, dato puncto ſuſpenſionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B diſtantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, iſochrona ſint pendulo ſimplici longitudinis A B.

TAB. XXIV. Fig. 4.

Ponatur A B ∞ a, ductâque C D, quæ ſecet A B ad angulos rectos in E, ſit A E indeterminata ∞ x: E C, vel E D ∞ y. Ergo quadratum A C ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex ſecundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis diſtantiarum earundem particularum ab axe ſuſpenſionis A. Ergo quadratum A C, ſive $xx + yy$, applicatum ad diſtantiam A E, quæ nempe eſt inter axem ſuſpenſionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli iſochroni*; quam propterea oportet æqualem eſſe A B ſive a. Itaque $\frac{xx+yy}{x}$ ∞ a. Et $yy \infty ax - xx$. Unde patet, locum punctorum C & D, eſſe circumferentiam circuli, cu-

* Prop. 17. huj.

jus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem $\infty \frac{1}{2} a$, sive F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam A C B D, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo A B isochronam esse.

Tab. xxiv. Fig. 5.

Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis A N.

Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & sit O R æqualis $\frac{2}{3}$ O L. Itaque cunei super recta O L, abscissi plano per O H ducto, subcentrica erit O R. Sed cunei alterius super eadem O L, abscissi plano per rectam A H, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa A M. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum O M R. quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit distantiam centri oscillationis lineæ O L, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam A N ∞ a: A M ∞ x: M O vel M L ∞ y. Est ergo rectangulum O M R $\infty \frac{1}{3} yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi M N æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ O L esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x \infty a$. Unde $y \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor A N; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius A N triplum.

Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi O L parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas

nas habeat pendulo ſimplici A N, etiam totum Ellipſeos planum, ex A ſuſpenſum & in latus agitatum, ipſi A N pendulo iſochronum fore. Sed & partem Ellipſeos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abſcindetur.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Cæterum adſcribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.

Sit virga A B ponderis expers, ſuſpenſa ex A; oporteatque, ad datum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, ſive infinite parvi exiſtimandi, quæque, ita ſuſpenſa ab A, oſcillationes iſochronas faciant pendulo ſimplici datæ longitudinis A L.

TAB. XXIV. Fig. 6.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo A B ∞ a; A L ∞ b; B G ∞ x; C G ∞ y: invenitur æquatio y ∞ $\sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, baſes triangulorum C, & D, quæ baſes hic ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus ſimplex $- xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod ſi a ſit nihilo æqualis, hoc eſt, ſi punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, ſit idem cum puncto A; tum futura ſit æquatio y ∞ $\sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc caſu, ſi ſumatur A O ∞ $\frac{2}{3}b$, hoc eſt, ∞ $\frac{2}{3}$ A L, centroque O per A circulus deſcribatur A D N; erunt baſes triangulorum A C, A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutiſſima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D conſtituuntur, magnitudine & ſitu ſibi reſpondentia, centrum oſcillationis habeant punctum L, poſitâ A L ∞ $\frac{3}{4}$ diametri A N; cumque circulus totus ex ejuſmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æqualia habens; manifeſtum eſt, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oſcillationis eſſe in L.

TAB. XXV. Fig. 1.

Rurſus, ſi in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a$ ∞ $\frac{4}{3}b$, ſeu

TAB. XXV. Fig. 2.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

$2a \infty b$; hoc eſt, ſi triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A L ſecet bifariam, erit $y \infty \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod ſi centro B, radio qui poſſit duplum B A, circumferentia deſcribatur, ea erit locus baſium triangulorum acutiſſimorum B C, B D, quorum nempe, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & ſector ejus quilibet, axem habens in recta A L, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifeſtum eſt & horum, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis eſſe punctum L.

Adeoque quilibet circuli ſector, ſuſpenſus à puncto quod diſtet, à centro circuli ſui, ſemiſſe lateris quadrati circulo inſcripti, pendulum iſochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno caſu, absque poſita dimenſione arcus, pendulum ſectori iſochronum invenitur.

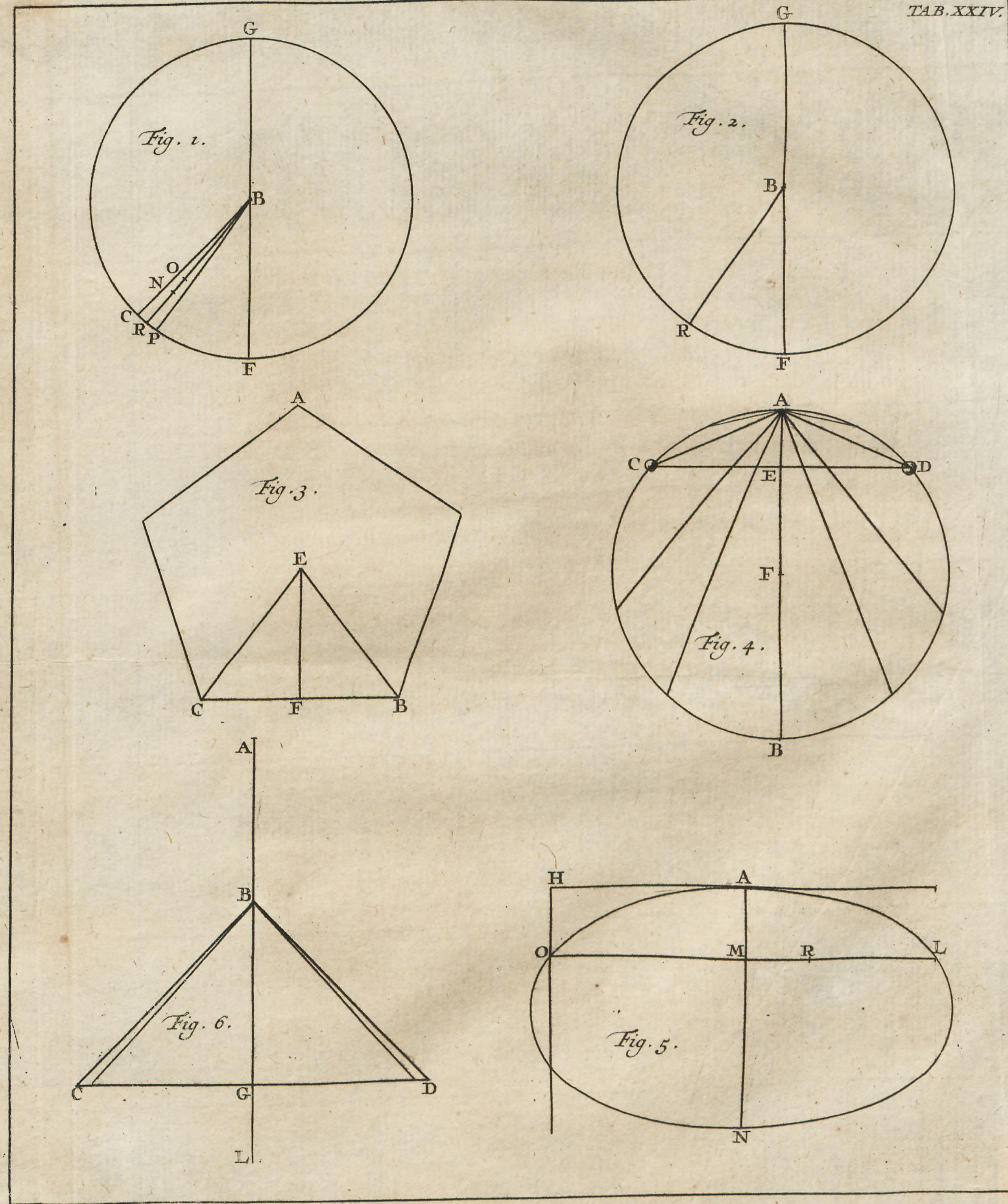
TAB. XXV. Fig. 3. & 4.

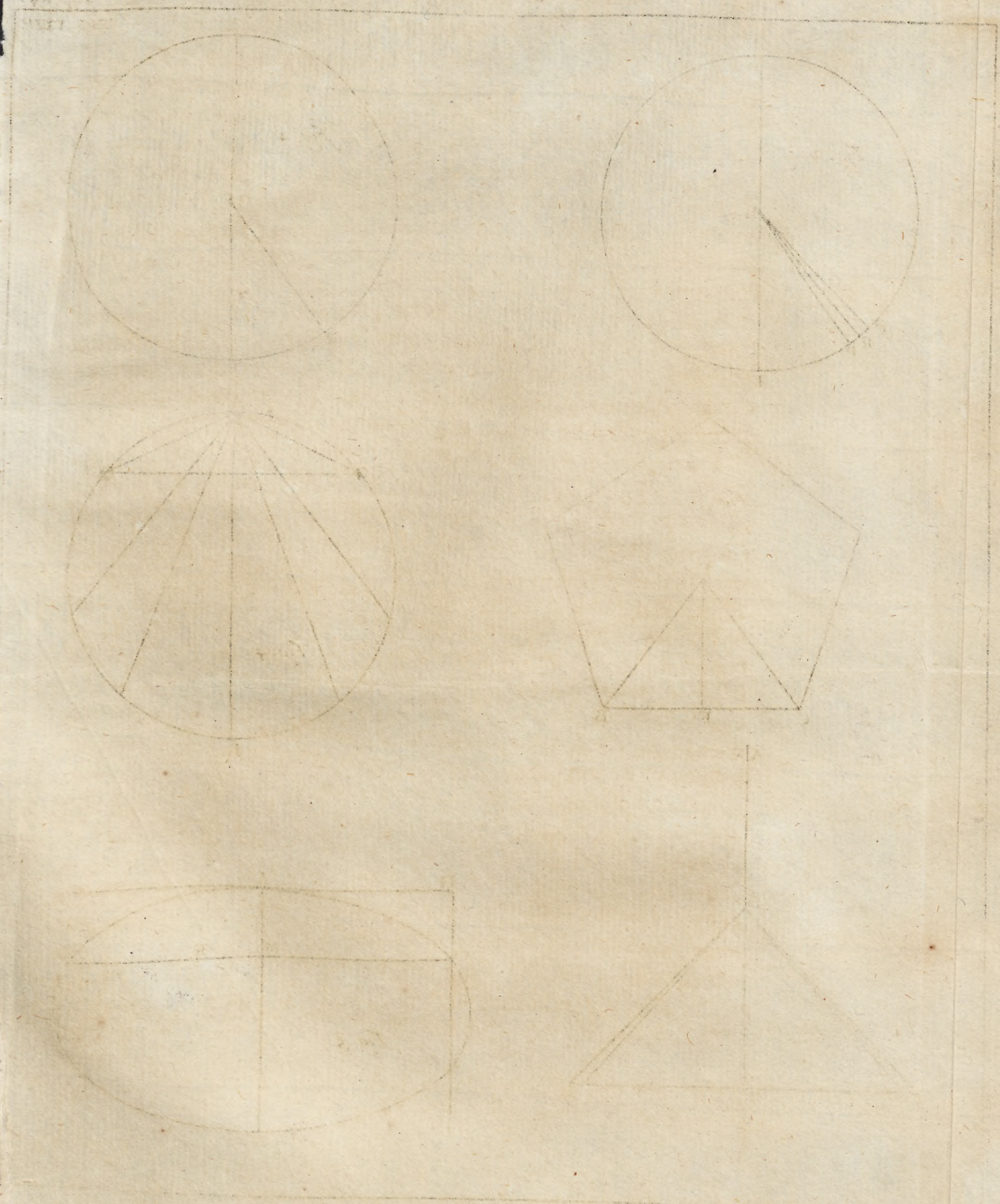
Porro, ad univerſalem conſtructionem æquationis primæ, $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{2}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$, dividatur A L bifariam in E, & adponatur ad B E pars ſui tertia E F; eritque F centrum deſcribendi circuli; radius autem F O æqualis ſumendus ei, quæ poteſt duplum differentiæ quadratorum A E, E F.

Si itaque, ex puncto B, ad deſcriptam circumferentiam triangula duo paria acutiſſima conſtituantur, ut B C, B D; illorum, ex A ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L. Quare & portionis cujuslibet deſcripti circuli, cujus portionis vertex ſit in B, axis vero in recta A L, quales ſunt utraque C B D; poſita ſuſpenſione ex A; centrum oſcillationis idem punctum L eſſe conſtat. Atque adeo etiam circuli ſegmentorum K O N, K M N, quæ facit recta K B N perpendicularis ad A B.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertiſſe ſufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oſcillationis figurarum rectarum, ſeu quæ æqualiter ad axem utrinque conſtitutæ ſunt; ut trianguli iſoſcelis, vel parabolicæ ſectionis rectæ; etiam obliquarum,

quæ


Fig. 1.
G
B
O
N
C
R
P
F
Fig. 2.
G
B
R
F
Fig. 3.
A
E
C
F
B
Fig. 4.
A
C
E
D
F
B
Fig. 6.
A
B
C
G
D
L
Fig. 5.
H
A
O
M
R
L
N



quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli scaleni, & parabolæ non rectæ, centra oscillationis haberi. Ut si, exempli gratia, triangulum B A C isosceles, cujus axis A D, à puncto E suspensum intelligatur; sit vero & aliud triangulum scalenum F A G, axem eundem habens A D, & basin F G æqualem basi B C; etiam hoc triangulum, ex E suspensum, priori B A C isochronum esse dico.

DE CENTRO OSCILLATIONIS. TAB. XXVII. Fig. 1.

Quia enim virga, seu linea gravis, F G, affixa virgæ sine pondere E D in D, situ obliquo, suspensaque ex E, isochrona est virgæ B C, similiter in D affixæ *; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriusque, quæ axem A D secant in iisdem punctis, atque inter se æquales sunt: necesse est tota triangula, quæ ex lineis, seu virgis iisdem composita intelligi possunt, isochrona esse. In aliis figuris similis est demonstratio.

* Prop. 16. huj.

PROPOSITIO XXII.

Quomodo, in solidis figuris, oscillationis centra inveniantur.

In solidis porro figuris facile quoque, per ante demonstrata, centrum oscillationis invenire licebit. Si enim sit solidum A B C, suspensum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis sit F: ductis jam per F planis E F D, G F H, quorum posterius sit horizonti parallelum, alterum vero per axem E transeat; inventisque, per propositionem 14, summis quadratorum à distantiis particularum solidi A B C à plano G F H, itemque à plano E F D; hoc est, inventis rectangulis utrisque, quæ, multiplicia secundum numerum dictarum particularum, æqualia sint dictis quadratorum summis; rectangula hæc applicata ad distantiam E F, qua nempe axis suspensionis distat à centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius est centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propositione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.

TAB. XXV. Fig. 5.

Centrum oscillationis in Pyramide.

TAB. XXVI. Fig. 1.

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, basin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, sit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

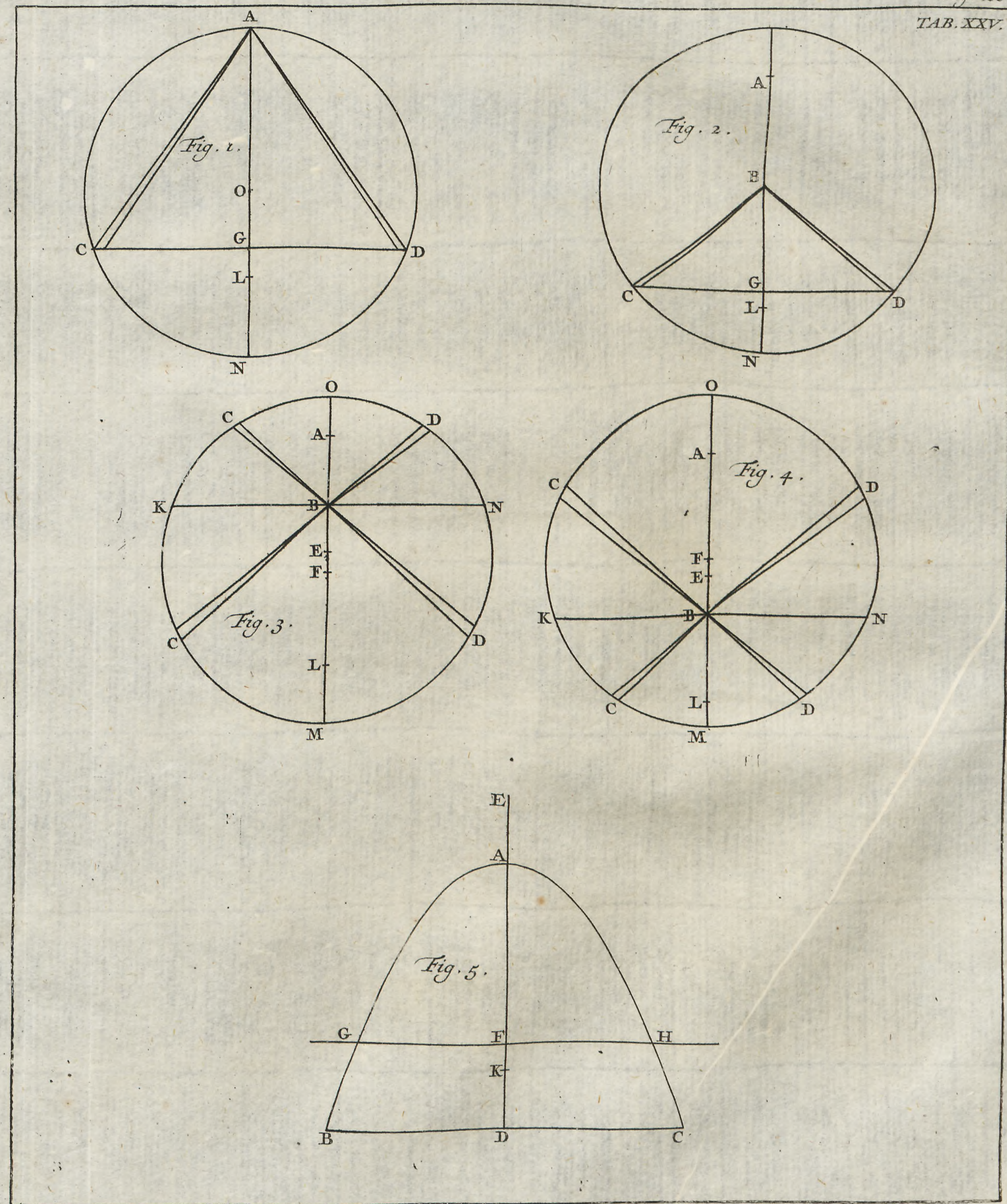
Hic figura plana proportionalis O V V, à latere adponenda, secundum propositionem 14, constabit ex residuis parabolicis O P V, quæ nempe supersunt, cum, à rectangulis Ω P, auferuntur semiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

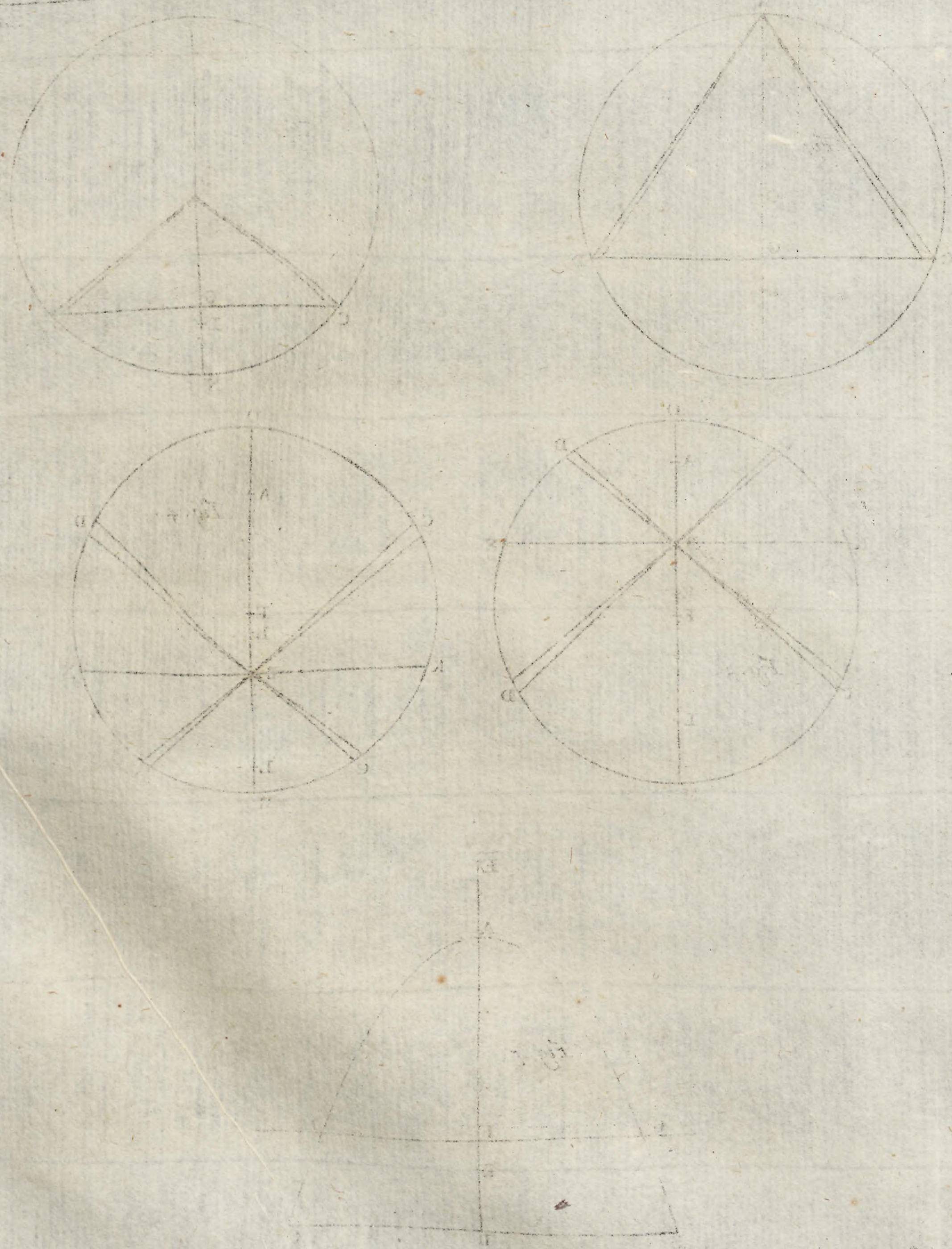
Sicut enim inter se sectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipsis in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V, distabit tribus quartis diametri O P à vertice O.

Intellecto porro horizontali plano N E, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V secet secundum R F; inventâque subcentricâ cunei, super figura O V V abscissi plano per O Ω, quæ subcentrica sit O G, (est autem $\frac{4}{5}$ diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis distantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano N E, particularum solidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale $\frac{3}{80}$ quadrati O P, vel quadrati A D.

* Prop. 10. huj.

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda primo subcentrica cunei, super quadratâ basi pyramidis B C abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit B K; estque $\frac{2}{3}$ B C. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P; quæ sit Φ P; estque $\frac{3}{10}$ P V. Inde, divisâ bifariam P V in Δ, si fiat ut Δ P ad P Φ, hoc est, ut 5 ad 3, ita rectangulum B D K, quod est $\frac{1}{12}$ quadrati B C, ad aliud spatium Z; erit hoc, multiplex secundum nu-


Fig. 1.
A
O
G
C
D
L
N
Fig. 2.
A
B
G
C
D
L
N
Fig. 3.
O
C
D
A
K
B
N
E
F
C
D
L
M
Fig. 4.
O
A
C
D
F
E
K
B
N
C
L
D
M
Fig. 5.
E
A
G
F
H
K
B
D
C



numerum particularum ſolidi A B C, æquale quadratis diſtantiarum à plano A D*. Apparet autem, fieri ſpatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati B C.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 15. huj.

Itaque, totum ſpatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati A D, cum $\frac{1}{20}$ quadrati B C. Unde, ſi ſuſpenſio, ut hic, poſita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque diſtantia, ad quam applicatio facienda, A E æqualis $\frac{3}{4}$ A D; fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$ A D, atque inſuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. ſive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionialis.

Centrum oſcillationis Coni.

Quod ſi A B C conus fuerit, omnia eodem modo ſe habebunt, niſi quod ſpatium Z hic ſit æquale rectangulo Δ P Φ *, hoc eſt $\frac{3}{20}$ quadrati P V vel B D, ſive $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Quare, totum ſpatium applicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati A D, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Ac proinde, poſita ſuſpenſione ex vertice A, fiet E S, qua centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$ A D, & $\frac{1}{20}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. ſive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifeſtum eſt, ſi A D, D B æquales ſint, hoc eſt, ſi conus A B C ſit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D.

* Prop. 15. huj.

Sequitur quoque porro, ex propoſitione 20, conum hunc rectangulum, ſi ex D centro baſeos ſuſpendatur, iſochronum fore ſibi ipſi ex vertice A ſuſpenſo, quemadmodum & de triangulo rectangulo ſupra oſtenſum fuit.

Centrum oſcillationis Sphæræ.

Si A B C ſit ſphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, O V H, ex parabolis compoſita, quarum baſis communis O H, æqualis ſphæræ diametro A D. Secta vero ſphærâ planis per centrum E, quorum B C ſit hori-

TAB. XXVI. Fig. 2.

horizonti parallelum, A D vero verticale: ut inveniatur summa quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda est distantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ sit Φ P, estque $\frac{2}{5}$ V P. Deinde, divisâ P V bifariam in Δ, constat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum sphæræ A B C, æquari quadratis distantiarum à plano A D *. Est autem rectangulum Δ P Φ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati P V, vel quadrati B E.

* Prop. 15. in fine.

Atqui, quadrata distantiarum à plano B C, æqualia esse liquet quadratis distantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo spatium applicandum, in sphæra A B C, erit duplum rectanguli Δ P Φ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio E B.

Itaque, si sphæra suspensa sit ex puncto in superficie sua A, erit E S, à centro sphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ semidiametri A E. Totaque A S æqualis $\frac{7}{10}$ diametri A D. Si vero ex puncto alio, ut L, sphæra suspensa sit; erit E S æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus L E, E B.

Centrum oscillationis Cylindri.

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si cylindrus à centro basis superioris suspendatur, fit longitudo penduli isochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.

In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à semidiametro basis. Unde, si à puncto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni $\frac{2}{3}$ axis, cum $\frac{1}{2}$ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad axem, id est, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis.

Cen-

De centro oscillationis.

Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici.

Tab. XXVI. Fig. 3.

In conoide quoque hyperbolico centrum oscillationis inveniri potest. Si enim, exempli gratia, sit conoides cujus sectio per axem, hyperbola B A B; axem habens A D, latus transversum A F: erit figura plana ipsi proportionalis B K A K B, contenta basi B B, & parabolicæ lineæ portionibus similibus A K B, quæ parabolæ per verticem A transeunt, axemque habent G E, dividentem bifariam latus transversum A F, ac parallelum basi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum distat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B; estque axis A D ad A L, sicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum sesquialtera A D. Deinde & distantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri potest, atque etiam subcentrica cunei super figura B K A K B, abscissi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei subcentrica, super ipsa A P, inveniri quoque potest; atque ex his consequenter centrum agitationis conoidis, in quavis suspensione; dummodo axis, circa quem movetur, sit basi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, si axis A D lateri transverso A F æqualis ponatur, spatium applicandum æquari $\frac{1}{20}$ quadrati A D, cum $\frac{31}{200}$ quadrati D B. Tunc autem A L est $\frac{7}{10}$ A D.

Unde, si conoides hujusmodi ex vertice A suspendatur, invenitur longitudo penduli isochroni, A S, æqualis $\frac{27}{35}$ A D, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

Centrum oscillationis dimidii Coni.

Tab. XXVII. Fig. 2.

Denique & in solidis dimidiatis quibusdam, quæ fiunt sectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Ut si sit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum semicirculi baseos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum est, quoniam A D est $\frac{3}{4}$ rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, sicut quadrans circumferentiæ circuli

 ad

ad radium, ita sint $\frac{2}{3}$ C B ad B E. Tunc enim E est centrum gravitatis semicirculi baseos, ideoque in A E centra gravitatis omnium segmentorum semiconi A B D, basi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, O V V, eadem est quæ in cono toto supra descripta fuit: per quam nempe invenietur summa quadratorum, à distantiis particularum semiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata distantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, sicut supra prop. 14. adhibenda est, cujus nempe sectiones verticales, exhibeant lineas proportionales sectionibus sibi respondentibus in semicono A B C. & hujus figuræ cognoscenda est distantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem esse constat distantiæ D N, centri gr. semiconi à plano trianguli A B. positâque H G subcentricâ cunei abscissi super figura S Z Y, ducto plano per S Y, noscendum est rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, secundum numerum particularum semiconi A B C, æquabitur quadratis distantiarum semiconi in planum M D O. Licebit vero cognoscere rectangulum illud G F H, etiamsi subcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

Diximus supra, cum de cono ageremus, quadrata distantiarum à plano per axem ejus, æquari $\frac{3}{80}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{3}{20}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Unde & hic, in semicono A B C, quadrata distantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano A B, ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{3}{20}$ quadrati B C. Ponendo autem A B ∞ a; B C ∞ b; & quadrantem circumferentiæ, radio B C descriptæ, ∞ q; fit E B ∞ $\frac{2bb}{3q}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, sive G F ∞ $\frac{1bb}{2q}$.

Cujus

TAB. XXVI.

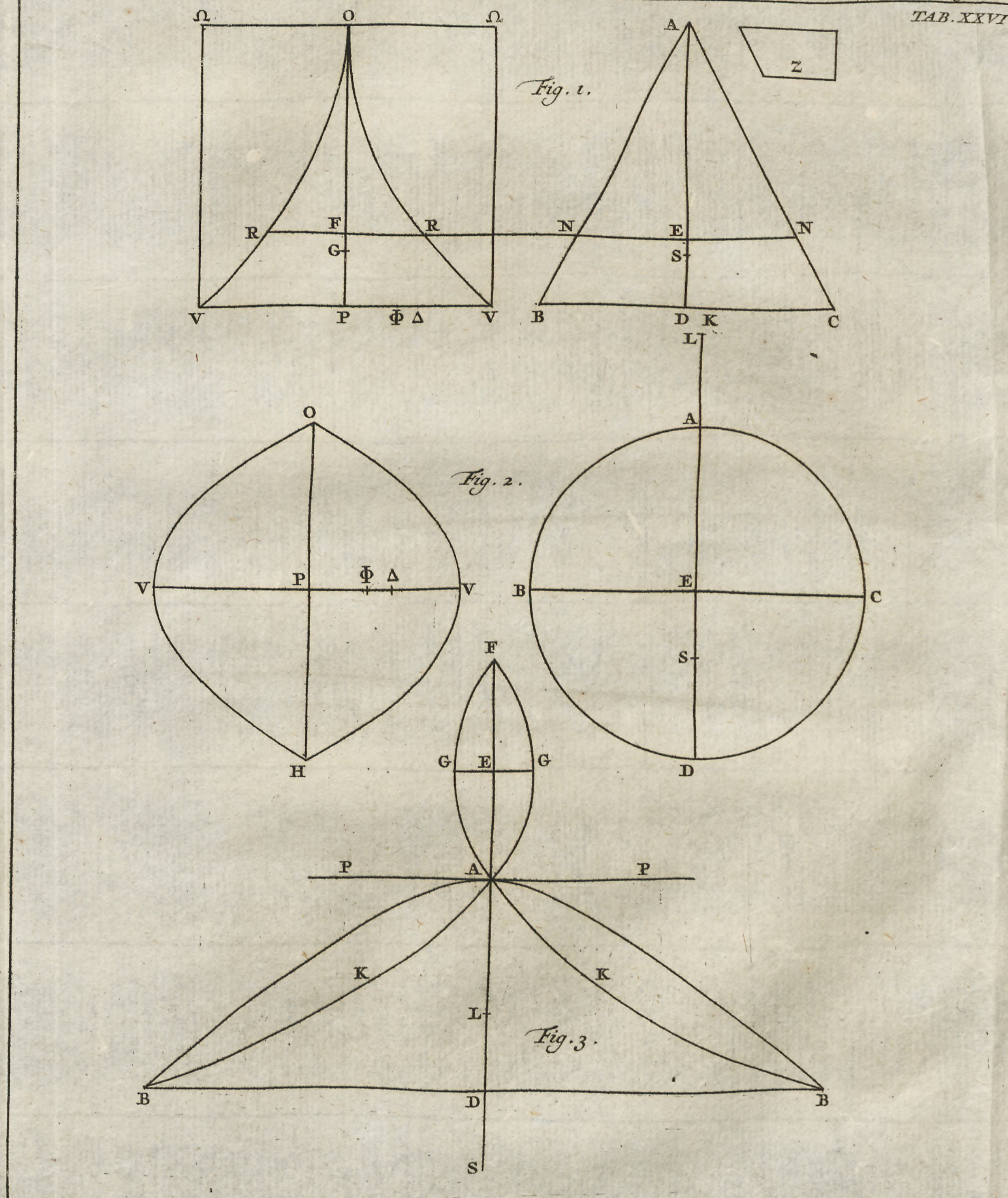
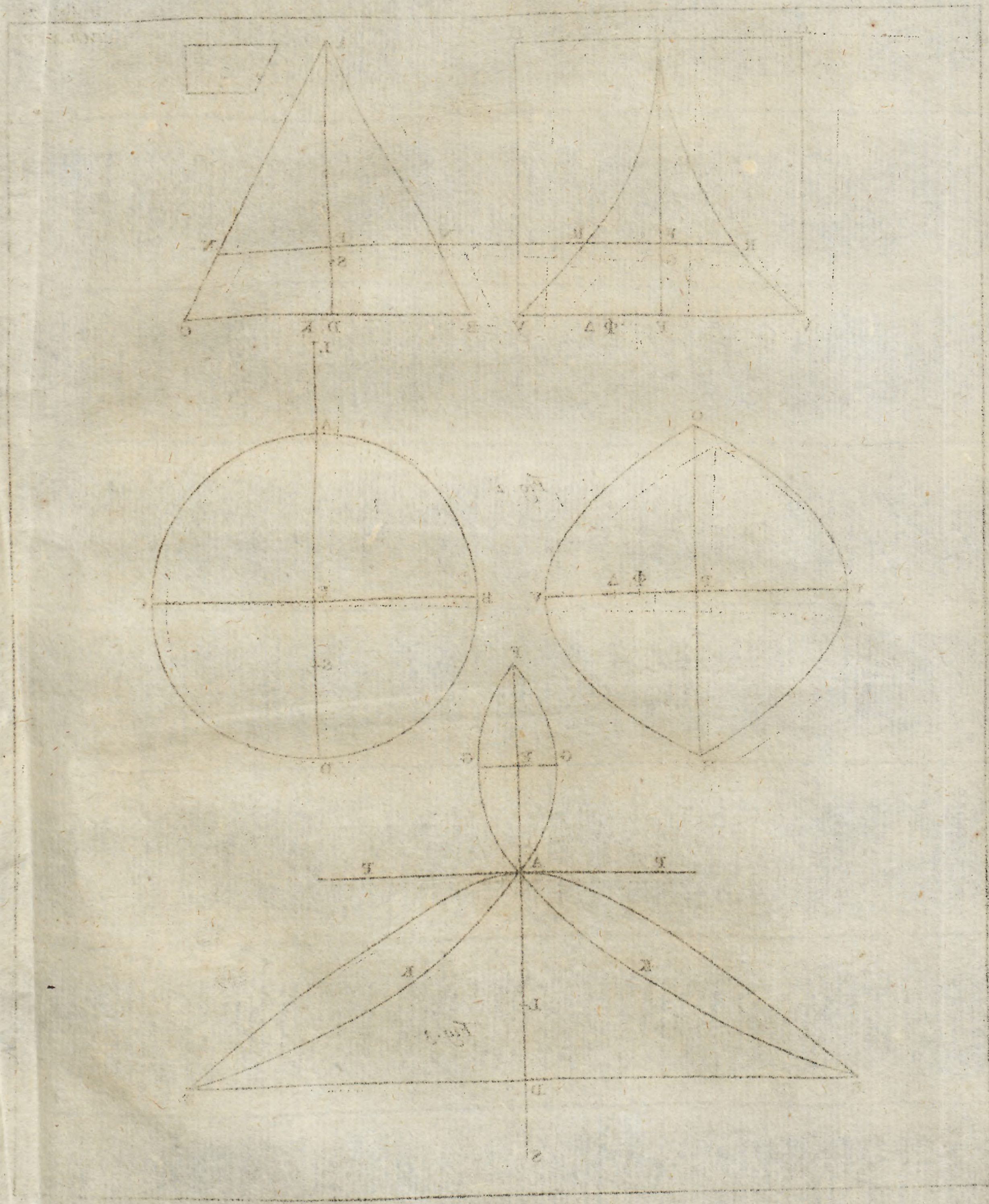


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.



Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H ∞ $\frac{3}{20} bb - \frac{1 b^4}{4qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano M D O. At quadratis distantiarum à plano N D æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati A B, sive $\frac{3}{80} aa$, multiplices per numerum particularum semiconi A B C. Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80} aa + \frac{3}{20} bb - \frac{1 b^4}{4qq}$.

Unde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui sit parallelus basi trianguli à sectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y sit ignotæ prorsus naturæ, subcentricam tamen G H, cunei super ipsa abscissi plano per S Y, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{3}{20} bb$, sive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{1bb}{2q}$, fit inde G H æqualis $\frac{3}{10} q$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ aliis investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerunt A B C, A F G, alter rectus, alter scalenus; quorum & diametri & bases æquales; hi ex vertice suspensi, vel à quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.

TAB. XXVII. Fig. 1.

PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo secundario, quod super virga penduli, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit.

TAB. XXVII. Fig. 3.

Ut hoc expediamus, primo penduli ipsius, ex virga gravitate prædita, & appenso parte ima pondere, compositi, centrum oscillationis inveniendum est.

Sit virga, cum appenso pondere, A C, cujus longitudo dicatur a. Intelligantur autem, tum virga ipsa, tum pondus appensum C, in particulas minimas æquales divisa, earumque particularum virga habeat numerum b, pondus vero C numerum c, ponendo nempe b ad c, sicut gravitas virgæ ad gravitatem appensi ponderis. Longitudo igitur penduli simplicis, dato isochroni, habebitur, si summa quadratorum à distantiis particularum omnium à puncto suspensionis A, dividatur per summam earundem distantiarum *. Secetur A C bifariam in M; tum vero in T, ut A T sit dupla T C. Quia ergo M est centrum gravitatis lineæ A C, & A T subcentrica cunei super ipsa abscissi plano per A D, perpendicularem ad A C; qui cuneus hìc revera triangulum est; erit summa quadratorum, à distantiis particularum virgæ à puncto A, æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M; hoc est, rectangulo T A M, multiplici secundum numerum particularum b; hoc est, $\frac{1}{3} aab$; quia M A est $\frac{1}{2} a$, & T A $\frac{2}{3} a$, ac proinde rectangulum T A M ∞ $\frac{1}{3} aa$. Summa vero quadratorum, à distantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici secundum numerum particularum ipsius ponderis; hoc est, aac. Adeoque summa quadratorum omnium, tam à distantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3} aab + aac$.

* Prop. 6. huj. in fine.

Porro, distantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur $\frac{1}{2} ba$; longitudini scilicet virgæ ipsius, quæ

est

est a, multiplici secundum semissem numeri particularum quas continet. Et distantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, sunt $a\ c$. Ita ut summa utrarumque distantiarum sit $\frac{1}{2}ab + ac$. Per quam dividendo summam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{3}aab + aac$, fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac}{\frac{1}{2}ab + ac}$ sive $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$, longitudo penduli isochroni. Quæ itaque habebitur, si fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appensi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejusdem appensi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem sumere longitudinem A C, à puncto suspensionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum consideretur.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quod si jam, præter pondus C, alterum insuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, seu particularum numerus sit d: distantia vero A D sit f. Ut pendulum simplex huic ita composito isochronum inveniatur, addenda sunt ad summam superiorem quadratorum, quadrata distantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet esse dff. Adeo ut summa omnium jam sit futura $\frac{1}{3}aab + aac + ffd$. Item, ad summam distantiarum, addendæ distantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac summa proinde distantiarum omnium erit $\frac{1}{2}ba + ca + df$; per quam dividenda est ista quadratorum summa, & fit $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$, longitudo penduli isochroni.

TAB. XXVII. Fig. 4.

Quod si vero, hæc longitudo penduli isochroni, datæ æqualis postuletur, quæ sit p, & reliqua omnia quæ prius data sint, præter distantiam A D seu f, quæ determinat locum ponderis D: sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{\frac{1}{3}aab + aac + ffd}{\frac{1}{2}ab + ac + fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff \propto pf + \frac{\frac{1}{2}abp + cap - \frac{1}{3}aab - aac}{d}$. Et $f \propto \frac{1}{2}p$

 + vel

$+$ vel $-\sqrt{\frac{\frac{1}{4}pp+\frac{1}{2}abp+cap-\frac{1}{3}aab-aac}{d}}$. Ubi animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}abp+cap$ minus sit quam $\frac{1}{3}aab+aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{\frac{1}{3}ab+ac}{\frac{1}{2}b+c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga A C & pondere C.

Unde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus; posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione superiori, $f \propto \frac{1}{2}p +$ vel $-\sqrt{\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}abp+acp-\frac{1}{3}aab-aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}abp+acp}{d}$ non minus esse debere quam $\frac{\frac{1}{3}aab+aac}{d}$. Unde non debebit esse minor quam $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{4}{3}bd+4cd+bb+4bc+4cc}-\frac{ab-2ac}{d}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}abp+acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}aab+aac}{d}$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f \propto \frac{1}{2}p$, hoc est, $\frac{a}{2d}\sqrt{\frac{4}{3}bd+4cd+bb+4bc+4cc}-\frac{ab-2ac}{2d}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto **A**, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda notet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{50}$ gravitatis appensi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas eadem ponatur quæ ipsius virgæ,

gæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno ſcrupulo primo acceleretur horologii motus, ſpatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum ſcrupulorum primorum ſit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro.

Ductis viginti quatuor horis ſexagies, fiunt 1440, quot nempe ſcrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius ſcrupuli acceleratio quæritur: ſuperſunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime eſt ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, ſi penduli ſimplicis, ſecunda ſcrupula notantis, longitudo diviſa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno ſcrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenſo compoſitum, iſochronum ponitur pendulo ſimplici partium 1440; invenienda primum eſt virgæ illius longitudo, ex æquatione ſuperius poſita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli ſimplicis, quod iſochronum compoſito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo ſi longitudo penduli ſimplicis iſochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} \infty a$. poſitoque, ut hic, $c \infty 50$; $b \infty 1$; $f \infty 1440$; fiet, a $\infty 1444\frac{4}{5}$, longitudo virgæ.

Jam, quia erat $f \infty \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{\frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{d}}$, fiet $f \infty \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Unde porro, ſi p ſit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f \infty 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, ſeu pendulum ſimplex, ſecunda ſcrupula oſcillationibus deſignans, continet 1440. Cujus longitudo ſi pedum trium ſtatuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, ſupererunt unciæ duæ, lineæ 9,

à

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

à centro oscillationis penduli compositi sursum sumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius scrupuli primi accelerationem præstans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas distantias, quibus virga dividenda est, calculo investigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem *p* : easque subjecta tabella exhibemus, secundum cujus numeros etiam virga penduli divisa est, quæ superius in descriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 scrupula secunda, seu primorum scrupulorum quadrantes. Ex. gr. si, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius justo incedere, in 24 horis, differentiâ 15 secundorum scrupulorum; oportebit sursum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii spatio 24 horarum.		Partes, à centro osc. sursum accipiendæ.
Scrup. pr.	*Sec.*	*Lineæ & decimæ linearum pedis horarii.*
0,	15	7, 0
0,	30	15, 2
0,	45	23, 7
1,	0	32, 6
1,	15	41, 9
1,	30	51, 7
1,	45	62, 2
2,	0	73, 4
2,	15	85, 6
2,	30	99, 0
2,	45	114, 1
3,	0	131, 8
3,	15	154, 3
3,	30	192, 6

Centrum oscillationis altius est centro gravitatis C partibus 1, 4.

PRO-

PROPOSITIO XXIV.

De centro oscillationis.

Centri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspenso, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis; quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphæra aut lens plumbea. Quid enim, si sphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, conveniant pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκρίβειαν sectemur. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni facienda est difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum constat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etsi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere prorsus has tricas velimus, id ita consequemur, si sphæram lentemve penduli, circa axem suum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inserendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sit necesse

est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo positionem, respectu horizontalis plani, sphæra penduli servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides easdem percurrant. Unde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum consequitur, quam si puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

PROPOSITIO XXV.

De mensuræ universalis, & perpetuæ, constituendæ ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi possit, res est & utilissima, & à multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur; cum sine illo nequaquam, aut ægre admodum, haberi possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi

modi horologium, fixarum ſtellarum obſervationibus, compoſitum fuerit, methodo illa quam in horologii deſcriptione oſtendimus: aliud pendulum ſimplex, hoc eſt, ſphæra plumbea, aut alia materia gravi conſtans, ex tenui filo religata, juxta ſuſpendenda eſt, motuque exiguo impellenda; ac tantiſper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recurſus ejus, per quadrantem horæ, aut ſemiſſem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oſcillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, ſatis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ menſurâ diſtantiæ, à puncto ſuſpenſionis ad centrum oſcillationis penduli ſimplicis; eâque, ſi recurſus ſinguli ſcrupula ſecunda valeant, in tres partes diviſâ; facient hæ ſingulæ longitudinem pedis, quem HORARIUM in ſuperioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non ſolum ubique gentium conſtitui poſſit, ſed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, ſemel ad hunc proportionibus ſuis expreſſi, certò quoque in poſterum cognoſci poſſint. Sicut jam ſupra, pedem Pariſienſem ad hunc horarium eſſe diximus, ut 864 ad 881; quod idem eſt ac ſi, poſito prius pede Pariſienſi, dicamus tribus hujuſmodi pedibus, cùm octo lineis & dimidia, conſtitui pendulum ſimplex, cujus oſcillationes ſcrupulis ſecundis horariis reſponſuræ ſint. Pes autem Pariſienſis ad Rhenanum, quo in Patria noſtra utuntur, ſe habet ut 144 ad 139; hoc eſt, quinque lineis ſuis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas menſuras accipiunt.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Quomodo autem centrum oſcillationis in ſphæra, ex qualibet longitudine ſuſpenſa, inveniatur, in ſuperioribus demonſtratum eſt. Nempe, ſi fiat ut diſtantia inter punctum ſuſpenſionis & ſphæræ centrum, ad ſemidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorſum acceptas, terminari in quæſito oſcillationis centro. Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem. Nam, ſi à pun-

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

cto suspensionis ad sphæræ centrum distantia accipiatur, sphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit certa mensura penduli cujus recursus secunda scrupula metiantur; sed quo major erit ejus sphæra, hoc minor invenietur mensura illa, inter centrum sphæræ & punctum suspensionis intercepta. Quia in isochronis pendulis, centra quidem oscillationis à punctis suspensionum æqualiter distant; amplius autem descendit centrum oscillationis infra centrum sphæræ majoris, quam minoris.

Hinc necesse fuit illis, qui, ante hanc centri oscillatorii determinationem, mensuræ universalis constituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii nostri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana sibi negotium sumpsit, & recentius doctissimus Astronomus Lugdunensis, Gabriel Moutonus; his, inquam, necesse fuit designare globuli suspensi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret; vel mensura quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc posteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipsum est quod quærendum est: etsi scio vix sensibilem errorem fore, dummodo sphæræ istam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem posset quidem aliquo pacto res explicari; sed ita, ut numerandarum oscillationum labor subeundus sit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præstat, centra oscillationis adhibendo, certam rationem sequi, nullisque præter necessitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus sphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occursu aëris minus impediantur.

Cæterum, non sphæræ tantum ex filo suspensæ, sed & coni, cylindri, aliaque omnia solida, planaque, quorum centra oscillationis superius exhibuimus, ad hanc mensuram investigandam, apta sunt; quoniam, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis, certum idemque omnibus isochronis pendulis est intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ secunda scrupula aut eorum semisses singulis penduli

recursibus

recursibus indicant, ad hæc usurpare possumus; sed & alia quacunque penduli longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ conveniant vel singulis, vel binis ternisve recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper à puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 3. Part. 2.

 sit

ſit longitudo. Itaque & pendulorum ſimplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oſcillationes minimæ tranſiguntur.

Quod ſi quis oſcillationum numerandarum, quæ horæ aut ſemihoræ tempore tranſeunt, laborem non defugiat; horologiumque adſit, cujus index ſecunda ſcrupula demonſtret; quæcunque accipiatur penduli ſimplicis longitudo, ejus numerus oſcillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoſcetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad ſecunda ſcrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXVI.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc menſuram quicunque hactenus inveſtigarunt, experimenta conſulere neceſſe habuerunt; quibus, prout hactenus inſtituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, ſub finem motus acquiſitam. Ex noſtra autem prop. 25, de Deſcenſu gravium, cognitaque longitudine penduli ad ſecunda ſcrupula, abſque experimento, per certam conſequentiam, rem expedire poſſumus. Ac primo quidem ſpatium illud inquiremus, quod unius ſcrupuli ſecundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad ſecunda ſcrupula, longitudinem diximus eſſe pedum Horariorum 3: tempus autem unius oſcillationis minimæ, eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc eſt, ut 355 ad 113: ſi fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius ſecundi ſcrupuli, ſive ſexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19'''\frac{1}{10}$, tempus deſcenſus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum

modum ſuperiori propoſitione fuit oſtenſum. Ergo, ſi fiat ut quadratum ex $19'''\frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60'''$, hoc eſt, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo deſcenſus perpendicularis, tempore unius ſecundi. Cum autem pes Horarius ſit ad Pariſienſem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc menſuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius. Atque hæc cum accuratiſſimis experimentis noſtris prorſus conveniunt: in quibus punctum illud temporis, quo caſus finitur, non aurium aut oculi judicio diſcernitur; quorum neutrum hic ſatis tutum eſt; ſed ſpatium deſcendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, abſque ullo errore cognoſcitur.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, ſuſpenſi dimidia oſcillatio moram temporis, cadendo abſumpti, indicat. Cujus ſphærula, ut eodem momento ac plumbum caſui deſtinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, caſuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad parietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile ſequi poſſit, rectáque ſecundum longitudinem ſuam deſcendere; eo loci tranſiens, quo penduli ſphæra ad tabulam accidet. Abſumpto igitur funiculo toto, pars inſuper regulæ deorſum trahitur à cadente plumbo, priuſquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta ſit pars, ſphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem ſignans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, ſpatium cadendo emenſum certò definitum habetur.

Aëris autem occurſum, quaſi nullus eſſet in his intelligimus, ut menſura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte conſentiat. Nec ſane tantus eſt ille, ut in altitudinibus his, quò aſcendere datur, ſenſibile diſcrimen inducere poſſit; dummodo ſolida corpora è metallo, aut, ſi

levio-

De centro oscillationis.

leviore materia conſtent, mole grandiuſcula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem ſecant, ita magnitudine corporis penſatur, ut ſphæra lignea, vel etiam è ſubere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni ſuberisve gravitatem. Tunc enim gravitates ſphærarum erunt inter ſe ſicut earum ſuperficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum ſenſu percipi poteſt, decidant corpora, quæ multum intrinſeca gravitate differunt, nequaquam opus eſt ut proportio illa diametrorum ſervetur. Poſſunt enim inter ſe æqualia eſſe, dummodo utraque ſatis magna ſint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum eſt, tantam vel altitudinem eſſe poſſe; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in ſuperioribus demonſtravimus, proportione plurimum receſſura ſit. Namque in univerſum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac ſuperficiei ſuæ, conſtitutus eſt; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam poſſit. Quæ nempe celeritas ea eſt, quam ſi aër, aut liquor ille ſurſum tendens, haberet, ſuſpenſum corpus idem ſibi innatans ſuſtinere poſſet. Verum de his, alias fortaſſe, pluribus agendi occaſio erit.

HORO-

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QUINTA.

Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Unde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem faciliorem que. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumen-

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

to plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili ſpeculatione maturius fruantur harum rerum ſtudioſi, neve caſu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter deſtinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, ſimulque Theoremata traduntur, ad Vim Centrifugam pertinentia; demonſtratione ipſorum in aliud tempus dilata*.

* Vide Auctoris Opera poſthuma p. 401. & ſeq.

Horologii ſecundi conſtructio.

TAB. XXVII. Fig. 5.

Non neceſſarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii conſtant, diſpoſitionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus facile ordinari, variiſque modis mutari poſſit; ſed eam partem explicari ſatis eſſe, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expreſſa eſt.

Axis D H ad horizontem erectus intelligendus eſt, ac ſuper polis duobus mobilis. Huic ad A affixa eſt lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque ſecundum lineam A B; quæ eſt paraboloides illa de qua oſtendimus, Propoſ. 8. partis 3, evolutione ejus, poſtquam ipſi recta quædam juncta fuerit, deſcribi parabolam. Ea recta hic eſt A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A E deſcriptam, refert linea E F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola deſcribitur, eſt B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in ſeſe vertitur, filum B G F, in rectam lineam extenſum, ſphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoreſve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: ſed ita, ut omnes in ſuperficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipſo æqualia ſemper circuitus tempora evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu poſtea dicemus, apparebit.

Quod ſi circuitus ſingulos, ſecundorum ſcrupulorum ſemiſſes notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F eſſe $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii noſtri, hoc eſt dimidium

lon-

longitudinis penduli, cujus singulæ oscillationes semiscrupulum secundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis A B; quippe quod illius $\frac{2}{16}$ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium est. Si vero secunda scrupula unoquoque circuitu expleri desideremus, quadrupla priorum accipienda sunt, tum latera recta, tum linea A E.

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Porro, etsi filum B G F veluti unicum ac simplex hactenus designavimus, sciendum tamen longe præstare ut parte superiori duplex sit, ac F versùs in angulum coëat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta esse debet, quanta isti filorum divaricationi sufficit, vel & ipsa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, absque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque sibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, si unico tantum filo teneretur. Ubi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri sciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo nisu, motum sphæræ F semel inditum, conservat.

Hoc autem quo facilius possit, liberrimam axis K H revolutionem esse oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam si, parte sui ima, durato chalybe constet, suppositamque habeat adamantis superficiem planam; cujus minima quævis particula hic sufficit, subter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B G F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata servetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides suspensum est, experti sumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

DE VI CENTRIFUGA

ex motu circulari, Theoremata.

I.

SI mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in majori circumferentia, ad eam quæ in minori, ſicut ipſæ inter ſe circumferentiæ, vel earum diametri.

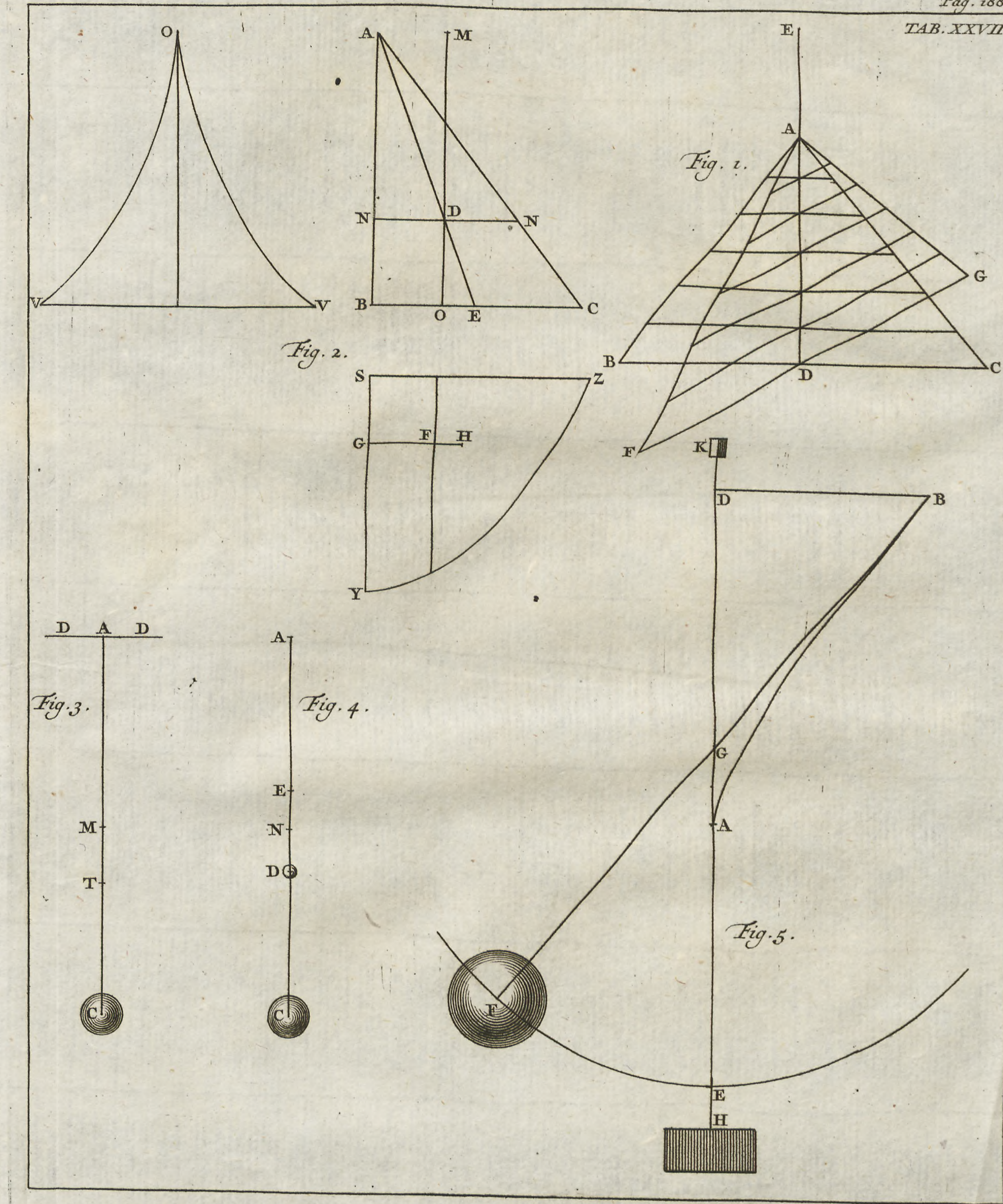
II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, ſed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

TAB. XXVII.



I V.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in ſubdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ ſit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam ſuæ gravitati æqualem; hoc eſt, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo ſuſpenſum eſt.

V I.

In cava ſuperficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, ſive parvæ ſive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora ſingula æquantur binis oſcillationibus penduli, cujus longitudo ſit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

De vi Centrifuga.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus suspensa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X. *Si*

X.

De vi centrifuga.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

X I.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

XIII. Si

De vi Centrifuga.

XIII.

Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret.

F I N I S.

BREVIS INSTITUTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

Adr. Metius in Geographicis Institutionibus Cap. 4.

ET hæc ſane facillima & aptiſſima eſt methodus (*ſcilicet qua adhibitis Horologiis longitudines deteguntur*) quam acquirere poſſis; niſi quod difficultas & error conſiſtat in irregulari Horologiorum motu: ideoque diligentes inquiſitores & inventores rerum naturalium id curate, neque laboris veſtri vos pæniteat, quo hunc errorem tollere tentetis. Inquirite in hunc verum & æquabilem naturæ curſum; quo potiti verum lapidem Philoſophorum inveniſtis, neque fortes Naucleri ad ſcopulos toties offendent.

Fournier in Hydrographia l. 12. C. 35.

UNde tandem colligo, ſi via inveniri queat ad Horologia perficienda, & laborem ſuſcipere velimus iis bene utendi, nullam praxim (*ad inveniendas longitudines*) cum hac comparandam eſſe.

Didericus Rembrantz a Nierop in Animadverſionibus de inveniendis longitudinibus.

HOc modo laudabiliora cenſerem nova excogitata Horologia Domini Chriſtiani Hugenii a Zuylichem, quæ, loco liberamenti, a plumbo pendulo oſcillato moderantur, de quibus per certa teſtimonia certus ſum, quod hæc tempus exacte ad hebdomadas, imò ferè ad menſes juſte dimetiri queant; Unde confiderem, quod ope horum Horologiorum maximum perciperemus commodum, imò quod, niſi agitatio navis impediret, ſatis attingere poſſemus ad inventionem longitudinum.

BREVIS INSTRUCTIO DE USU HOROLOGIORUM AD INVENIENDAS LONGITUDINES.

I.

AD minimum bina nova Horologia Oscillatoria in navem ferantur: ut si alterutrum forte fortunâ vel ex negligentia quiescat; vel si diuturnitate temporis contractis sordibus, purgandum sit, alterum nihilominus moveatur; præstaret autem 3 vel 4 adhibere horologia.

II.

Cui cura horologiorum committetur, discat a fabro quæ spectant indices horarum minutarum primarum & secundarum, internas etiam horologiorum partes intelligere, & reducendi ea methodum.

III.

Horologia in navi suspendenda sunt in loco arcte clauso, ubi tuta sunt ab humore vel sordibus, & ne disturbentur contactibus: Et si locum illum in media navi prope malum principem ordinare possemus, multum præstaret, quoniam ibi motus minimus est.

IV.

Antequam horologia in navem inferantur, conabimur ea aptare ad rectam dierum mensuram, tum enim usus est facillimus, nullusque fabris labor est ad unum bene adaptatum horologium alia accommodare. Sed si tamen tempus vel opportuna id præstandi occasio defuerit, nihilominus poterunt æque certe mari usurpari, dummodo observaveris vel scias, quanto citius vel tardius spatio 24 horarum moveantur, ut postea docebitur.

V.

Reducere horologia ad rectam dierum menſuram vel cognoſcere quanto citius vel tardius ſpatio 24 horarum moveantur.

Obſerva, dies ab una ad alteram meridiem aliquantulum differre quæ cauſa eſt cur horologium, licet prorſus exactum & ſecundum mediorum dierum menſuram moveatur, non ſemper cum ſole conveniat. Sed ut hæc inæqualitas æquetur, & ſemper ope Horologii ſcire poſſimus, quam horam indicat Sol, & conſequenter num horologium ad rectam mediorum dierum menſuram diſpoſitum ſit, conducit ſequens tabula cujus uſus talis eſt. Quando primum horologium conſtituendum eſt, ſubtrahe ex hora ſolari obſervatâ æquationem ejus diei quæ in tabula reperitur, & diſpone horologium ad reſiduas horas, minuta prima & ſecunda: ubi poſt aliquot dies quæritur hora ſolaris, adde ad horam horologii æquationem diei ultimi, & aggregatum erit hora ſolaris, ſi horologium exacte fuit adaptatum, ſecundum menſuram dierum mediorum; verum ut hæ obſervationes quam certiſſime inſtituantur, & horologia ad menſuram adaptentur antequam in navem inferantur, methodus ſequens aptiſſima eſt.

Duc lineam meridianam in pavimento, cujus operationis methodi ſatis notæ ſunt; obſervandum præterea ſummam hic non requiri exactitudinem; Porro, directe ſuper lineam meridianam, ſuſpende 2 fila appenſis infra ponderibus, vel aliter verticaliter tendantur, certosque a ſe mutuò diſtent pedes, quo plures eo melius.

Ubi dein medietas ſolis videtur exacte ex adverſo amborum filorum (ad quod requiritur vitrum obſcuri coloris, vel in fuligine candelæ denigratum) eo momento horologiorum indices diſponendi ſunt, non exacte in 12 horas, ſed tanto magis retrorſum, quanta eſt æquatio illius diei in Tabula: ex. gr. ſi fuerit 22 dies Martii, cujus æquatio in Tabula eſt 8 min. 3 ſec: hæc ſunt ſubducenda ex 12 horis, & reſiduum erit 11 horæ 51 min. 57 ſec: in quot horas minuta & ſecunda diſponendi ſunt indices Horologiorum quam primum ſol medius

dius ex adverſo 2 filorum conſpicitur. Dein poſt aliquot dies obſervatio rurſus eodem modo eſt inſtituenda, ubi ſol ex adverſo filorum cernitur, & ſimiliter notanda hora minuta & ſecunda horologiorum, quibus adde æquationem ejus diei excerptam ex Tabulâ, & ſi aggregatum exacte componat 12 horas Horologium ad rectam menſuram accommodatum eſt. Si vero differat dividenda ſunt minuta & ſecunda iſtius differentiæ, per numerum dierum inter utramque obſervationem, ad obtinendam quotidianam differentiam.

Supponamus hanc ſecundam obſervationem fieri 30. Martii ſcil. octo diebus poſt primam & comperiatur medietate ſolis viſa in meridiano ex adverſo 2 filorum,

	h.	*m.*	*ſ.*
horologium indicare	11.	51.	7.
Æquatio 30. Martii in tabula eſt	0.	10.	40.
Quæ addita horæ oſtenſæ per horologium præbet ſummam	12.	1.	47.

Si hæc ſumma exacte fuiſſet 12 horarum, horologium recte diſpoſitum fuiſſet, ſed cum excedat 12. horas 1. minuto 47. ſecundis, tanto citius promotum fuit ſpatio octidui; & hoc 1 minutum & 47 ſecunda, aut 107 ſecunda, diviſa per 8. efficiunt 13. $\frac{3}{8}$ ſecundorum, differentiam in ſpatio 24. horarum. Quâ differentiâ cognitâ, ſi non otium nec animus ſit ſuſcipiendi moleſtiam ut adaptetur horologium ad veram menſuram, neceſſe hoc non eſt; ita enim in navim inferre licet, modo prædicta quotidiana differentia annotetur, & ad eam noſmet componamus ut ſtatim dicetur.

Sed ſi accuratius Horologium diſponere velimus, removendum eſt minus pondus penduli parumper deorſum, quo tardius movebitur: & tum de novo obſervatio per ſolem inſtituenda eſt ut antea; ſi tarde nimis motum fuiſſet, ſupra memoratum pondus parumper ſurſum promovendum fuiſſet, ita tamen, ne ſupra punctum medium penduli promoveatur. eâ quippe gaudet proprietate, quod inde ſurſum promotum horologium lentius iterum promoveat, cujus rei in deſcriptione Horologii datur demonſtratio *; ut & æquationis temporis, cujus ſolummodo hic docemus uſum. Præter certam de-

* Vide ſupra pag 174.

Dies.	*Januar.* Min.	Sec.	*Febr.* Min.	Sec.	*Mart.* Min.	Sec.	*Apr.* Min.	Sec.	*Maj.* Min.	Sec.	*Jun.* Min.	Sec.
1	10	40	0	32	2	15	11	18	18	32	18	10
2	10	10	0	24	2	28	11	37	18	39	18	1
3	9	41	0	18	2	42	11	56	18	46	17	51
4	9	13	0	13	2	56	12	15	18	53	17	41
5	8	45	0	9	3	11	12	34	18	59	17	30
6	8	17	0	6	3	26	12	53	19	4	17	19
7	7	50	0	3	3	41	13	12	19	9	17	8
8	7	23	0	1	3	56	13	31	19	14	16	57
9	6	58	0	0	4	12	13	49	19	18	16	46
10	6	34	0	0	4	29	14	6	19	22	16	35
11	6	10	0	0	4	46	14	23	19	25	16	24
12	5	47	0	2	5	4	14	39	19	28	16	13
13	5	24	0	4	5	22	14	55	19	29	16	1
14	5	2	0	8	5	40	15	10	19	29	15	49
15	4	41	0	12	5	58	15	25	19	29	15	37
16	4	21	0	16	6	16	15	39	19	28	15	24
17	4	2	0	21	6	33	15	53	19	26	15	11
18	3	44	0	26	6	51	16	7	19	24	14	58
19	3	27	0	32	7	9	16	21	19	21	14	45
20	3	11	0	40	7	27	16	34	19	18	14	32
21	2	55	0	48	7	45	16	47	19	15	14	19
22	2	39	0	57	8	3	16	59	19	11	14	6
23	2	23	1	6	8	22	17	11	19	7	13	53
24	2	7	1	16	8	41	17	22	19	2	13	40
25	1	52	1	26	9	1	17	33	18	57	13	27
26	1	38	1	37	9	21	17	43	18	51	13	15
27	1	25	1	49	9	41	17	53	18	45	13	3
28	1	13	2	2	10	1	18	3	18	39	12	52
29	1	2			10	21	18	13	18	33	12	41
30	0	51			10	40	18	23	18	26	12	30
31	0	41			10	59			18	18		

Dies.	*Jul.* Min.	Sec.	*Aug.* Min.	Sec.	*Sept.* Min.	Sec.	*Octob.* Min.	Sec.	*Nov.* Min.	Sec.	*Dec.* Min.	Sec.
1	12	19	10	4	16	23	26	30	31	55	25	34
2	12	8	10	8	16	42	26	49	31	55	25	10
3	11	58	10	13	17	1	27	8	31	54	24	45
4	11	48	10	18	17	21	27	26	31	52	24	20
5	11	38	10	23	17	41	27	43	31	50	23	55
6	11	28	10	28	18	1	28	0	31	47	23	30
7	11	18	10	34	18	21	28	16	31	43	23	4
8	11	9	10	41	18	41	28	32	31	37	22	38
9	11	0	10	49	19	1	28	47	31	30	22	11
10	10	52	10	58	19	21	29	2	31	22	21	43
11	10	47	11	7	19	41	29	16	31	13	21	14
12	10	38	11	16	20	1	29	30	31	3	20	44
13	10	31	11	25	20	22	29	43	30	53	20	14
14	10	25	11	36	20	43	29	56	30	43	19	44
15	10	19	11	48	21	4	30	9	30	32	19	14
16	10	13	12	1	21	25	30	22	30	20	18	44
17	10	7	12	14	21	47	30	34	30	8	18	14
18	10	2	12	28	22	9	30	45	29	55	17	44
19	9	58	12	42	22	31	30	55	29	40	17	14
20	9	54	12	57	22	52	31	4	29	23	16	44
21	9	51	13	12	23	13	31	12	29	6	16	14
22	9	49	13	27	23	33	31	19	28	48	15	44
23	9	47	13	43	23	53	31	26	28	30	15	14
24	9	46	13	59	24	13	31	32	28	11	14	43
25	9	46	14	16	24	33	31	38	27	51	14	12
26	9	46	14	33	24	53	31	43	27	30	13	41
27	9	47	14	50	25	13	31	47	27	8	13	10
28	9	49	15	8	25	33	31	50	26	45	12	40
29	9	52	15	26	25	52	31	53	26	22	12	10
30	9	56	15	45	26	11	31	55	25	58	11	40
31	10	0	16	4			31	55			11	10

demonſtrationem etiam revera exactis Pendulis compertum eſt, quod ad inæqualitatem dierum ad rectam menſuram reducendam, æquatio, prout eam hic per præcedentem Tabulam inſtituimus, exacte cum experientia conveniat, ita ut tuto ei confidere liceat. Idque tanti momenti eſt in inveniendis longitudinibus, ut, ſi non fuerit obſervatum, nonnunquam ſpatio 3 menſium in calculo errorem committas 7 graduum & amplius, ſine ulla tamen horologiorum culpa: qui gradus ſub Tropicis ultra 100 Germanica milliaria continent.

Oſtenſo, quomodo horologia poſſint adaptari terrâ, vel quomodo eorum differentia quotidiana ſit invenienda, proximum erit dicere, quomodo idem faciendum ſit in navi fixa ad anchoram, cum minime poſſibile ſit idem præſtare in velificatione.

Obſervabimus quodam die ortum & occaſum Solis, & in utraque obſervatione ubi ejus medietas exacte ſupra Horizontem apparet, notabimus horam quam indicat horologium, & ſupputabimus quot horæ interea fuerint præteritæ, cujus numeri dimidio addito ad horam obſervationis matutinæ, habebimus horam quam indicavit horologium cum Sol eſſet in meridiano: cui addens Tabulæ æquationem iſtius diei, ſummam notabimus, & horologium ulterius promoveri patiemur. dein quibusdam diebus, elapſis (quo autem plures præterierint, eo melius eſt) idem omnino faciemus; Et ſi hora hujus ultimi diei ſit eadem, cum ea quæ antea fuerat notata, horologium recte accommodatum eſt. Sin vero major vel minor ſit, vel lentius vel celerius movetur, & differentia diviſa per numerum dierum interim dilapſarum dabit quotidianam differentiam, quam annotabimus, & ſi velimus horologium relinquemus in illo ſtatu; vel alioquin removendo minus pondus penduli ut ſupra dictum eſt, melius horologium accommodabimus.

	h.	*m.*	*ſ.*
Ex. Gr. pone 21. Martii mane cum ſolis medietas apparet ſupra horizontem horologium indicare.	5.	30.	10.
Et veſperi ubi Solis medietas latet infra horizontem.	5.	20.	6.

Ut

	h.	m.	ſ.
Ut ſcias ope horologii horas inter binas obſervationes elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	30.	10.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	29.	50.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	20.	6.
Prodeunt horæ inter binas obſervationes elapſæ	11.	49.	56.
Quarum dimidium eſt	5.	54.	58.
Quo addito ad horam ortus	5.	30.	10.
Prodit hora horologii, cum ſol eſſet in Meridiano	11.	25.	8.
Cui addita æquatione 21. Martii	0.	7.	45.
Summa eſt	11.	32.	53.
Septem diebus poſt ſc. 28. Martii obſervetur ortus ſolis, quum horologium indicat	5.	19.	4.
Et occaſus quum indicat	5.	25.	4.
Ad habendas horas interim elapſas, ſubtrahe horam ortus	5.	19.	4.
ex	12.	0.	0.
Reſtant	6.	40.	56.
Cui ſi addas horam occaſus	5.	25.	4.
Prodeunt horæ interea delapſæ	12.	6.	0.
Quarum dimidium eſt	6.	3.	0.
Quo addito ad horam ortus	5.	19.	4.
Prodit hora horologii cum Sol erat in meridie	11.	22.	4.
Cui addita æquatione 28. Martii	0.	10.	1.
Summa eſt	11.	32.	5.

Quæ ſumma ſi fuiſſet eadem cum priori ſcilicet 11. 32. 53. ad rectam menſuram diſpoſitum fuiſſet horologium; ſed cum poſterior minor ſit priori, differentiâ exiſtente 49. ſecundorum, horologium ſpatio 7 dierum tanto tardius fuit promotum, quæ 49 ſecunda diviſa per 7 numerum dierum, dant quotientem 7 ſecunda differentiam diurnam, quâ horolo-

gium tardius movetur; possumus etiam loco ortus & occasus Solis duas æquales Solis altitudines observare ante & post meridiem, & hora horologii annotatâ utriusque observationis tempore, eodem modo, ac hic dictum est procedemus.

V I.

Ope Horologiorum mari invenire longitudinem loci in quo verfaris.

Singulis horologiis nomina vel signa impone ut A. B. C. & antequam velifices, dispone eadem secundum tempus observatum per Solem in loco, ubi moraris, diminutum æquatione ejus diei, quo observas; quem annotabis.

Dein ubi in mari versaris si vis scire longitudinem loci, in quo es; quot gradibus Meridianus loci hujus sit orientalior vel occidentalior meridiano loci illius in quo adaptasti horologia; observa Solem vel Stellas, ut determines horam, & vide quam horam eodem momento indicent horologia; quam horam, si horologia non fuerint disposita ad rectam mensuram æquabis cognitâ diurnâ differentiâ, ei porrò addens æquationem præsentis diei, quo ita habeas horam in loco illo, ubi horologia fuere disposita. Si hæc hora eadem sit cum illa quæ observata fuit in loco præsente, consistis sub eodem Meridiano, ac ubi horologia fuere disposita ad Solem: Si vero hora observata major sit illâ quam horologia ostendunt, certus es, te pervenisse sub Meridianum Orientaliorem; sin denique fuerit minor, pervenisti sub Meridianum Occidentaliorem: & computatis in singulas quasque horas differentiæ temporis 15 gradibus longitudinis vel in singula minuta 15 minutis, vel totidem quadrantibus gradus, cognosces, quot gradibus dicti Meridiani ab invicem distent. E. Gr. pone Horologia A. B. C. fuisse aptata ad Solem in loco ex quo abiisti, 2 Martii, id est ad horam observatam, sed in tantum diminutam, quanta est æquatio 2 Martii, 2 min. 28 sec. & pone horologium A fuisse dispositum ad veram mensuram, sed B moveri singulis diebus 7 secundis tardius, & C singulis diebus 12 secundis citius.

Ali-

	h.	*m.*	*ſ.*
Aliquot diebus poſt E. G. 15. Maji, ut detegas longitudinem loci in quo in mari verſaris; obſerva horam diei, quæ ſit	5.	18.	10.
Et comperis horologium A indicare	2.	6.	0.
Sed horologium B. indicare	1.	57.	22.
Sed cum ſingulis diebus 7. ſec. tardius moveatur, prodeunt ſpatio 74. dierum nempe a 2. Martii ad 15. Maji	0.	8.	38.
Quæ addita ad horam a B. demonſtratam prodit hora eadem ac indicavit horologium A	2.	6.	0.
Invenis etiam horologium C. indicare	2.	20.	48.
Sed cum moveatur 12. ſec. ſingulis diebus citius, habemus ſpatio 74. dierum	0.	14.	48.
Quæ ſubtracta ab hora a C. indicata, iterum prodeunt	2.	6.	0.
Cum itaque hora horologiorum ſit	2.	6.	0.
Adde illi æquationem 15. Maji	0.	19.	29.
Prodit hora loci ubi horologia diſpoſita ſunt	2.	25.	29.
Sed hora obſervata eſt	5.	18.	10.
Excedens priorem	2.	52.	41.
Ergo Meridianus loci in quo verſaris 15. Maji Orientalior eſt, Meridiano loci, in quo horologia fuere aptata	2.	52.	41.
Quæ horæ in gradus reductæ, ponendo 15. gradus valere unam horam, prodeunt	*gr.* 43.	*min.* 0.	*ſec.* 15.

Verum eſt ex eodem calculo poſſe concludi te eſſe ſub Meridiano hôc ipſo 180. gradus Orientaliori, quia index horarius revolutionem ſuam abſolvit ſpatio 12. horarum in horologiis, ſed differentia tanta eſt, ut nequeas in ea decipi. Alioquin enim horologium poſſet conſtrui, cujus index circuitum ſuum ſemel abſolveret ſpatio 24 horarum.

Obſervandum quoque hic eſt, cum dico, locum tot gradibus Orientaliorem eſſe illo ex quo abiiſti, illud dici eo reſpectu quod illuc veneris ad Orientem navigans, verſus quam partem gradus numerari poſſunt usque ad 360; alioquin enim ſatis no-

tum est: locum, qui 180. gradus Orientem versus ab alio distat, tantum etiam Occidentem versus inde distare: & pariter, qui 300. gradus Orientaliter ab alio distat etiam 60. gradus Occidentaliter inde distare.

VII.

Mari invenire horam diei.

Quandoquidem pro invenienda longitudine requiritur ut hora loci, in quo es, cognita sit, ut supra dictum est, dicta hora summa exactitudine est observanda; unumquodque enim minutum quo in calculo aberras constituit errorem $\frac{1}{4}$. gradus in longitudine, id est, prope Æquatorem $3\frac{3}{4}$. Germanicorum milliarium sed minus ubi longe inde abes:

Quare ad certam horæ inventionem, ne fidas observationi maximæ Solis altitudinis, ut inde concludas præcise meridiem esse vel Solem in Meridiano, nisi inter Tropicos Sol fuerit in ipso puncto Zenith vel ei quam proximus. Nam alias Sol existens prope Meridianum aliquamdiu perseverat sine ulla sensibili mutatione altitudinis suæ; ideoque altitudo meridialis idonea satis est ad latitudinem vel elevationem Poli loci alicujus dimetiendam, non tamen ad longitudinem ejus exacte inveniendam. Multo minus niti potes pyxidibus nauticis in accurato meridiei tempore inquirendo.

Neque annuli Astronomici vel alia horologia solaria certa satis sunt in ostendenda hora ad minuta & secunda. Sed melius est observare solis altitudinem, ubi est in Oriente vel Occidente, quo autem Orienti aut Occidenti propior est, eo melius; ibi enim cum est, mutatur ejus altitudo sensibiliter magis quam ante vel post & ita, ex inventa Poli elevatione, & nota Solis declinatione, hora potest computatione detegi, cujus modus ab aliis satis descriptus est; quia tamen computatio illa molesta est & nonnulli errores in mensuranda altitudine Solis committi possunt faciliorem hic methodum ostendam & demonstrabo.

VIII. Quo-

VIII.

Quomodo ex observatione ortus & occasus Solis & ex hora horologiorum longitudo mari inveniri queat.

Hæc ſane methodus meo judicio omnium eſt certiſſima, cum ad eam neque notitia Poli elevationis, neque Solis declinationis, neque ulla inſtrumenta ad obſervandum requirantur; cum neque refractio quid nocere poſſit, quoniam hæc in ortu & occaſu Solis ejusdem diei parum aut nihil differre poteſt.

Sicuti ergo antea docuimus horologia in navi adaptare, & obſervare quâ horâ eorundem horologiorum Sol fuerit in meridiano; hic eodem modo procedendum eſt, id eſt, in ortu & occaſu ſolis, ubi ejus medietas eſt ſupra horizontem, annotabis horam demonſtratam tunc temporis per horologia; & licet interea velificando fueris progreſſus, nil refert, uti poſtea demonſtrabitur: dein computans quot interea horæ horologiorum dilapſæ ſint, earumque dimidium addens ad horam ortus, habebis horam quam horologium indicabat quum Sol erat in Meridiano; ad quam addenda eſt æquatio iſtius diei ex tabula deſumta; & ſi ſumma æqualis ſit 12 horis, fuiſti meridie ſub eodem Meridiano, ſub quo horologia ad ſolem fuere adaptata; ſed ſi ſumma excedat 12. horas, fuiſti meridie ſub occidentaliori meridiano, quam loci ejus in quo horologia ſunt diſpoſita; ſed ſi ſumma fuerit minor 12. horis fuiſti ſub orientaliori Meridiano, idque toties quindecim gradibus, quot horis ſumma fuerit minor vel exceſſerit 12. horas, prout iſtius rei computationem antea jam docuimus.

E. G. Ponatur Horologia A, & B, ut ante, fuiſſe adaptata ad Solem in loco ex quo deceſſiſti 2. Martii, id eſt ad horam Solis diminutam æquatione iſtius diei ſcil. 2. min. 28. ſec. Horologio A, ad rectam menſuram redacto; B. vero ſingulis diebus 7. ſecundis tardius moto; Poſtea ſcire deſiderans longitudinem loci in quem perveniſti,

	h.	*m.*	*s.*
(pone 1. Junii,) observetur mane sol medius supra horizontem quando horologium indicat	2.	30.	37.
Et Vesperi iterum medius Sol infra horizontem, cum idem horologium indicat	3.	9.	7.
Ad inveniendas horas interea elapsas, subtrahe horam ortus	2.	30.	37.
ex	12.	0.	0.
Reliquum est	9.	29.	23.
Huic adde horam occasus	3.	9.	7.
Prodeunt horæ interea elapsæ	12.	38.	30.
Quarum dimidio	6.	19.	15.
Addito ad horam ortus	2.	30.	37.
Habebis horam Horologii A, quum Sol erat in Meridiano	8.	49.	52.
Eodem modo quæratur hora horologii B, cum Sol erat in Meridiano, quæ sit	8.	38.	5.
Sed hoc horologium singulis diebus 7. secundis tardius motum retardatur spatio 101. dierum a 2. Martii ad 1. Junii	0.	11.	47.
Quæ propterea ad inventam horam addita, datur	8.	49.	52.
Id est, eadem hora, quæ per horologium A. inventa est; ad quam nunc addita æquatione 1. Junii	0.	18.	10.
Prodit	9.	8.	2.
Hæc est diei hora loci in quo horologia adaptata sunt, quæ cum coincidit cum meridie loci observationis;			
Differentia est	2.	51.	58.
	gr.	*min.*	*sec.*
Quare hic ultimus Meridianus tanto orientalior est; quibus horis reductis ad gradus, uti supra docuimus prodeunt	42.	59.	30.

Patet te hoc modo invenire longitudinem loci, in quo meridie vel Sole existente in Meridiano fuisti; quæ differt a longitudine loci, in quo observas Solis occasum,

ſum, ſed ſine ſenſibili errore æſtimare potes, quantum paucis horis progreſſus fueris, vel longitudo mutata fuerit: Potes etiam, loco obſervationis ortus & occaſus Solis, prius Solis occaſum, veſperi obſervare, & dein proximo mane ortum, utroque tempore notando horam Horologiorum; & inde computa eodem modo horam in loco diſpoſitionis, quum media nox erat in loco obſervationis, & detege differentiam longitudinis ut ante. Tandem potes quoque loco ortus & occaſus Solis obſervare duas æquales ſolis altitudines ante & poſt meridiem, annotando horam horologiorum, & computando eodem modo, quo diximus de ortu & occaſu; conſiderandum tamen eſt, Solis altitudines optime obſervari, quando Orienti vel Occidenti proximus eſt, ut antea notatum.

Licet forte quis cenſeat, in praxi hujus methodi, inter ante & pomeridianam obſervationem, quieſcentem navem deſiderari, aut quæ parum transferatur; certum tamen eſt, progrediendo nullum ſenſibilem errorem cauſari poſſe, in quantum interea eundem teneas curſum, æquabili velocitate.

Primum enim, ſi curſum Orientem vel Occidentem verſus dirigas, nullus omnino error erit, ſed certo concludere poteris, qua longitudine meridie vel mediâ nocte fueris, unde ergo, uti antea dictum eſt, ſatis exacte æſtimare potes, ubi ſis ultimæ obſervationis tempore.

V. G. pone, quod ante meridiana Solis altitudo 10 graduum obſervata ſit, quum horologia indicant 8. horas & pomeridiana æqualis altitudo quum horologia indicant 2. horas; & quod inter utramque obſervationem æquabili velocitate Orientem verſus navigaverim, licet inſcius me 1. gradum in longitudine progreſſum eſſe, id eſt, 1. gradum paralleli juxta quem navigo: Agens jam ſecundum præſcriptam regulam, comperio longitudinem 15. gradus Orientem verſus, calculum ineundo a loco, in quo Horologia fuere diſpoſita. quam longitudinem 15. graduum dico eſſe loci, ubi meridie fui.

Quod ita demonſtratur. Quoniam locus veſpertinæ obſer-

vationis uno gradu Orientalior eſt, quam matutinæ; certum eſt in loco veſpertinæ obſervationis Solem 4. minuta prius perventurum eſſe, ad altitudinem 10. graduum, quam in loco matutinæ. Duorum enim locorum ſub eodem paralelo ſitorum, quot gradus unus altero Orientalior eſt, totidem 4. minutis prius in illo obſervantur ſingulæ Solis altitudines; ideo ſi in priori loco cum navi ſubſtitiſſem, Solem veſpertinâ obſervatione reperiſſem ad altitudinem 10. graduum quum horologia indicabant non 2. horas, ſed 2. horas 4. min. ubi tum loci ejus longitudinem, juxta regulam, inveniſſem 14½. gradus Orientem verſus. Sed certum eſt, me in priori temporis dimidio inter 2. obſervationes progreſſum fuiſſe ½ gradum, quoniam ponitur, me toto tempore profeciſſe 1. gradum, velocitatemque fuiſſe æquabilem. Eram igitur meridie in longitudine 15. graduum Orientem verſus, ſicuti prius erat inventum.

Pariter poteſt demonſtrari, progreſſum navis Occidentem verſus nil obſtare, ſed regulam ſequendo, iterum invenire longitudinem loci, quem meridie præternavigaſti.

Si jam curſus inter 2. obſervationes Meridiem verſus vel Septentrionem deſciſcat, imo licet fieret directe Septentrionem vel meridiem verſus, modo ponatur æquabilis velocitas, nullus inde orietur error ſi Solis altitudo ſumatur, quando prope Orientem vel Occidentem eſt, quibus in locis alibi quoque dictum eſt optime fieri obſervationem. Ratio hæc eſt, quando 2. loca Septentrionaliter vel Auſtraliter a ſe mutuò diſtant, & ſolummodo 1. vel 2. gradus in latitudine differunt, ſi Sol reſpectu unius loci in Oriente vel Occidente verſetur, ad certam ſupra horizontem altitudinem, etiam quam proxime eodem tempore ad eandem altitudinem ſupra horizontem alterius loci apparebit. Ita ut comperiam, licet navis inter matutinam & veſpertinam obſervationem 2. gradus navigaret, quod raro vel nunquam accidit, nullum tamen in longitudine errorem hinc oriri poſſe, vel tantum paucorum minutorum.

Præ-

Præſcriptis ergo modis, vel per ortum & occaſum Solis, vel per occaſum & ortum Solis, vel per 2 æquales Solis altitudines, tuto ſemper uti poſſumus, non obſtante progreſſu navium; quemcunque hæ teneant curſum.

Si autem procul ab Æquatore Septentrionem vel Meridiem verſus naviges, præſertim hyeme, altitudo Solis lente mutatur, unde incertæ ſunt obſervationes; ſed iis in locis gradus longitudinis ſunt breviores, vel pauciora milliaria continent quam prope Æquatorem, ideoque errores in inveniendis longitudinibus eo minus ſenſibiles ſunt.

IX.

Potes verò, præſertim in iis oris, quæ procul ab Æquatore Septentrionem vel Auſtrum verſus remotæ ſunt, vel etiam ubicunque velis, præſcriptam regulam ad praxin vocare, obſervando 2 æquales altitudines cognitæ alicujus ſtellæ, quæ multum attollitur ſupra Horizontem. Nam inde ſecundum memoratam regulam, diſces quâ horâ Horologiorum in Meridiano fuerit ſtella, & porro cognita ejuſdem *aſcenſione recta*, ut & *aſcenſione recta* Solis, facile inde ſupputabis horam ſolarem, qua comparatâ cum horâ Horologiorum, ut ante, habebis longitudinem loci, ubi fuiſti ſtella exiſtente in Meridiano.

X.

Quando Horologia, quorum aliquamdiu motus fuit accuratus, ab invicem paululum differunt, prout diuturnitate temporis facile accidit, ut unum vel alterum minuto circiter deficiat, eo in caſu computatio ineunda eſt erit ſecundum iſtud, quod celerius movetur: niſi noris cauſam veriſimilem ob quam citius moveatur; facilius enim Penduli motus retardatur, quàm acceleratur: nam filum, cui Pendulum appendet, poterit forſan per violentam navis agitationem nonnihil extendi, ſed nequit contrahi.

XI.

Quando videndam se offert regio cognita, ne negligas annotare longitudinem illius, quantum exacte fieri poterit, ex inventa longitudine loci in quo versaris; Primo ad corrigendas inde mappas marinas, postquam longitudo loci fuerit diversis temporibus comperta eadem, ita ut nil amplius de ea dubites. In his enim mappis quantum attinet ad situm locorum Orientem & Occidentem versus, multa supersunt emendanda. Secundo ut scias, in prosecutione tui itineris, quantum respectu loci visi velificando progressus fueris ad Orientem vel Occidentem: etiamsi infortunio, vel negligentia, omnia quiescant Horologia, poteris eadem ad motum rursus adaptare, & disponere ad horam per Solem compertam. computando porro longitudinem ab ejusdem loci visi Meridiano. Nam nullatenus teneris certum Meridianum alicujus loci cogniti, pro initio computationis longitudinum habere, cujus usus tantum est in mappis vel Tabulis longitudinum, in quo casu usu venit Meridianus montis Pici in insula Teneriffa, vel Meridianus insularum Corvo & Flores, occidentalissimarum Azorum vel insularum Flandricarum, vel cujusvis alterius loci: & foret egregium (quod non obtinet) si omnes auctores unum eundemque Meridianum pro primo eligerent, ut singula loca iisdem gradibus longitudinis pariter ac latitudinis determinarentur: sed in itinere satis est longitudinum differentiam observare, initio computationis facto a Meridiano cujuscunque loci.

XII.

Si accidat, ut mari medio omnia Horologia quiescant, quam primum fieri potest, rursus eadem ad motum adapta, ut

ut illorum ope ſcias, quantum dein ad Orientem vel Occidentem progreſſus ſis, quod non parvi eſt momenti, nam defectu hujus notitiæ, nonnunquam violentis fluctibus ita abriperis, ut, licet vento ſecundo naviges, tamen retrorſum abigaris, cujus rei varia dantur exempla.

F I N I S.

EXCERPTA EX LITERIS DATIS LONDINI $\frac{13}{23}$ JANUARII MDCLXV.

TAndem Navarchus Holmius huc advenit, & relatio, quam ipſe mihi communicavit de experimento, quod de noſtris Horologiis fecit, plane nos certos facit de bono, qui ſperandus eſt, ſucceſſu; Cum ad inſulam St. Thomæ ſub æquatore eſſet, ut inde huc veniret, coactus fuit, longiſſime Occidentem verſus curſum dirigere, proſperum ut obtineret ventum; cum ergo ſub ejus auſpiciis quatuor darentur naves, omnes ſimul navigarunt per 600 milliaria non mutato curſu: cum dein ſecundum ventum nacti eſſent quo peterent littora Africæ, eo tendebant, curſum ſuum Orientem inter & Septentrionem dirigentes; cumque hoc curſu 4 vel 500 milliaria confeciſſent, judicabant navitæ 3 navium quæ ſub ejus erant auſpiciis, ſe procul a prædictâ orâ eſſe, ita ut non ſufficientem aquæ quantitatem haberent, dum eo pervenient; Navarchi Holmii navis ſatis habebat; ſed ubi audiret, quid ſentirent cæteri, qui tribus reliquis præerant navibus, omnes nautas & gubernatores convocari juſ-

sit, ut deliberarent de eo quod faciendum esset. Ubi verò vidisset commentarios, & ephemerides, quas illi, qui praeerant 3 iis navibus proferebant, & conjecturam de loco in quo versabantur; cumque post longas deliberationes, omnes censerent, praestare ad Barbadas trajicere, quam oras Africae quaerere, quia ventus longe citius eos illuc transferret, dixit ille: Viri computatio vestra cum nostra minimè convenit; nam secundum Horologia mea processi, unde concludo, vos errare omnes, statuendo nos multò longius Occidentem versus esse progressos, quam revera sumus, unius error est 120 *milliaria, alîus* 100, *alîus* 80: *verùm ita Horologiis confido ut hac vice experimentum facere velim; nam secundum meam computationem insula del Fuogo (quae una est ex insulis Capoverdae seu promontorii Hesperii,) non ultra* 30 *milliaria a nobis abest; Ibi nobis aquam possumus curare, & eo cursum dirigere constitui; Si vera est computatio, multum praestabit nobis hanc viam ingredi, quam a vobis ostensam; sin evenerit aliter, biduum tantum producemus navigationem, satisque aquae interim superit, ut Barbadas perveniamus; quoniam tanta mihi in navi copia est, ut vobis defectum vestrum supplere queam; Addens quem cursum tenere vellet, mandavit ut sequerentur ipsum caeteri. Postero mane detegebant insulam del Fuogo, & opportuno illuc advenère tempore, uti praedixerat: Cogor his desinere, communicaturus tecum reliquos omnes casus peculiares, quos scriptis mandare promisit, quamprimum illos nactus fuero.*

Nota, haec Horologia fuisse ex primo Pendulorum genere, nec tam exacta quam recentiora.

EXCERPTA EX LITERIS HAGÆ COMITUM, DIE XXVI. FEBRUAR. MDCLXV. DATIS.

CUm per aliquot dies necesse mihi foret cubiculum tenere, & variis observationibus circa duo mea novæ fabricæ Horologia pendula tempus impenderem, mirum quendam eorum effectum, & a nemine unquam vel cogitandum, detexi. Suspensa enim juxta se invicem ad distantiam unius aut duorum pedum, tam accurate congruebant, ut sine ullâ variatione pendulorum vibrationes simul peragerentur. Quod cum per aliquod tempus impense miratus fuissem, tandem reperi ex aliquâ quasi sympathiâ id oriri; ita ut si pendula movissem vibrationibus diversis & ut ita dicam intermixtis, intra dimidiæ horæ spatium consona rursus fierent, & sibi mutuo, quamdiu motum non turbabam, responderent. Remotis deinde à se invicem Horologiis, & ad distantiam 15. pedum suspensis, uno die quinque secundorum discrepantiam animadverti, quæ clare demonstravit, priorem pendulorum convenientiam, uti dixi, à sympathia quadam debuisse proficisci, quæ, meo quidem judicio, unicè insensili aëris agitationi, per pendulorum motus productæ, adscribi potest. Continentur tamen Horologia suis Capsis, quarum utraque si omne plumbum contentum numeres, centum fere li-

brarum pondus æquat. Et hoc observandum, pendula, cum congruunt, non parallelis motibus ferri, sed contrariis, nunc accedendo, nunc recedendo. Quando autem horologia ad parvam distantiam rursus à me fuere posita, pendula, priorem convenientiam brevi tempore recuperarunt.

Nec hisce contentus, asserem latum tres pedes, crassum unum pollicem, ita interposui, ut pars inferior fundum tangeret, superior Horologia excederet & quasi separaret. Non turbata tamen fuit motuum concordia, sed dies noctesque perduravit, imò si ipse turbassem, brevi instaurata fuit. Nunc in id incumbo, ut quam accuratissime Horologia concordent, experturus deinde ad quam usque distantiam sympathia hæc sese exerat; sed, ut ex observatis auguror, non infra 5. aut 6. pedes subsistet. Major tamen horum omnium est expectanda veritas, quam præstabit diligentia mea, & accuratior in rei causas inquisitio.

Quicquid sit, habemus duo Horologia, quæ nunquam inter se discrepant: quod etiamsi mirum sit, tamen est verissimum. Addo, præter Horologia quæ novo hoc invento constructa sunt, nulla alia idem præstitisse; unde simul patet, quam accurata illa sint, quæ ad perpetuum consensum tantillum requirunt.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA.

DE HUGENIANA CENTRI OSCILLATIONIS DETERMINATIONE CONTROVERSIA.

I.

Obſervationes Abbatis Catelani in propoſitionem, quæ fundamentum eſt 4ᵃ. partis tractatus de Pendulis, Hugenii.

DOminus Hugenius in tractatu ſuo de Pendulis, ut nil quod ad materiam ſpectat intactum relinqueret, hanc diviſit in 5 partes, in quarum 4ᵃ. fuſe examinat quæſtionem de *Centro Oſcillationis* vel *vibrationis*. Sed cum difficile ſit animo ſemper æqualiter attento abſtruſas veritates, quales ſunt Mathematicæ, perpendere; non eſt quod miremur, ſi quæſtionem illam non æque accurate, quam quidem reliquas ejusdem operis, examinaverit. Principium autem, quo nititur totum ejus Syſtema Oſcillationis hoc eſt.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compoſitum atque e quiete dimiſſum, partem quamcunque Oſcillationis integræ confecerit; atque inde porro intelligantur pondera ejus ſingula, relicto communi vinculo, celeritates acquiſitas ſurſum convertere, ac quo usque poſſunt aſcendere; hoc facto centrum gravitatis ex omnibus compoſitæ, ad eandem altitudinem reverſum erit, quam ante inceptam Oſcillationem obtinebat *.

* Vide ſupra pag. 126.

Ut parum firmam propoſitionem hanc demonſtremus, ſufficiet obſervaſſe; vim, quam vocamus gravitatem, longe aliter agere in pondera inter ſe juncta quam in pondera a ſe invicem ſeparata. Sint A & B æqualia pondera, quorum

TAB XXVIII. Fig. 1.

non considerantur neque magnitudo neque figura, quasi singula in unicum punctum reducta forent; si separatim suspensa ex eodem puncto D, & elevata ad idem planum Horizontale D A B, dimittantur usque ad F & G, gravitates eorum, ex ratione Mechanica, quæ cum experimentis, & principiis Physices congruit, augebuntur in tali ratione, vel quod idem est, acquirent velocitates tales, ut harum quadrata sint inter se ut altitudines A H & B I. unde illa pondera perpendiculariter descendunt ad Horizontem.

Quod si dein pondera hæc duo, lineâ aut virgâ inflexili A B, quam pondere expertem ponimus, conjungamus, & ex eodem puncto D, ad memoratas distantias D A & D B, suspensa, dimittamus ad F & G ab eâdem, quâ ante, altitudine. Pendulum ex illis compositum, acquiret tantum velocitatis quantum summa duorum Pendulorum simplicium, quoniam commune gravitatis centrum E idem, quod antea, manebit, & ponderum non mutatur situs respectu centri Telluris; sed partes, in quas tota illa velocitas se distribuet ponderibus A & B, erunt inter se ut arcus A F, B G, vel ut radii D F, D G; quoniam in hoc casu ratio inter motus ponderum pendebit ab eorum situ respectu puncti suspensionis D, quod est motuum centrum. Triangula autem H A F & I B G, ut & triangula A F D, B G D cum sint similia, latera eorum A H & B I, A F & B G, D F & D G sunt proportionalia, id est datur eadem ratio inter altitudines, unde pondera A & B descendunt, & inter velocitates quas acquirunt descendendo; sed altitudines sunt eædem ac in priori suppositione; ergo velocitates sunt diversæ, quoniam illæ altitudines, quæ sunt proportionales velocitatibus ponderum simul appensorum, non sunt proportionales nisi quadratis velocitatum, quando sunt separata.

Porro ponamus pendulum compositum in vibratione suâ occurrere plano duro D F G, quo rumpatur, ita ut a se invicem pondera solvantur, erunt hæc reflexa juxta tangentes arcuum F A & G B ad altitudines, quæ inter se erunt ut quadrata velocitatum, quas cadendo acquisivere, id est, ut quadrata radio-

radiorum D F & D G, vel horum proportionalium A H & B I. nam ſeparatio ponderum non mutat quantitatem motus eorum: efficit ut moveantur juxta legem corporum cadentium, quæ non inter ſe conjuncta ſunt. Demonſtratur in Mechanicis, altitudinem perpendicularem ad horizontem, unde deſcendit, vel ad quam aſcendit, commune gravitatis centrum multorum ponderum, æqualem eſſe ſummæ altitudinum, quarum reſpectu (gallice *par raport auquelles*). pondera deſcendunt vel aſcendunt, diviſæ per eorundem numerum: ſed probavimus pondera, quæ ſeparantur, rupto pendulo percuſſione in planum oſcillationi illius oppoſitum, iterum aſcenſura eſſe, ad altitudines diverſas ab iis, unde deſcenderunt, & quidem tales, ut ſummæ ad utramque partem æquales eſſe nequeant; nam ultimæ altitudines ſemper habent pro radicibus quantitates primis proportionales, & præterea eandem, quam eorum radices componentes ſummam, quæ exprimit totam celeritatem penduli A B; ſi ergo diverſas illas ſummas ſeparatim dividamus per numerum ponderum, habebimus altitudinem ad quam centrum commune gravitatis iterum aſcendit, diverſam ab illa, unde deſcendit; quoniam ſunt partes aliquotæ ſimiles quantitatum inæqualium.

Propoſitio igitur Domini Hugenii falſa eſt, & conſequenter quidquid concluſit circa centrum Oſcillationis corruit; vera autem Mathematica hujus quæſtionis ſolutio hæc eſt.

II.

Domini Abbatis Catelani Examen Mathematicum Centri Oſcillationis.

QUæſtio de determinando centro Oſcillationis, ſi bene intellecta fuerit, haud difficilis eſt. Centrum Oſcillationis vocatur punctum mobile in Pendulo ad talem ab axe, vel centro ſuſpenſionis, diſtantiam, ut ſi omnes aliæ Penduli partes deſtruerentur, illa ſola pergeret in vibrationibus ut antea; id eſt eodem tempore ac totum Pendulum; Quod ita non fiet cum aliis partibus ſingulis ſeparatim ſumtis; nam

 quæ

quæ axi viciniores sunt, breviores & frequentiores vibrationes peragent quam remotiores, si arcus similes describant, & aër non resistat.

Cujus rei ratio est, quod viciniores describant arcus minores & acquirant celeritates majores respectu arcuum quam remotiores: nam arcus sunt proportionales quadratis, & velocitates radicibus eorum; quo autem radices minores sunt inter se, eo majores sunt respectu quadratorum suorum.

Cum in Pendulo omnes partes nisi simul, propter earum conjunctionem, moveri nequeant, vibratio minus distantium ab axe ita retardata est a vibratione remotiorum, & vibratio remotiorum ita accelerata est a vibratione aliarum, ut inter illas detur compensatio velocitatum proportionalis arcubus quos describunt; ita ut tempus vibrationis totius Penduli medium sit inter tempus, quo Oscillationem peragunt ejus partes a se invicem solutæ, ut sit æquale summæ illorum temporum, divisæ per numerum partium, quas ut Mathematice & exactissime procedamus consideramus, ac si reductæ essent in puncta.

Constat experimentis, & per Philosophiam Cartesianam demonstrari potest, omnia gravia tellurem versus cadere in temporibus quæ sunt in ratione subduplicatâ, vel sicuti radices, altitudinum, unde descendunt, si verticaliter descendant, quod etiam & ex principiis Galilæi demonstrari potest, si cadant per arcus similes, qui incipiunt omnes in eodem plano.

Hæ altitudines in Pendulis, quæ describunt arcus similes circa axem, quocum forrmant idem planum, sunt inter se ut distantiæ ab axe, circa quem moventur.

Proposita ergo quæstio eo redit, *ut dividamus, per numerum partium Penduli, summam radicum distantiarum partium ab axe. vel generaliter summam linearum rectarum quæ repræsentant tempora vibrationium partium separatim sumtarum, ut habeamus lineam rectam, quæ sit mensura temporis, quo vibrationes suas peragit Pendulum, cujus consequenter quadratum vel 3a. proportionalis erit distantia inter axem & centrum Oscillationis.*

Applicatio hujus principii tribus magnitudinibus quas habet Geometria pro objecto satis facilis est.

Ad

1. Ad determinandum centrum Oscillationis lineæ rectæ suspensæ ex axe, debemus illam concipere, divisam in partes æquales infinite parvas, vel in omnibus suis punctis. Parabola dein super maximâ lineæ ab axe distantiâ describenda est, cujus vertex sit punctum axis in quod terminatur hæc distantia & parameter linea quæ est unitas respectu ejusdem distantiæ. E quovis lineæ puncto ducenda est axi parallela quæ occurrat parabolæ, ejusque applicata fiat, summa omnium applicatarum similium est æqualis rectangulo, cujus altitudo est linea proposita, & basis radix distantiæ inter axem & centrum Oscillationis quæsitum; nam summa illa est Parabola, vel Parabolæ portio, cujus Diameter est linea data, & Parameter tertia proportionalis illi lineæ & maximæ ab axe distantiæ; vel 4a. proportionalis positis hisce tribus, linea, maxima distantia, & differentia hujus cum minimâ.

2. Ut habeamus distantiam quâ centrum Oscillationis Plani remotum est ab axe, debemus concipere partem solidi Parabolici, cujus Parabolæ habeant pro Diametris maximas distantias inter axem & unamquamque linearum parallelarum, quæ implent planum. Si solidum hoc in duas partes æquales secetur juxta Axis longitudinem; & dimidia pars secta fuerit inter applicatas ad distantias ab Axe, & inter Plani latera, segmentum æquale erit Prismati, quod pro basi habet planum, & pro altitudine radicem distantiæ axis a centro Oscillationis ejusdem plani. si vibratio fiat circa Punctum vel si, quum fit circa Planum, Pendulum sit compositum e partibus, quæ sint in planis diversis respectu Axis, determinabitur, eâ methodo quâ diximus, quodvis centrum Oscillationis partium, quæ sunt in eâdem lineâ rectâ transeunte per punctum suspensionis, vel in eodem plano transeunte per Axem; omnia illa Oscillationis centra facient Pendulum multo simplicius & habens idem Oscillationis centrum, ac primum. Invenietur Oscillationis centrum dividendo per numerum aliorum Oscillationis centrorum summam linearum rectarum, quæ repræsentant tempora, quibus conficerent peculiares suas vibrationes. Tempora illa pendent ab arcubus, vel curvarum portionibus, descriptis ab omnibus Oscillationis centris in vibratione Penduli, qui arcus considerari debent singuli velut infinita plana diversimode ad Horizontem inclinata.

3. Quod ad solida attinet, concipe illa dividi in parallelas

inter se superficies & ad axem perpendiculares; formari debet, secundâ sectione, planum vel superficies curva distantiarum inter illorum centra Oscillationis & axem †, circa cujus puncta moventur. Sic in summâ centrorum, quæ ab unâ parte rectas lineas terminant, ex quibus planum hoc, vel superficies illa curva, composita est, habetur Pendulum magis simplex quam solidum, & cujus vibratio æque diuturna est. Centrum Oscillationis novi illius Penduli determinabitur transferendo omnia illa centra Oscillationis particularia ad Axem qui est eorum numerus, & ponendo illum axem ita moveri, ut puncta ejus percurrant eosdem arcus ac centra. Si solida proposita sint Prismata recta, habebunt eadem Oscillationis centra, ac eorum bases, si hæ fuerint perpendiculares ad axem.

Sic centrum Oscillationis solidi pendet a centris Oscillationis certarum superficierum motarum circa punctum, quarum commune Oscillationis centrum est centrum Oscillationis lineæ rectæ motæ circa aliam rectam vel curvam; ita ut non requirantur aliæ regulæ pro corporibus quam pro lineis & superficiebus.

MONITUM.

Observationes Abbatis Catelani primum editæ fuere in 25 *diario Parisiensi anni* 1681, *& examen Mathematicum in* 29 *diario ejusdem anni. Scripta ambo in primo diario sequentis anni iterum extant, cum monitu varia defici in prima editione, quam solam Hugenius viderat cum respondit; & in qua non reperiuntur ea quæ minori charactere hic edita sunt. Sola verba sequentia in prima dantur & in secunda fuere omissa post* †. centrum Oscillationis hujus plani coincidet cum centro Oscillationis solidorum illorum.

III.

Excerpta ex literis Domini Hugenii, quibus respondet observationi Abbatis Catelani in 4am. propositionem Tractatus de centris Oscillationis.

ADmiratus vidi, Theoriam meam de centro Oscillationis oppugnari, contra quam per 9 annos, a quibus typis man-

mandata fuit, nemo quid protulit; sed considerata refutatione, qua Abbas Catelanus 4^{am}. meam propositionem aggreditur, non vidi, quod ullatenus me feriat. nam ut paucis dicam, in quo fallitur; negat, datis duabus lineis & præter has, duabus aliis, quæ diversam quam primæ inter se rationem habent, summam duarum ultimarum æqualem unquam fore summæ duarum priorum.

Concipe priores 5 & 10 pedum, & alteras 3 & 12 & vide num harum summa æque ac illarum non sit 15: ut autem pateat errorem ejus inde oriri, utar eodem, quod ille proposuit, exemplo.

A & B sunt duo pondera applicata virgæ vel lineæ D B, quæ considerari debet ut inflexibilis & sine pondere; quæ libere notetur circa punctum D: tale Pendulum compositum voco e ponderibus A & B; si hoc peragat partem vibrationis, Ex. Gr. usque ad D F G, & occurrat plano, ad quod frangatur, ut pondera a lineâ inflexili separentur, & tendat sursum eorum unumquodque cum velocitate acquisita, ad maximam quam potest altitudinem, velut ad L & M, super planis inclinatis si velimus, quæ tangant arcus A F, B G; dico commune centrum gravitatis ponderum A & B quæ ascendunt in L & M tunc ad eandem fore altitudinem, ac erat in E, ante vibrationem inchoatam.

TAB. XXVIII. Fig. 2.

Abbas Catelanus ut falsam hanc probet propositionem, demonstrat, altitudines, ad quas duo pondera soluta ascendunt, ut hic N L, O M, diversas esse ab iis unde descenderunt, scilicet A H, B I. id quod verissimum est ex ratione ab ipso datâ, quod alteræ sint inter se ut lineæ D F, D G, alteræ vero ut quadrata harum linearum; *si ergo dividamus*, inquit *diversas illas summas per numerum illorum ponderum*, id est, si sumamus dimidium linearum L N, M O, & dimidium linearum A H, B I. *habebimus ab una parte altitudinem ad quam centrum commune gravitatis ascendit, & ab altera altitudinem unde descendit:* id verum est, per divisionem has duas altitudines detegi. sed minime concedo, duas summas divisas differre inter se; quod Abbas Catelanus probare

bare nequit; neque igitur, duas inventas altitudines centri gravitatis inæquales esse, id quod in conclusione contendit, nam licet altitudines L N, M O, diversam habeant rationem inter se quam altitudines A H, B I, non sequitur summas primarum & secundarum differre.

Possem præter hunc alium locum observare, ubi fallitur Abbas Catelanus, sed non hærebo, quoniam id, quod profert non spectat ea quibus me aggreditur. Unicum verbum addam de examine ejus Mathematico, ut vocat, de centro Oscillationis edito in diario 15. Dec. 1681. ubi contendit se invenisse regulam hanc generalem, scilicet, *per numerum partium Penduli dividi debere summam radicum distantiarum partium ab axe; ut habeamus lineam rectam, quæ sit mensura temporis quo vibrationem peragit illud Pendulum, cujus consequenter quadratum vel 3a. proportionalis erit distantia inter axem & centrum Oscillationis.*

TAB. XXVIII. Fig. 3.

Relicto omni peculiari examine, satis erit ad vitium regulæ detegendum, notasse, juxta hoc principium, duas lineas graves ut A B, B C, junctas & inter se angulum quemcunque efficientes, suspensas in B semper idem Oscillationis centrum habere; ideoque vibrationes semper fore æque veloces, uti facile intelligunt hi, qui in hisce materiis parum sunt versati; sed & illi videbunt, quod æqualitas illa vibrationum locum habere nequeat, quoniam augendo angulo tandem duæ lineæ simul junctæ unicam efficiunt rectam *a* B *c*, cujus vibrationes forent æque diuturnæ cum vibrationibus anguli A B C, linea vero recta in puncto medio suspensa, nullas peragit vibrationes, aut saltem velocitate infinite exigua movetur.

Porro credo Abbati Catelano satis difficile fore, suâ regulâ, centrum Oscillationis in quibusvis particularibus figuris, etiam simplicissimis, determinare, sed, si id forte perficiat, inveniet, suam Theoriam cum experientiâ nunquam convenire, & meam semper summâ exactitudine eidem respondere, si modo experimenta exactissimè instituta fuerint.

Non possum hac occasione silentio præterire, P. Dechales, in

in quodam magni sui Cursus Mathematici loco, memorando experimentum cum Pendulo composito ex duobus ponderibus institutum, in quo computans rationem non habuit (ut debebat) ponderis baculi, cui pondera erant applicata, immerito regulas nostras de determinando centro gravitatis culpare, quasi non convenirent cum iis quæ ille revera observarat.

IV.

Exceptio Abbatis Catelani ad responsionem Hugenii.

NOn debebat Hugenius a suo principio separare consequentiam, ut hanc aliter intelligat, quam ego in scriptis meis. Prorsus deberem oblitus esse Arithmetices, si absolute negarem, ut me facere contendit, *quod 4 magnitudines inæquales possint efficere 2 summas æquales*, quum nil aliud concludo in scriptis, præterquam quod propositio Hugenii vera esse nequeat, nisi pars sit æqualis toti. Ut hoc melius pateat, debemus hic proferre propositionem illam generalem propriis terminis.

Si Pendulum e pluribus ponderibus compositum, atque e quiete demissum, partem quamcunque Oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam Oscillationem obtinebat.

Cum hæc propositio terminis generalissimis concepta sit, ita ut numerus ponderum, situs eorum, duratio Vibrationis, ipsam non mutent, pono, Exempli causâ, Pendulum compositum e ponderibus duobus æqualibus, & inter se ad quam libuerit a se invicem distantiam junctis. Considero porro altitudines, quæ sunt proportionales quadratis velocitatum in duobus Pendulis simplicibus, esse inter se ut velocitates in

 Pen-

Pendulo composito. Nam eandem habent proportionem, quam arcus descripti a duobus ponderibus æqualibus, ex quibus Pendulum formatur; duo illi arcus sunt spatia, quæ duo pondera percurrunt, eodem tempore, velocitatibus, quæ necessario sunt ipsis spatiis proportionales.

Celeritas totalis Penduli compositi, quæ inter partes distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsæ describunt, semper æqualis est summæ celeritatum, quas eædem partes acquirerent, si a se invicem fuissent sejunctæ, & omnes separatim ex iisdem altitudinibus & ad easdem ab axe, distantias descendissent. Altitudines semper sunt ut quadrata velocitatum, sive pondera separatim adscendant, sive descendant. Omnibus his bene intellectis facile patet, ad hanc propositionem redire quæstionem. *Si habeamus duas magnitudines inæquales* a a *&* b b, *summam radicum ipsarum* a † b, *& quadrata partium illius summæ, quæ sint proportionales dictis magnitudinibus, quæque adeo communem denominatorem habeant* a a † b b, *& numeratores diversos* a^3 † a a b *&* b^3 -+ a b b, *demonstrare, summam harum duarum magnitudinum, quæ altitudines, unde duo pondera æqualia Pendulo alligata dimittuntur, repræsentant, non esse æqualem summæ quadratorum illarum partium, quæ altitudines exhibent, ad quas duo pondera, postquam percussione fuerint separata, redeunt, nisi minor ex hisce magnitudinibus* a a *&* b b *sit æqualis majori, id est, quia istæ magnitudines in quæstione propositâ semper inæquales sunt, nisi pars æqualis sit, toti.*

Maxime sensibilis hujus veritatis demonstratio est comparatio terminorum quæstionis per regulas Algebraicas, id quod examinandum relinquo iis, qui usum illarum regularum norunt. Quod rem ipsam spectat, nullius est momenti; sive centrum Mathematicum Oscillationis bene sive male determinatum sit, inventio Penduli nec minus utilis hominibus, nec minus auctore suo digna est.

V. Ob-

V.
Objectio Abbatis Catelani contra motum Pendulorum in Cycloidibus.

Si vis gravitatis ageret in corpora tanquam in puncta Mathematica, vel si spatium contentum sub Cycloide esset divisibile in infinitas alias Cycloides, similes & parallelas, quidam Geometræ revera demonstrassent, uti contendunt, pendula illam debere describere curvam ut Vibrationes, æqualibus temporibus, peragant; sed nulla datur pars in corpore gravi, quale est Pendulum ex cupro vel plumbo, quæ non æque ac centrum Tellurem versus propellatur magis minusve pro inclinatione, juxta quam movetur; Præterea spatium, quod continet Cyclois, non potest repleri infinitis aliis Cycloidibus similibus, quoniam tripla circuli superficies æqualis esset duplo quadrato diametri. Latet igitur adhuc Geometras, quamnam lineam curvam describat Pendulum, cujus Vibrationes sunt isochronæ. Consequentia hæc patet, si consideremus, in corpore Pendulo, quando centrum vel alia quælibet pars Cycloidem percurrit, partes viciniores Axi, vel inde remotiores, eodem tempore, describere lineas curvas inter se similes, sed quæ non sunt Cycloides; ut patet ex dictis, & quia in quovis arcu perpendiculares ductæ e tangentibus suis ad tangentes Cycloidis sunt æquales. Omnes itaque partes non habent æqualem inclinationem in descensu, neque Tellurem versus cum eâdem velocitatis proportione propelluntur; unde sequitur, Vibrationem totius Penduli, quæ necessario pendet a Vibrationibus, quas peragunt partes ejus separatim sumtæ, differre a Penduli Vibratione, si reductum foret ad illam partem, quæ movetur in Cycloide.

Videtur huic potius causæ, quam crassitudini fili, cui pondus alligatur, adscribendam esse artificum praxin, quos experientia cogit curvaturam a Cycloide diversam laminis tribuere, inter quas suspendunt Pendulum.

Non tamen mihi animus eſt, hic abſolute oppugnare ſententiam illorum, qui credunt corpora gravia moveri, veluti puncta, quæ in Cycloide, ad Horizontem perpendiculari, peragunt ſuas Oſcillationes, temporibus æqualibus, a quacunque dimittantur altitudine. Contendo tantummodo, illud nondum eſſe demonſtratum, niſi alterutrum horum probetur, vel quod curvæ parallelæ Cycloidi eandem habent proprietatem quantum ad motum corporum, licet non ſint Cycloides, vel quod inæqualitas temporis, quod brevius eſt in parallelis, interioribus & Cycloide viciniores Axi, ita moderetur contraria inæqualitate temporis, quod majus eſt in parallelis exterioribus & ipſâ curvâ remotioribus ab Axe, ut compenſatio inæqualitatum ambarum in Cycloide detur, quæ tanquam medium locum tenet inter omnes curvas ipſi parallelas. Geometræ hanc difficultatem examinabunt ſi dignam ſuâ attentione judicent; nec, niſi poſtquam eorum ſententiam novero, obſervationes meas hac de re dare potero.

VI.

Reſponſio ad objectiones Hugenii adverſus methodum Abbatis Catelani de determinando Centro Oſcillationis.

HUgenius propoſuit objectionem adverſus propoſitionem deductam ex principio, a me, ad determinandum Mathematice centrum Oſcillationis Penduli, propoſito; ſed debuit examinare id, quod præcedit locum, quem e ſcriptis meis profert, nec generalem habere regulam ad caſum particularem tantum accommodatam, quem elegi, ut uterer exemplo ſimpliciſſimo & facillimo; ſcilicet quando Pendula compoſita ſunt ex partibus, quæ deſcribunt arcus ſimiles circa Axem, quocum faciunt idem planum; tum enim diſtantiæ ab illo Axe ſunt radii arcuum, qui habent eandem inter ſe proportionem, ac perpendiculares ad Horizontem, vel ſinus, qui ſunt altitudines, a quibus ſingulæ partes in Oſcillatione deſcendunt. Itaque cum Pendula, de qui-

quibus Hugenius loquitur, ut probet propositionem meam falsam, sint anguli rectilinei agitati circa verticem, non habentes requisitam conditionem, me non feriunt. Si concipiamus tales angulos moveri circa Axem, per vertices illorum transeuntem, patet summas distantiarum Axis ab omnibus punctis linearum, quæ Pendula componunt, esse inæquales, prout illæ lineæ efficiunt cum Axe angulos magis minusve acutos. Et meâ regulâ detego summas distantiarum esse æquales Parabolis habentibus pro Diametro maximam ab Axe distantiam, & pro Parametro 4^{am} proportionalem positis hisce tribus, lineâ datâ, quæ eadem est in quovis Pendulo, maximâ distantiâ, quæ variat pro variis angulis, & unitate; unde sequitur, tempus Oscillationis valere $\frac{2}{3}$ maximæ ab Axe distantiæ, & non in omni casu idem esse; tanto enim brevius est, quanto angulus est obtusior, id est, quanto Pendulum magis Axi vicinum est.

Si Hugenius desiderat propositionem quæ conveniat Pendulis, circa punctum motis, mutanda tantum erunt verba quædam in principio Pendulorum habentibum Axem; loco *radices distantiarum illarum*, legendum *summæ linearum rectarum, quæ repræsentant tempora Oscillationum omnium partium separatim sumtarum.*

Hoc modo propositio inserviet ambobus casibus. Sed res melius intelligitur per generale Principium, quod proposui & ita se habet: *In eodem Pendulo, cum omnes partes nisi simul moveri nequeant, propter suam conjunctionem, vibratio minus distantium ab Axe, vel puncto suspensionis, ita retardatur a vibratione remotiorum, & reciproce Oscillatio remotiorum ita acceleratur per Oscillationem aliarum, ut detur inter illas compensatio celeritatum proportionalis arcubus, vel curvarum portionibus, quas describunt, ita ut tempus Oscillationis totius Penduli sit medium inter tempora Vibrationum, quas peragerent illæ partes, si non inter se forent conjunctæ, id est, ut sit æquale summæ temporum illorum divisæ per numerum partium, quas debemus considerare ut æquales & infinite parvas.*

Demonstrare potero in sequentibus, non adeo difficile esse, ut quidem Hugenio videtur, accommodare illud Principium ad particulares magnitudinum Geometricarum species suspensarum ex Axe vel puncto.

Quod ad experimenta attinet, paratus sum demonstrare hæc ita non posse institui, ut perfecte conveniant cum regulis simplicibus & generalibus, quæ deducuntur e principiis Mathematicis, eandem ob causam ob quam generalis regula, stabiliri nequit, certa, & constans, in casibus particularibus, qui dependent a pluribus causis, non exacte notis.

VII.

Excerpta ex litteris D. Bernoullii datis Basileæ ad Autorem Diarii Parisiensis, de Controversia, inter Abbatem Catelanum & Hugenium, de Centro Oscillationis.

QUum nondum observaverim, Hugenium respondisse, ad exceptionem Abbatis Catelani, quæ spectabat primariam ejus de centro Oscillationis propositionem, te haud ægre laturum credo, si verbulum ad ejus defensionem ad te scribam. Quicquid D. Catelanus disputat, eo redit ut probet, *summam radicum duarum magnitudinum quarumvis non posse in duas partes ita dividi, ut proportionales sint ad magnitudines datas, utque summa quadratorum ipsorum sit æqualis summæ magnitudinum.* Id vero neutiquam in dubium ab Hugenio vocatur, qui tantum affirmat, *summam harum magnitudinum posse esse æqualem summæ duarum aliarum, quæ quadratis priorum proportionales sunt.* Quod & veritati consonum est.

Atque ut ostendam, controversiæ omnis cardinem hic verti, utar eodem exemplo de duobus ponderibus æqualibus, & quidem positis numeris, ut veritates hæ abstractæ sensui magis obviæ fiant.

Sint

Sint A & B duo corpora ex Axe D suspensa ita, ut unius distantia ab Axe quadruplo major sit alterius distantiâ. TAB. XXVIII. Fig. 4.

Adeoque si altitudo perpendicularis B I, ex qua descendit corpus B describendo arcum B G, ponatur quatuor pedum, altera A H, unde corpus A delabitur, unius pedis erit. Celeritates igitur, quas separatim cadendo acquirunt, quoniam sunt ut radices altitudinum, se habent ut 2 ad 1. Summa 3, quæ totalem Penduli celeritatem manifestat, quando proportionaliter ad altitudines, sive ad arcus B G & A F dividitur, dat gradus celeritatis, quos obtinent pondera, quando conjunctim in tabulam D G decidunt, videlicet $\frac{12}{5}$ & $\frac{3}{5}$, quorum quadrata sunt $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, unde quæ prodit summa, sane a summa altitudinum, e quibus pondera dimittuntur, differt. Veruntamen hæc quadrata proportionem solummodo altitudinum O M & N L, ad quas pondera, dum a tabula resiliunt, adscendunt, non ipsas altitudines exprimunt; quas inter ratio quidem esse potest, quæ est inter $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$, hoc est inter 16 & 1, dum ipsa summa est quinque, quæ est summa altitudinum B I & A H unde pondera delapsa sunt.

Nam si ponamus altitudinem O M $4\frac{17}{17}$ pedum esse, & alteram N L $\frac{5}{17}$, O M se habebit ad N L, ut 16 ad 1; & O M † N L erit æqualis B I † A H. Idcirco centrum gravitatis commune ponderum A & B, ubi in L, M pervenere, erit ad eandem altitudinem, quam obtinebat ante Oscillationis initium. Id clare ex inspectione figuræ apparet. Pondus enim M tantum supra lineam Horizontalem B D elevatur, quantum L infra eam deprimitur, videlicet $\frac{12}{17}$ unius pedis; sequitur hinc in triangulis similibus M P Q & L Q R latera M Q & Q L esse æqualia, hoc est medium lineæ M L, quæ duo pondera conjungit, esse in intersectione lineæ Horizontalis.

VIII. Ex-

VIII.

Excerpta ex literis D^ni Hugenii ad Auctores Diarii Parisiensis, datis Hagæ 8. Junii 1684. quæ continent ejus responsionem ad exceptionem D^ni Abbatis Catelani, de centro Oscillationis.

HUc usque distuli respondere ad exceptionem D^ni Abbatis Catelani, & fere omnis nostræ controversiæ oblitus eram, quoniam non audiveram, ullum ex iis qui tales ponderant quæstiones in illius partes ivisse. Sed cum ex amicis quidam desiderarent, ut Geometris facilius redderem litis nostræ examen; & eo impedirem quo minus illi, qui hanc norunt, silentium meum reprehendant, vos rogo ut diariis vestris, sequentia velletis inserere, cum quibusdam vestrum jam dudum communicata.

Abbas Catelanus, visâ meâ responsione ad primam observationem, suoque errore cognito, credidit se illam posse dissimulare, si diceret, observationes suas ex vitioso autographo editas esse, in quo non solum quædam verba deerant, sed etiam sex septemve ordine sequentes lineæ; cumque illæ suppletæ sint in secunda Editione, ubi addidit, *& quidem tales, ut summæ* cum sex aliis lineis, propositam objectionem omnino mutavit.

Non opportunum tamen duxit hac de re lectorem monere, ne quidem in suâ exceptione, in qua positâ hac mutatione ratiocinatur. Cùm enim antea se demonstraturum promiserat, propositionem meam 4.^am de centris Oscillationum falsam esse nisi pars sit æqualis toti, in præsens ut illud probet, non tantum ponit axioma hoc irrefragabile *totum esse majus parte*, sed præter hoc pro vero habet quoddam, quod sibi finxit, de motu Pendulorum, principium.

Rem

Rem ita ſe habere oſtendam, & ut mutatam ejus objectionem ſolvam, demonſtrabo principium, quod ponit, verum eſſe non poſſe. Etiam falſum eſſe oſtendam alterum ejus principium generale, quo utitur *in ſuâ verâ ſolutione Mathematica Problematis de centris Oſcillationis*, & tandem ambo hæc principia ſibi mutuò contrariare: non deſpero fore ut ipſe Abbas Catelanus mecum conveniat, ſi ad ſequentia attendat.

Quæſtio ſecundum illum ad hanc propoſitionem redit. Si habeamus duas magnitudines inæquales aa & bb, & ſummam harum radicum dividamus in duas partes, quæ ſint inter ſe ut aa ad bb, quæ partes ideo ſunt $\frac{a^3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b^3 + abb}{aa + bb}$, ut facile per Algebram invenitur, demonſtrare, ſummam magnitudinum aa & bb, quæ repræſentant altitudines, unde deſcendunt pondera duo æqualia eidem Pendulo alligata, non poſſe æquari ſummæ quadratorum partium $\frac{a^3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b^3 + abb}{aa + bb}$, quarum quadrata repræſentant altitudines, ad quas pondera, percuſſione ſeparata, redeunt, niſi pars aa æquetur bb; id eſt (quoniam quantitates in quæſtione propoſita ſunt inæquales) niſi pars æqualis ſit toti.

Hæc eſt propoſitio Abbatis Catelani, quam tantum clarius exprimere conatus ſum, quâ demonſtratâ, ut facile fit comparando duas illas ſummas per calculum Algebraicum, contendit, fundamentalem meam de centris Oſcillationis propoſitionem ruere.

Sed etiam relictâ Algebrâ demonſtrari poteſt illius propoſitio; nam ſi ponatur aa æquale eſſe 1; & bb æquale 4; ſumma radicum $a + b$ eſt 3, & partes proportionales hujus ſummæ ſunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{12}{5}$, faciunt enim junctim $\frac{15}{5}$ hoc eſt 3. Quadrata earundem partium ſunt $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$. Hoc igitur ſolum reſtaret demonſtrandum, ſummam 1. & 4. non eſſe æqualem ſummæ, quæ prodit ex additione $\frac{9}{25}$ ad $\frac{144}{25}$, ſive 5 & $6\frac{3}{25}$ non eſſe æqualia inter ſe; quod ſane per ſe clarum eſt.

Vera ergo eſſet Abbatis Propoſitio niſi affirmaret quadrata partium $\frac{a^3 + aab}{aa + bb}$ & $\frac{b^3 + abb}{aa + bb}$, quæ hic ſunt $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, re-

præsentare altitudines, ad quas pondera sejuncta redeunt. Non dissentiet & facile probari potest illud deductum esse ex Principio, quod sibi finxit, & pro fundamento habet propositionis suæ; scilicet, *celeritatem totalem Penduli compositi, quæ inter partes distribuitur proportionaliter ad arcus, quos ipsæ describunt, semper æqualem esse summæ celeritatum, quas eædem partes acquisivissent, si sejunctæ singulæ separatim ex iisdem altitudinibus, & in eadem distantia ab Axe descendissent.* Ponit ergo, ut me refellat, principium hoc, quod falsum contendo; in demonstratione computationem memoratam sequar.

D^nus Abbas novit & concedit, detegi altitudinem, unde commune ponderum gravitatis centrum descendit, si dividamus summam altitudinum 1. & 4. (unde duo pondera simul alligata descenderunt) per 2 numerum ponderum, quæ ergo est $\frac{5}{2}$. Concedit pariter, dari altitudinem, ad quam revertitur commune eorum gravitatis centrum, scilicet $\frac{153}{50}$, vel $3\frac{3}{50}$, si per numerum ponderum duo, dividamus summam altitudinum $\frac{9}{25}$ & $\frac{144}{25}$, ad quas pondera percussione separata redeunt.

Centrum ergo gravitatis revertetur altius quam unde descenderat, quantum $3\frac{3}{50}$ excedit $2\frac{1}{2}$, quod primario adversatur Mechanices Principio. Hoc si D^nu Abbas efficere possit, detectum habebit perpetuum mobile: Quum ergo ejus Principium ex quo falsa sequitur conclusio, falsum sit, exinde nil quo mea labefactetur Propositio, potest inferri vel deduci. Quod ad alterum ejus Principium attinet, quod pro fundamento habet regulæ generalis de determinandis centris Oscillationis, in eundem inducit errorem. Hoc Principium est, *tempus Vibrationis Penduli compositi esse medium inter tempora Vibrationum partium, id est, æquale esse summæ illorum temporum, divisæ per numerum partium.* In Pendulo, quale consideravimus, ubi ponderum distantiæ, a puncto suspensionis, sunt 1 & 4, si ponamus tempus minoris ex partibus separatis esse unum, (unde sequitur, tempus alterius partis separatim agitatæ esse duo;)

secun-

secundum ejus principium, summa illorum temporum, quæ est tria, divisa per duo, numerum partium, erit tempus Penduli compositi, scilicet $\frac{3}{2}$. Hisce positis, nil præterea ponendo præter id quod concedit D^us^. Abbas, deteguntur altitudines, ad quas revertuntur pondera, postquam a Pendulo composito sunt sejuncta; nempe $\frac{4}{9}$ & $\frac{64}{9}$; quarum summa $\frac{68}{9}$, divisa per duo, numerum ponderum, dat $\frac{34}{9}$, vel $3\frac{7}{9}$, altitudinem, ad quam adscendit commune gravitatis centrum, quæ etiam superat $\frac{5}{2}$ vel $2\frac{1}{2}$ unde demonstravimus centrum descendisse. Non addo methodum computationis quæ facilis est. D^nus^. Abbas ergo dum quærit principium bis male divinavit; proprie enim divinare est, ratiocinia deducere ex principiis, quæ levem tantum veri speciem præ se ferunt; & verum esset, quæstionem de centro Oscillationis non difficulter resolvi, si, ut ipse fecit, tantum ponendum foret id, quod statim rem quæsitam determinat.

De cætero, contraria esse inter se ambo principia clarum est; quoniam ut patet, ex his diversæ sequuntur conclusiones, altitudines enim, ad quas centrum commune gravitatis ascendit, diversæ ex utroque deteguntur, nempe $3\frac{3}{10}$, $3\frac{7}{9}$.

Unum hoc addam, ut respondeam difficultati, quam D^nus^. Abbas proposuit, contra motum in Cycloide*, hanc difficultatem solutam dari in ipso meo tractatu de centro Oscillationis in cujus propositione 24 explicavi, quomodo effici queat, ut omnia ponderum Penduli puncta moveantur in Cycloidibus æqualibus; licet in praxi minime necessaria sit correctio hæc.

* Vide supra pag. 227.

IX.

Responsio D^ni^. Abbatis Catelani ad literas D^ni^. Bernoulli de Controversia sua cum D^no^. Hugenio de centro Oscillationis.*

* Vide supra pag. 230.

UT respondeam ad has literas, idem repetam, quo utitur D^nus^. Bernoulli, exemplum Penduli compositi ex ponderibus æqualibus eidem virgæ applicatis, & ex eodem centro

suspensis, a quo pondus unum quater magis quam alterum distat; ita ut altitudines perpendiculares, unde descendunt sint ut 1 ad 4.

Convenit inter nos de proportione inter has altitudines, & de summa velocitatum, quas illa pondera acquirerent, si separatim ab iis altitudinibus caderent; sed contendimus de exprimendis his altitudinibus respectu spatii, quod sit communis earum mensura, & pro unitate habeatur. Cum omnibus, qui ante me de similibus quæstionibus scripserunt, pono veros numeros, quibus exprimuntur altitudines, esse quadrata ipsorum numerorum qui velocitates designant, in illis casibus, in quibus inter altitudines & inter velocitates non alia datur ratio, præter generalem experientiâ detectam.

Patet autem ex numeris quos in computatione mea detexi, (cum 9 & 144 ducta in $\frac{1}{25}$ pedis, id est 6 pedes cum 1 digito 5 lineis & quod excedit, differant cum 1 pede & 4 pedibus, aut 5 pedibus,) summas altitudinum, ad quas adscendunt pondera in exemplo proposito, non esse æqualem summæ altitudinum unde descendunt, quam æqualitatem D^us Hugenius ponit in generali propositione, quâ utitur pro principio in suo tractatu de centro Oscillationis.

D^us Bernoulli respondet, quadrata numerorum, qui exprimunt velocitates ponderum, tantum exprimere proportionem altitudinum, ad quas revertuntur post illorum separationem, & non ipsas altitudines, quæ quidem inter se habere possunt rationem, $\frac{144}{25}$ ad $\frac{9}{25}$ dum tamen harum summa est 5, quæ est summa altitudinum, unde pondera descenderunt. Nam altitudines, ad quas revertuntur separata, sunt juxta illum $4\frac{12}{17}$ & $\frac{5}{17}$, quarum summa valet 5, ut summa primarum altitudinum 1. & 4. Iterum respondere non difficile erit. Rogatum velim D^um Bernoulli, dum contendit, proportionem quadratorum numerorum, qui velocitates exprimunt, tantum considerandam esse, quâ motus lege, & per quodnam principium Mechanicum pondera, de quibus agimus, potius redeant ad altitudines, quas ille notavit, &

quæ

quæ cum ipſius ſententia congruunt, quam ad illarum proportionales $5\frac{11}{17}$ & $\frac{6}{17}$, quarum ſumma eſt 6; vel ad $3\frac{13}{17}$ & $\frac{4}{12}$ quarum ſumma eſt 4; vel ad innumeras alias ſimiles, quæ habeant inter ſe eandem proportionem, $\frac{144}{25}$ ad $\frac{9}{25}$, ſed ex quibus altitudo centri gravitatis reverſi major minorve, quam unde deſcendit deducitur. Certè pondera non revertentur ad omnes altitudines proportionales quadratis velocitatum, quas deſcendendo acquiſiverunt, quoniam gravitas gradatim retardat, & tandem deſtruit velocitates, cum quibus reflectuntur pondera.

Quid ergo eveniet? rogo D^{um} Bernoulli ut illud explicare velit? An Natura per ſe incerta de eo quod ſibi agendum eſt, pro voluntate D^{ni} Bernouilli actura eſt? Cum ipſius veniâ, hac de re dubitabo, donec ſententiam ſuam ſolidis argumentis, ex Phyſica deductis probet. Interim credo me jure concludere, rationibus quas affert pro D. Hugenio hoc confirmari, propoſitionem hujus generalem & fundamentalem de centris Oſcillationis non eſſe omni exceptione majorem.

X.

Dn. Bernouillii narratio controverſiæ inter Dn. Hugenium & Abbatem Catelanum agitatæ de Centro Oſcillationis, quæ loco Animadverſionis eſſe poterit in Reſponſionem Dn. Catelani.

Excerpta ex Litteris Dn. Bernoullii Lipſiam miſſis.

Menſe Septembri A. 1681. Abbas Catelanus propoſitionem quandam tractatus Cl. Hugenii, quem de *Horologio*

logio Oscillatorio inscripserat, adortus est, formata contra illam objectione; in qua quia mentem suam minus feliciter expressit, ansam dedit isti controversiæ, quæ hucusque fere inter illos viguit. Verum quidem est, eum initio A. 1682. objectioni suæ, additis paucis lineis, variationem quandam induxisse; sed quoniam ejus partes satis adhuc male cohærentes reliquit, eam in mente Lectoris sui excitavit opinionem, quasi persuasum haberet, summas altitudinum, e quibus pondera alicujus penduli junctim descendunt, & ad quas postmodum separatim ascendunt, inæquales esse debere hanc solam ob causam, quod *priores altitudines sint proportionales ipsis ponderum celeritatibus, posteriores vero non nisi quadratis istarum celeritatum.* Quare etiam Hugenius, id unicum Catelano scrupulum movere ratus, respondere abstinuit, usque in mensem Junium, quo tandem calamum arripuit, ac exemplo duorum numerorum 5 & 10, duorumque aliorum 3 & 12 breviter monstravit, fieri utique posse, ut binæ quantitates eandem cum binis aliis conficiant summam, etiamsi diversam ab illis rationem habeant, neque tum temporis in dubium revocavit πρῶτον Catelani ψεῦδος quod tamen in prima jam objectionis suæ impressione manifeste satis prodiderat, dum supposuit: *Pendulum ex duobus ponderibus compositum, eandem acquirere celeritatem, quantam acquirat summa pendulorum simplicium;* id vero sicco pede præteriit Hugenius, vel quod non penetrarit statim, ob nullam periodorum connexionem, quorsum falsa ista Catelani suppositio tenderet, vel potius quod illi ceu verisimili admodum tum ipsemet adstipularetur. Catelanus interea Hugeniano responso non contentus, excepit 20 Julii 1682, ac terminis Algebraicis rem aggressus est, eodem innixus fundamento: *Quod totalis celeritas penduli compositi æquet summam celeritatum partium ejus separatarum.* Quo facto controversia ista ultra annum sopita jacuit. Me quod spectabat, cui Hugenii liber tum nondum visus, nedum lectus fuerat, scopum alium non habebam, quam illustrare ejus responsionem, remque examinare, qualiter ab ipso examinata, atque in Actis recensita fue-

fuerat. Animadvertens itaque, Catelani principium ab Hugenio non refutatum esse, & ego illud intactum reliqui, sufficere mihi ratus, si Hugenianum responsum simpliciter applicarem ad præsentem controversiam, proposito eum in finem exemplo penduli, e duobus æqualibus ponderibus compositi; ubi innuere saltem volui, quod supposito pro totali ejus celeritate numero ternario (quicquid statuatur de celeritatibus utriusque separatim spectati ponderis, dummodo eæ sint in ratione 2 ad 1) quadrata $\frac{144}{25}$ & $\frac{9}{25}$ ex mente Hugenii significare debeant non nisi *rationem altitudinum*, ad quas ascendant separata pondera, minime vero *ipsas altitudines* (quod ipse quoque postmodum indigitavit Hugenius in secunda responsione, 8 Jun. 1684. *) partim quoniam celeritates atque altitudines, utpote quantitates heterogeneæ, se mutuo mensurare non possunt; partim etiam, quia ipse Catelanus urgere saltem videbatur, altitudines esse *proportionales* quadratis, vel *sicut* quadrata celeritatum; tametsi in proxime sequenti calculo quadrata ista pro ipsis altitudinibus adhibuerit. Comparato mihi paulo post, & perlecto Hugenii libro, animadvertebam, Propositionem controversam ex priore Hypothesium, quas Auctor initio stabiliverat, adeo evidenter inferri, ut neutra infringi possit, quin simul evertatur altera; quocirca judicabam, si Catelano falsa fuisset visa propositio, eum potius ipsam adoriri debuisse Hypothesin, magnumque illud inibi contentum Principium Mechanicum. Verum enim vero cum hujus principii veritatem nullo jure in dubium revocare possem, atque simul etiam seriem ratiocinii a Catelano satis confuse propositi evolvere cœpissem, errorem ejus detexi illico, falsamque cognovi esse, qua nitebatur, regulam, nimirum: *Celeritatem totalem penduli compositi æqualem esse summæ celeritatum partium ejus separatarum.* Atque ut ostendam, animadversum mihi fuisse errorem, priusquam Hugenii epistola de 8. Jun. lucem aspexisset, afferam hic causam physicam, omissam ab Hugenio, qua fit, ut penduli compositi celeritas perpetuo minor sit celeritate partium ejus separatarum: Ponamus majoris evidentiam

* Vide supra pag. 232.

den-

TAB. XXVIII. Fig. 5.

dentiæ ergo, pondera penduli A & B in linea inflexili D B libere hinc inde moveri posse, sic ut linea hæc, dum rotatur circa axem D, quamvis secum rapiat pondera, non tamen impediat descensum illorum in linea recta centrum Terræ versus. Quo posito, constat, utrumlibet pondus sigillatim dimissum, eadem celeritate latum iri, qua ferretur absque virga D B, utpote nec a virga, nec ab ejus axe ullo modo impeditum; id est si pondus A absque virga certo tempore conficit spatium A H, & pondus B spatium æquale B N, utrumque etiam cum virga, sed sigillatim, dimissum eodem tempore idem spatium A H & B N conficiet. Constat insuper, quod si gravitas in utrumque pondus ageret viribus, quæ proportionatæ forent ipsorum respectivis ab axe distantiis, virga nullum adhuc ipsorum descensui afferret impedimentum, propterea quoniam exacto certo tempore unum eorum reperiretur in H & alterum in I, vel prius in L, posterius in N, sive absque virga, sive cum virga, sive sigillatim sive conjunctim dimitterentur. Verum enim vero quoniam gravitas in utrumque pondus agit viribus æqualibus, sic ut pondera eodem tempore æqualia spatia A H & B N transigere annitantur, & tamen interea pondus A junctim dimissum, ob inflexilem virgam, nequit pertingere nisi ad L, dum pondus B jam est in N, hinc sequitur, gravitatis vim in pondere A non esse exhaustam; adeoque residuum harum virium, ex una parte urgere debere corpus B, ex altera ipsum axem D, eundemque premendo aliquam sui partem ibidem insumere & deperdere; siquidem virga hocce casu instar vectis considerari possit, prout extra dubium est; quod si corpus B infinite tarde moveri, id est, firmum & stabile esse intelligatur sicut axis D, corpus A partem sui ponderis æque in axem D atque in corpus B transferret. Ex hactenus dictis colligere proclive est, si quis examinare vellet, quantam partem celeritatis suæ pondus A in premendo axe D consumere debeat, eum exinde, imitando Dn. Catelani ratiocinium, veritatem aut falsitatem Hugenianæ Hypotheseos, inque hac fundatæ Propositionis, detegere posse.

Ro-

Rogantur hac occasione eruditi, ut examinent, qualem legem communicationis celeritatum observent corpora mota, quæ ex una parte innituntur firmo fulcimento, ex altera alii corpori itidem, sed tardius moto: si namque celeritatis excessus, qui hinc inde communicandus est, in eadem ratione distribueretur, in qua distribuitur onus aliquod, quod vecti duobus sustento fulcris impositum est, nimirum in ratione reciproca distantiarum mobilis a fulcris, tum imitando ratiocinium Dn. Catelani, deprehenderemus, summam altitudinum, ad quas ascendunt separata penduli pondera, vicissim nunc minorem esse summa altitudinum, e quibus antea conjunctim descenderant, quod iterum Hugenianam Propositionem everteret.

En calculum: Esto altitudo A L $= 1$ ped.

Altitudo B N $= 4$ ped.

Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, ubi descendit separatim $= 1$

Celeritas ponderis B acquisita in puncto N, quando cadit separatim $= 2$

Celeritas ponderis A acquisita in puncto L, quando descendit conjunctim $= x$

Igitur Excessus celeritatis ponderis A, qui tam in axem, quam in pondus B redundat $= 1 - x$

Et pars hujus excessus, quæ soli ponderi B communicatur $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Tota ergo celeritas ponderis B in puncto N cum conjunctim cadit $= 2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x$

Atqui vero $2\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x, x :: 4, 1$. Igitur $x = \frac{9}{17}$ & $4x = \frac{36}{17}$ eorumque quadrata $\frac{81}{289}$ & $\frac{1296}{289}$ quorum summa $4\frac{13}{17}$ minor est $1 + 4 = 5$.

Antequam finiam, in favorem Dn. Catelani hoc monebo, quod etiamsi commune gravitatis centrum juxta illum altius ascendere deberet, quam descendit, nondum tamen sequatur, repertum fore motum perpetuum, ut sibi persuadet Ill. Hugenius; quoniam in istis abstrahi solet ab aëris resistentia, a diminutione celeritatis, quæ necessario sequitur disruptionem vinculi, quo connectebantur partes penduli, aliorum-

que obstaculorum; prout ipsa quoque hæc aëris resistentia in causa est, cur simplex pendulum motum suum non continuet, ut maxime in Hypothesi Hugeniana ad eandem ascendere debeat altitudinem, a qua descendit.

XI.

Litteræ Dni Marchionis de l'Hôpital ad Dum Hugenium, in quibus contendit, se regulam hujus Auctoris de Centro Oscillationis penduli compositi demonstrare per causam Physicam, & respondere simul Dno Bernoulli.

Ante aliquot annos, cum admiratione legi eruditum tuum de centris Oscillationis tractatum, & plenissime mihi persuasum est veras esse demonstrationes tuas. Interea cum Acta Lipsiensia nuper mihi ad manus venerint, inveni in actis mensis Julii anni 1686. relationem tuæ hac de re cum Dno Abbate Cateleno controversiæ, à Dno Bernoulli factam, qui tuam sententiam amplectitur, uti certe debent, quicunque aliquem inter Geometras locum se tenere contendunt. Sed attonitus vidi, finem ratiocinii quo utitur, contrarium esse tuis demonstrationibus: unde ad illud sedulo examinandum perductus fui, & cognovi, quod utatur principio verissimo, licet in eodem applicando fallatur; illud enim principium, uti demonstrabo, ducit ad eandem veritatem, quam probasti in 5a tua propositione.

TAB. XXVIII. Fig. 6.

Sit D A B virga inflexilis & sine gravitate, mobilis circa punctum fixum D, ad quam annexa sint 2 pondera æqualia A & B; & sit distantia B D a puncto fixo quadrupla distantiæ A D, quæritur longitudo D G penduli simplicis isochroni, id est, quod movetur cum eâdem celeritate ac pendulum compositum.

Ad solvendum hoc problema, considero velocitates, cum quibus corpora A & B incipiunt descendere in primo instanti

ti casus sui, vel potius, spatia, quæ percurrunt eodem tempore, utut parvo; hoc sensu sumo 1 pro velocitate, quacum omne corpus grave sive magnum sive parvum incipit descendere super planis æqualiter inclinatis; nam, ut satis notum est, illa velocitas est æqualis in omnibus corporibus.

Concipio etiam, quantitatem motus corporis initio descensus sui oriri ex massâ multiplicatâ per illam primam velocitatem; His suppositis, constat, quod corpus A conetur descendere cum eâdem celeritate, quâ corpus B; quod cum non possit, quoniam virgæ junctum est in puncto A, cujus velocitas tantum est 4ta pars velocitatis B, debet accelerare motum corporis B in pendulo composito. Tota ergo difficultas consistit in rite determinandâ motûs augmentatione; quod hoc pacto facio.

Sit x quantitas motus corporis A in pendulo composito, residuus excessus quantitatis ejus motus erit ergo $A - x$, vis hæc applicata in A exerit actionem in punctum fixum D & corpus B, quod considerari debet ut immobile ipsius respectu (quoniam clarum est, corpus B debere censeri immobile respectu illius excessus) & consequenter virga B D debet considerari ut vectis cujus extremitates sustinentur in B & D. habebimus ergo B D, 4. ad A D, 1. ut $A - x$ ad $\frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ portionem excessus quantitatis motus corporis A, quæ communicatur corpori B; ita ut quantitas motus corporis B in pendulo composito sit $B + \frac{1}{4} A - \frac{1}{4} x$ id est $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$; Jam vero propter virgam inflexilem D B velocitas corporis B in pendulo composito debet necessario esse quadrupla velocitatis corporis A, & consequenter etiam quantitas ejus motus, quoniam corpora sunt æqualia; unde sequitur æqualia esse $4 x$ & $\frac{5}{4} A - \frac{1}{4} x$ unde deducitur valor ipsius x, $\frac{5}{17} A$, qui exprimit quantitatem motus corporis A in pendulo composito; Jam si fiat, ut $\frac{5}{17}$, velocitas corporis A in pendulo composito, est ad 1, velocitatem, omnium corporum gravium in extremitate pendulorum simplicium, ita D A, 1; est ad D G, $\frac{17}{5}$, erit hæc longitudo penduli simplicis isochroni; si enim spatia sunt inter se ut velocitates, tempora æqualia sunt.

 Si

TAB. XXVIII. Fig. 7.

Si addamus ad pendulum compoſitum D A B novum pondus C æquale cuivis ponderi A & B, ita ut D C duplum ſit D A, conſiderari debent pondera A & B tanquam appenſa ad G commune ſuum Oſcillationis centrum, in extremitate penduli ſimplicis D G; & tunc ponendo x, quantitatem motus corporis C in pendulo compoſito D C G, habebimus C-x pro reſiduo exceſſu quantitatis motus corporis C. Quantitas hæc reſidua applicata in C exercet vim in punctum fixum D, & punctum G, quod conſidero ut fixum ipſius reſpectu; habebimus ergo D G, $\frac{17}{7}$, eſt ad D C, 2, ut C-x eſt ad $\frac{10C-10x}{17}$, portionem ejus exceſſus, quæ diſtribuitur in G; unde ſequitur, quantitatem motus corporum A & B in pendulo compoſito D A C B futuram $\frac{5}{17}$ A $+ \frac{20}{17}$ B $+ \frac{10C-10x}{17}$ id eſt $\frac{35C-10x}{17}$; Ob virgam autem inflexilem D B, velocitas corporis A in pendulo compoſito erit neceſſario dimidia velocitatis corporis C, & velocitas corporis B erit dupla velocitatis corporis C, & eædem quoque inter motus quantitates rationes dantur, cum tria corpora ſint æqualia inter ſe; datur ergo æqualitas inter $2x + \frac{1}{2}x$ & $\frac{35C-10x}{17}$, unde deducitur quantitas $\frac{2}{7}x = C$, exprimens quantitatem motus corporis C in pendulo compoſito D A C B. Jam ſi fiat, ut $\frac{2}{3}$, velocitas corporis C in pendulo compoſito, eſt ad 1, velocitatem cujusvis corporis gravis in extremitate penduli ſimplicis; ita D C, 2. eſt ad D E, 3, erit hæc longitudo penduli ſimplicis iſochroni.

Si pondera A, B, C eſſent inæqualia, inveniretur ſemper, ſequendo hoc ratiocinium, centrum Oſcillationis, ita ut hæc methodus ſit generalis, quicunque ſit ponderum numerus, & quæcunque eorundem inæqualitas. Oſtendendum nunc, methodum hanc etiam uſu venire, ſi pondera ſint ad puncti fixi partem utramque diſpoſita.

Sit pendulum compoſitum A D B mobile circa punctum fixum D, & oneratum ponderibus æqualibus A & B, ſitque D B quadrupla ipſius D A, patet quod corpus A debeat retardare motum corporis B in pendulo compoſito; & ut præ-

præcise inveniatur quantum retardet, voco x quantitatem motus corporis B in pendulo composito A D B, & consequenter excessus residuus quantitatis ejus motus erit B - x; sed ob virgam B A, velocitas corporis A debet necessario esse quarta pars velocitatis corporis B: quantitas ergo ejus motûs in pendulo composito erit $\frac{1}{4}$ x (cum enim corpora A & B sint æqualia quantitates motus sunt proportionales velocitatibus. Illa autem motus quantitas produci non potuit, nisi per residuum excessum quantitatis motus corporis B. Patet ergo, quod ille excessus B - x debeat superare quantitatem motus corporis A inferiora versus, & eidem præterea imprimere quantitatem motus $\frac{1}{4}$ x superiora versus; id est quod debeat agere in corpus A ac si vis A + $\frac{1}{4}$ x immediate applicita in A, illud sursum propelleret. Sed vis B - x ob punctum fixum D agit in A acsi vis 4 B - 4 x immediate applicita in A, illud sursum propelleret; dabitur ergo æqualitas inter 4 B - 4 x & A + $\frac{1}{4}$ x: unde deducitur quantitas x = $\frac{12}{17}$ B, quæ præcise exprimit quantitatem motus corporis B in pendulo composito A D B; Porro si fiat, ut $\frac{12}{17}$, velocitas corporis B in pendulo composito, est ad 1, velocitatem corporis omnis gravis in extremitate penduli simplicis, ita D B, 4. est ad D G $\frac{17}{3}$, erit hæc longitudo penduli simplicis Isochroni.

Facile concluditur ex his omnibus, principium D^ni^ Bernoulli esse verum; sed eundem falli in conclusione quam inde deducit; quoniam considerat velocitates acquisitas corporum A & B, cum considerare deberet, uti nos fecimus illorum velocitates incipientes & præterea motus quantitates. Alias enim nunquam posset applicari hoc principium, quod non differt à principio, quod obtinet circa vectem, quum corpora sunt inæqualia; Adeo ut credam me plane petitioni ejus satis fecisse, *Rogantur hac occasione eruditi &c.*

Vides, quo pacto diversæ viæ ducant ad cognitionem ejusdem veritatis; nolim tamen meam tuæ æquiparare, quæ ultra omnem comparationem eruditior est & magis Geometrica; Interim si existimes, non inutile fore demonstrare rationes Physicas, quas hic affero, perfecte convenire cum

tuis demonſtrationibus, idque inſervire poſſe tollendo D^ni Bernoulli dubio, per me licet publici juris fieri has litteras, ſed ſimul peto, ut iisdem obſervationes tuas ſubjungere digneris, & perſuaſum habeas me a judicio tuo non provocaturum, quod procul dubio doctum ſimul clariſſimum & æquiſſimum futurum eſt: ſum ex animo &c.

XII.

Obſervationes D^ni Hugenii in literas præcedentes & in relationem D^ni Bernoulli, cujus in iis fit mentio.

Semper credidi difficile eſſe inventu centrum Oſcillationis aliâ methodo, quam quâ ipſe uſus ſum; neminem quoque vidi, qui id proſpero ſucceſſu tentârit, ſive reſpectu ſolutionis generalis, ſive in caſu pendulorum compoſitorum, quorum pondera ſunt in lineâ recta cum puncto ſuſpenſionis. Hunc caſum D^nus Marchio de l'Hôpital ſibi poſt plures alias propoſuit, & primus, quod vere poſſum dicere, ſperatum ſortitus eſt eventum; nam D^i. Walliſius, Mariotte, & Pater Deſchales quæſiverunt tantum centrum Percuſſionis, nec potuerunt demonſtrare idem eſſe cum Centro Oſcillationis, licet id revera ita ſe habeat.

Cæterum licet demonſtratio Domini Marchionis valida ſit & legitima, & naturæ rei congrua videatur; multa tamen continet quæ Lectorem aliquantum detinere queant; ut, quando conſiderat quantitatem motus corporis in primo initio caſus, & quum diſtinguit & dividit, reſiduum motum corporis A, ſcilicet quem haberet cum ſeparatim caderet, præ illo quem haberet, ſi deſcenderet veluti pars penduli compoſiti, & tandem, quum in pendulo trium ponderum vult A & B tanquam fixa conſiderari in G, centro Oſcillationis illorum. cum hæc omnia non ſint prorſus evidentia, patet viam, quam ingreſſus eſt Marchio, ſatis eſſe difficilem, & accuratum valde ratiocinium fuiſſe requiſitum, ne hic deviaretur; D^us Bernoulli in ſua relatione controverſiarum me inter & Abbatem Catelanum, de qua in ſequentibus aliquid

quid observabo, eandem viam fuerat secutus, sed cum nec illam ad finem usque sequi potuerit, novo inde ratiocinio ejusdem difficultas colligitur.

Obstrictus sum D°. Bernoulli, quod semper in hac controversiâ a meis partibus steterit adversus D.um Abbatem Catelanum. Interea non potui concipere, quo pacto, postquam dixit propositionem meam fundamentalem de centro Oscillationis pendere a magno illo principio, scilicet *quod commune centrum gravitatis plurium ponderum non possit ascendere altius per gravitatis eorum effectum, quam unde descendit*, in sequentibus vertat contra me quoddam ratiocinium, quemadmodum ipse confitetur, incertum, ac si posset in dubium vocare veritatem hujus ipsius propositionis; cum potius deberet concludere, se errasse in suo ratiocinio.

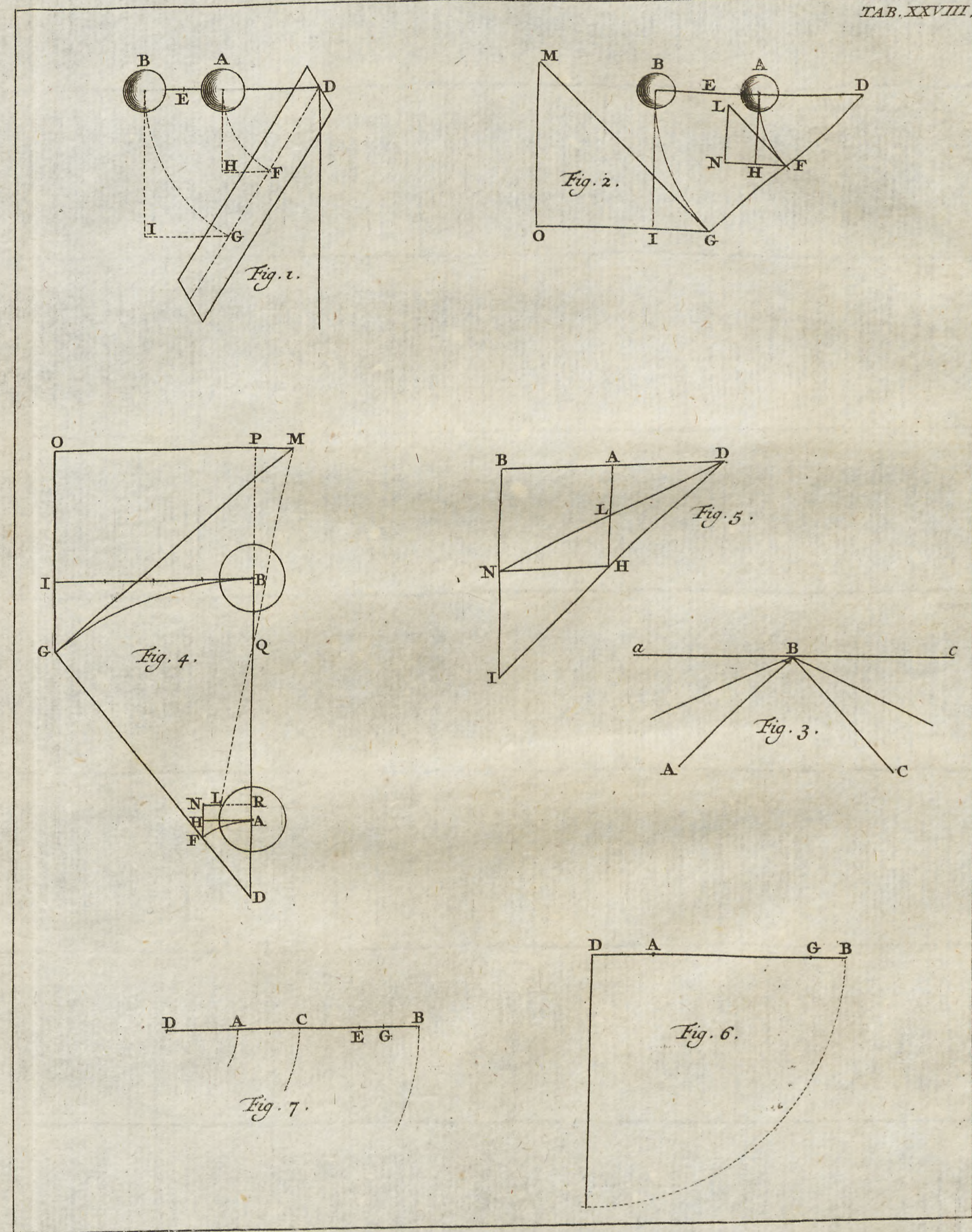
Ad id vero, quod mihi imputat, me in prima responsione non refutasse falsum D.ni Abbatis principium, idque in ultima non refellisse per causam ejus Physicam, respondeo me in prima responsione credidisse, sufficere, si evidens vitium ostenderem in ratiocinio, quod mihi opponitur, licet ulterius hanc materiam non examinarem; In exceptione autem 8. Junii 1684. pari jure cum D.no Bernoulli possem pertendere me id principium refutasse per suam causam Physicam, quoniam ostendi, repugnare illud magno principio naturali *quod corpora gravia sponte non possint ascendere.*

Credo enim, in hoc æque consistere causam Physicam hujus phænomeni, scilicet quod in pendulo composito pondera A & B, cum descenderint junctim ad partem infimam vibrationum suarum, non acquirant simul tantam velocitatem, quantam acquisivissent separatim ex iisdem altitudinibus cadentia, quam in eo, quod pondus A consumat partem sui motus agendo in punctum fixum F, juxta demonstrationem D.ni Bernoulli & D.ni Marchionis de l'Hospital; Et ad hoc credendum ex eo adducor, quod sæpe pereat pars motus, licet hunc in aliquo affectu edendo consumi, affirmare non possumus, ut in multis casibus percussionis duorum corporum durorum, juxta id quod obser-

ſervavi, quum in lucem ederem leges ejusmodi motuum in diariò Pariſienſi 1669 menſis Februarii, ita ut minime pro lege naturæ habendum ſit, eandem motus quantitatem ſemper conſervari, niſi alicui impendatur & conſumatur, ſed hæc conſtans lex eſt, corpora ſervare vim *ſuam adſcendentem*, & idcirco ſummam quadratorum velocitatum illorum ſemper manere eandem; Hoc autem non ſolum obtinet in ponderibus pendulorum, & percuſſione corporum durorum, ut ibidem obſervavi, ſed in multis quoque aliis mechanicis experimentis.

Demonſtraveram admittendo principium Abbatis Catelani, *vim aſcendentem* ponderum penduli augeri, & ita commune eorum gravitatis centrum altius poſſe reverti quam unde deſcenderat, unde inferebam, hoc poſito inventum fore perpetuum mobile. D[us] Bernoulli non concedit hanc conſequentiam ob aëris obſtaculum, & quædam alia, quæ effectum impedirent: ſed conſiderare debuiſſet, cum altitudo illa major, quam acquirit centrum gravitatis, ſemper determinata ſit quantitas, & effectus obſtaculorum non ſit determinatus, imo minui magis magisque poſſit, facile conſtrui poſſe machinam, in qua commodum ex elevatione centri gravitatis derivatum, præponderaret impedimento obſtaculorum; ſed revera id experiri neceſſe erit nunquam.

FINIS.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

MACHINÆ
QUÆDAM,
ET
VARIA
CIRCA
MECHANICAM.

MACHINÆ QUÆDAM, ET VARIA CIRCA MECHANICAM.

I.

Excerpta ex Literis Domini Hugenii, novam quandam Inventionem Horologiorum exactissimorum ac portatilium concernentibus.

CUm invenerim artificium diu desideratum quo fiant Horologia & exactissima simul & portatilia, credo rem gratam me facturum publico, si id communicem. Quamobrem mitto Tibi & descriptionem & picturam formæ, continentem id quod in hoc invento habetur singulare, ut inter cæteras novitates scientiarum, hanc quoque possis inserere, siquidem ita collubuerit, Ephemeridibus Tuis.

Horologia formâ modicâ ad hunc modum constructa, erunt horarum indices portatiles quam exactissimi, sub majori forma autem ubique utiliter adhibebuntur, ac speciatim in longitudinibus terrâ marique inveniendis, siquidem ipsorum motus regitur à principio quodam æquabilitatis, non aliter ac aliorum cum pendulis, per cycloidem quippe ita correctorum ut nullum vecturæ genus illa possit sistere aut sufflaminare.

Arcanum inventionis consistit in pinna quadam spirali quæ altera sui extremitate interiore affixa est hastæ animulæ seu rastri æquilibris, sed majoris ac ponderosioris quam pro solito, ac supra suos cardines ultro citroque mobilis; alterâ vero extremitate cohæret particulæ cuidam supra Horologii superius tegmen eminenti: quæque vibrato semel Horologii libramento, spiras suas alternis comprimit ac relaxat, ac accedente sibi parvulo adjumento ab Horologii rotis veniente, rastri, seu æquilibrii, motum conservat, ita quidem, ut, licet majores aut minores faciat excursus, ejus reciprocationes tamen una alteri sint tempore prorsus æquales. In figura, superius Horologii planum est A B, circulus æquilibrii vel libramentum circulare C D, hujusque axis seu hasta E F: Pinna seu elaterium in spiram contortum G H M, ferruminatum ad hastam æquilibrii in M, & lamellam supra planum Horologii supremum in G, ita quidem ut spiræ omnes elaterii è duobus istis sustentaculis in aëre suspensæ hæreant, infernè nihil attingentes: N O P Q est quædam coronis aut fultura in qua vertitur alter cardo æquilibrii seu libramenti: R S est una ex rotis dentatis Horologii, habens motum quendam libratorium ab occurrente rota proxima sibi impressum. Et hæc rota R S implicatur tympano T, ad axem seu hastam libramenti firmato, cujus adeo motus hoc medio conservatur quantum opus est.

TAB. XXIX. Fig. 1.

II.

Nova Libella, Telescopio instructa, propriam secum ferens probationem, & quæ in unica statione verificatur, & rectificatur.

TAB. XXIX. Fig. 2.

Hujus instrumenti præcipua pars est Telescopium A B, unius, duorum, aut plurium pedum longitudinis, prout ab eo plures exspectantur effectus; ex duobus, quatuorve con-

convexis vitris modo ordinario, ſat ſuperque cognito, perficitur; duo ad inverſa objecta videnda, quatuor ad ea erigenda inſerviunt. Tubus ex Bractea, aut alio metallo ad Cylindri formam componitur, tranſitque in annulum aut Cylindrum minorem Cupreum C, qui ipſum in medio includit & illi conferuminatur. Cum annulo duo plana & ſimilia cohærent brachia D & E, unum in ſuperiori parte, alterum in inferiori, utriusque longitudo eſt fere quartæ partis longitudinis Teleſcopii, adeo ut tota Machina Crucem imitetur. In brachiorum extremitatibus duplicia fila, per parvulos annulos transeuntia, & inter laminas inſerta cum brachiis cohærent. Harum laminarum altera brachio affixa eſt, dum altera ſeparari poteſt ut fila inter illas inſerantur. Annulo crux ſuſpenditur ex hamo F, dum ope alterius annuli cruci, uti poſtmodum notabitur, annectitur pondus ejusdem circiter gravitatis cum illa, & in pyxide G incluſum. Ex hac pyxide ſolus egreditur ponderis uncus. Spatium in pyxide vacuum oleo nucum, lini, aut alio quocunque quod frigore non coaleſcit repletur, quo motus ponderis & Teleſcopii illico reprimuntur.

In interiori Teleſcopii parte filum ſericum horizontaliter ad vitri objectivi focum expanſum eſt, ſive unum, duo, aut tria adſint ocularia; hoc filum ope cochleæ, quæ circumvertitur in foramine H in Teleſcopii tubo, elevatur, & deprimitur. Methodus diſponendi filum poſtea explicabitur. I levis admodum ex Cupro annulus eſt, non majoris ponderis, quam $\frac{1}{80}$ aut $\frac{1}{100}$ partis ponderis ipſius crucis, & qui juxta Teleſcopii tubum movetur, & ubi libuerit hæret; inſuper ſi Crux non in æquilibrio eſt, alter annulus in interiori Teleſcopii parte ſufficientis ponderis apponitur, ut æquilibrium detur, id eſt, ut Teleſcopii tubus Horizonti parallelus fiat, in quo tamen ſumma cura haud requiritur.

Plana Crux ex ligno Machinæ ſuſpenſioni inſervit, ad hoc ſuperne uncus F habetur, & in brachiorum altero furca K majorem Teleſcopii motum lateralem reprimens, ita ut per ſpatium ſemilineæ, id eſt $\frac{1}{24}$ pollicis, tantum agitari poſſit.

Pyxis plumbum, & oleum continens eidem Cruci annectitur, ad latera, & fundum inclusa; ut autem ventus a Libella arceatur, cava crux L planæ ligneæ cruci cum duobus aut tribus hamis annectitur, adeo ut integra tum conficiatur pyxis.

Ut usui libella accommodetur, ac rectificetur, ut dictum suspenditur, plumbo non infernè annexo, & in quoddam distans objectum collineatur, attendendo ad punctum quod Horizontale filum obtegit, filum enim distincte, ut objectum ipsum observari potest. Deinde plumbum addatur, id est annulo inferiori jungatur, si tum Horizontale filum eidem objecti puncto respondeat, constabit crucis centrum gravitatis exacte dari in recta linea quæ duo suspensionis puncta conjungit, id est quæ transit per puncta quibus fila brachiis annectuntur. Hæc est primaria requisita præparatio: verum si hoc minime reperitur, res facilè perficitur ope annuli I, observando, annulum vitrum objectivum versus promoveri debere, si Telescopium declinat, dum pondus annexum est; contra retrahi debere, si Telescopium post annexum pondus elevetur.

Ubi ergo ita constituta est Machina, ut ad idem punctum appenso & sublato pondere visum dirigamus, invertenda est, suspendendo eam ex annulo inferiori, & plumbum brachio alteri annectendo; quia citius motum sistere jubet, & quia hoc ad reliqua quæ supersunt perficienda plurimum conducit.

Quod si tunc filum in Telescopio, uti antea collineando, punctum idem ac in præcedenti observatione obtegat, punctum hoc in eodem plano Horizontali cum centro tubi Telescopii existere certissimum est, quemadmodum demonstrabitur.

Verum si filum punctum idem collimando non obtegat, elevando & declinando filum, ope cochleæ huic usui adaptatæ, eo poterit reduci, elevando nempe filum si ad punctum magis elevatum visus dirigatur, & contra, Telescopium post singulas fili mutationes invertendo.

His peractis Instrumentum perfecte erit rectificatum, nec

obstat

obſtat (quod notabile eſt) ſi lentium axes non per harum centra transeant, aut ſi ipſæ non exacte in recta linea collocentur; & conſequenter ſecure Machinâ utemur, dummodo nulla ſuperveniat mutatio; filum namque Horizontale cujuscunque objecti, ad quem fiet collimatio, indicabit locum qui eſt in eodem plano Horizontali cum centro Teleſcopii; ſi autem mutatio quædam detur, in ſingulis obſervationibus detegi poteſt, primo cum plumbo annexo, deinde ſine plumbo collineando, & tandem Teleſcopium invertendo. Et hoc utique præcipuum eſt, quo Libella præ cæteris gaudet commodum, quod in uſu erroris periculum nullum detur.

Pes, quo Machina innitatur, eſt rotunda ferri, aut bracteæ lamella modice concava, cui annectuntur tres baculi longitudinis circiter trium pedum cum ſemiſſe, pyxis huic lamellæ impoſita hanc in tribus punctis, tangit, quare facile movetur, & ita conſtituitur, juvante cavitate lamellæ, ut plumbum in pyxide ſua libero fruatur motu, quod videtur trans aperturam M in operculo ligneo.

Gravitas plumbi, ut pyxis firmiter pedi inhæreat, inſervit, verum ſi firmius eam ſuſtentari velimus in lamellæ cavæ medio foramen fiat.

Si totum pondus in pyxide G recludi nolumus, tertia vel quarta tantum pars huic includatur & reliquum eidem ferreæ caudæ annectatur, ſed extra pyxidem; primo tunc obſervabitur cum minori pondere ſolo, pyxide contento, tum cum altero deſuper addito, in conſtituendo filo Horizontali ambobus utentum.

Hac methodo Teleſcopii agitationes promptiſſime, in omnibus obſervationibus quæ ad rectificandam Machinam inſtituuntur, ceſſant; ſi autem nullum in quibusdam obſervationibus imponatur pondus, hæ motiones difficilius ſiſtuntur.

Uncus F, cui Libella appenditur, ſimpliciter ligneæ planæ cruci annecti poteſt, licet hic annexus apparet annulo, qui ope cochleæ adhærentis annulo, quo Machina defertur, elevari & deprimi poteſt.

Quan-

Quantum hoc profit, experitur in ipfius tranflatione, nam tum crucis fila laxari queunt curando, ut fupra furcam K, & brachium exiguum curvatum R, defcendat Telefcopium, ne quidem thecam ligneam aperiendo.

Ne oleum pyxide G contentum ex hac defluat, dum Libella in itineribus confertur, pyxidis hujus foramen ipfo pondere inclufo claudi poteft; curabitur ad hoc, ut pondus illud defuper planum admodum fit, & detineatur juxta pyxidis operculum ope annuli cochleati S.

TAB. XXIX. Fig. 3. Tubus N, illum in magno repræfentat, cui in interiori Telefcopii parte Horizontale filum cohæret, continet elaftrum O P furcæ Q annexum, cui fericum filum cera affigitur; hoc elaftrum furcam ad fruftum bracteæ T trahit, quod ingreditur cochlea, quæ refpondet foramini H in tubo Telefcopii, quo dato foramine etiam modice tubus N verti poteft, ut filum exacte fiat Horizontale, de quo judicatur per Telefcopium videndo.

Rectificationis Libellæ Demonftratio.

Rectificationis requifitum primum fuit hoc; ut centrum gravitatis fufpenfæ crucis in recta linea per puncta, quibus fila brachiis annectuntur, transeunte daretur. Ut hujus præparationis neceffitas concipiatur, fciri oportet, non fufficere fi Telefcopium ex utroque annulo fucceffive fufpenfum ad idem objecti punctum dirigatur, hoc enim fieri poteft, licet objecti punctum multum infra, aut fupra Horizontale planum inveniatur. Sit A B Cylindri Telefcopiani axis; fit C I fufpenfionis, aut nexuum filorum linea, quarum linearum longitudinum hic non habetur ratio, quoniam, cujuscunque magnitudinis Telefcopium fit, nihil hoc ad fufpenfi corporis fitum conferre, notum eft: ponimus A B, C I fe mutuo ad angulos perfectè rectos fecare in puncto H. Defuper centrum gravitatis crucis in E, ponatur in axe A B, magis tamen verfus B, quam punctum H; Cruce itaque fufpenfa in C, linea quæ a C ad centrum terræ tendit erit C E, ita

TAB. XXIX. Fig. 4.

ita ut axis A B declinaturus ſit infra Horizontale planum, cui C E perpendicularis eſt, & cum quo efficiet angulum æqualem angulo H C E; ſi vero viſus radius A B filum Horizontale, & vitri objectivi B centrum pertranſiens continuetur in recta linea ad objecti punctum usque; iſtud punctum infra Horizontale planum tunc eſſe futurum, evidens eſt; Invertendo interim Teleſcopium, & hoc per I ſuſpendendo, ita tamen, ut extremitas B ad eandem partem remaneat, facile patet eundem ſitum, quem ſuſpenſum per C habebat, eum acquirere; quia, directionis linea denuo per punctum E tranſibit: igitur juxta filum Horizontale, uti antea collineabimus ad idem objecti punctum; licet minime æqua ſit Libella.

Per primariam rectificationis partem, defectus hic detegitur, & corrigitur: nam primo ſi gravitatis Crucis centrum exiſtit in H, directionis linea erit C I, & conſtat, pondere in I annectendo, crucis ſitum non mutari; & idcirco per Teleſcopium ad idem punctum, collineabimus; ſed ſi centrum gravitatis crucis ſit in E, & pondus in I appendatur, extremitas B elevabitur, & ideo viſus per Teleſcopium ad punctum magis elevatum, quam ante, dirigitur. Quod aperte videtur ducendo lineam I E, eamque dividendo in K, ita ut pars I K ſit ad K E, uti crucis pondus eſt ad pondus in I annexum; nam commune centrum gravitatis erit K, & C K directionis linea: & angulus K C E æqualis erit illi, quo elevabitur Axis A B. Quia linea C E ſupra C K tali angulo elevatur, & quia A B cum C E eundem quem ante efficit angulum.

Ut vero clare pateat, appendendo pondus in I ſufficienter detegi, an centrum gravitatis crucis detur extra ſuſpenſionis lineam; dico, angulum K C E, poſito pondere appenſo æquale ponderi ipſius crucis, ſenſibiliter æquari; anguli I C E, qui æqualis eſt angulo quo Axis A B, & ideo quoque Viſus Radius, magis deprimitur verſus partem B, quam feciſſet, ſi centrum gravitatis crucis in H fuiſſet; nam ducendo K L parallelam ad E H, in duas partes æquales dividet H I, &

H N valebit $\frac{2}{3}$ lineæ L K, aſt L K eſt dimidium H E; ergo H N eſt $\frac{1}{3}$ ex H E, & N E ideo $\frac{2}{3}$ ex H E, ſed uti E N eſt ad E H, ita ſenſibiliter angulus E C N eſt ad angulum E C H quia exigui ſunt, id eſt E C K ad E C I.

Cum autem angulus E C K illi æqualis eſt, quo Teleſcopium elevatur addendo pondus in I, ſequitur exiguum pondus P verſus H retro trahendum eſſe ut magis elevetur Teleſcopium, ita tamen ut prima elevatio dupla ſit ſecundæ, quia angulus K C E duplus eſt K C I; & tunc directionis linea erit C I, in qua neceſſario gravitatis centrum crucis exiſtet, quandoquidem centrum gravitatis ponderis in I appenſi, in hac datur, uti & centrum gravitatis commune ejusdem ponderis & crucis, cujus pars eſt exiguum pondus P. Si annectendo pondus in I Teleſcopii extremitas B deprimatur, dimidia ſua parte augenda erit depreſſio, quod eodem modo demonſtratur. Hæc angulorum cognitio, ad primam Libellæ præparationem faciliorem reddendam uſu venit.

Quod aliam verificationis partem ſpectat, ubi centrum gravitatis crucis eſt in C I, ſuſpenſionum linea, ex ante explicatis ſequitur, hanc lineam eſſe perpendicularem ad Horizontem, ſive crux per C, ſive per I ſuſpendatur, & ſive illi ad infra pondus annectatur, ſive crux ſola ſuſpendatur.

TAB. XXIX. Fig. 5.

Tandem, poſitâ brachiorum ut & filorum æqualitate, certiſſimum eſt, centrum Cylindri Teleſcopii, quod ſit H, ad eandem in utraque ſuſpenſione altitudinem dari: ſint itaque D H M, E H P, axis Cylindri in una, & altera ſuſpenſione, ponendo primo, quod differentibus gaudeat poſitionibus, ſit O objecti punctum, ad quod juxta filum Horizontale collineamus, & O M, O P, Radii luminis, qui a puncto O tendunt ad centrum aperturæ vitri objectivi, & inde æque ac omnes alii radii, qui a puncto O ad vitrum objectivum perveniunt, Horizontali filo obviam proficiſcuntur, ſive filum iſtud Teleſcopii axem pertranſeat, ſive non; hoc namque per Dioptricæ leges ſequitur, cum filum punctum O tegere videatur, & utrumque diſtincte appareat. Ductis lineis rectis H O, M P, ultima parallela erit C I, quia H M,

H P

H P sunt æquales, ac æqualiter inclinatæ ad C I. Ergo anguli M, P, trianguli M H P sunt æquales; ast angulos H M O, H P O etiam esse æquales certum est, nullo habito respectu ad id, quod radiis O M, O P intra Telescopium accidit, nec si vitri objectivi axis per hujus centrum transeat, id est, an maximam suam in centro habeat crassitudinem. Anguli igitur M, P, trianguli M O P similiter æquales sunt, & triangulum hoc est Isosceles, uti M P H; recta idcirco H O secabit M P ad angulos rectos; sed M P parallela erat C I; O H ergo perpendicularis est C I, & idcirco punctum O in eodem plano Horizontali cum centro H Telescopii, quod probandum erat.

Si nunc centrum vitri objectivi M, P, in utroque casu detur in eodem puncto ut S, recta H S perpendicularis erit C I, quandoquidem anguli C H S, I H S tum æquales sint, propter Telescopii inversionem, verum quia S O tendit ad idem punctum O in ambabus suspensionibus, necessario erit in eadem recta linea cum H S, si enim lineæ hæ angulum conficerent, angulus iste superne in una suspensione esset dum in altera situm contrarium haberet, sicque juxta filum ad duo distincta puncta collinearemus, cum ad unicum punctum id fieri posuimus; sed integra igitur linea O S H est perpendicularis ad C I, ideoque punctum O in eodem datur plano Horizontali cum puncto H.

III.

Astroscopia Compendiaria, Tubi Optici molimine liberata.

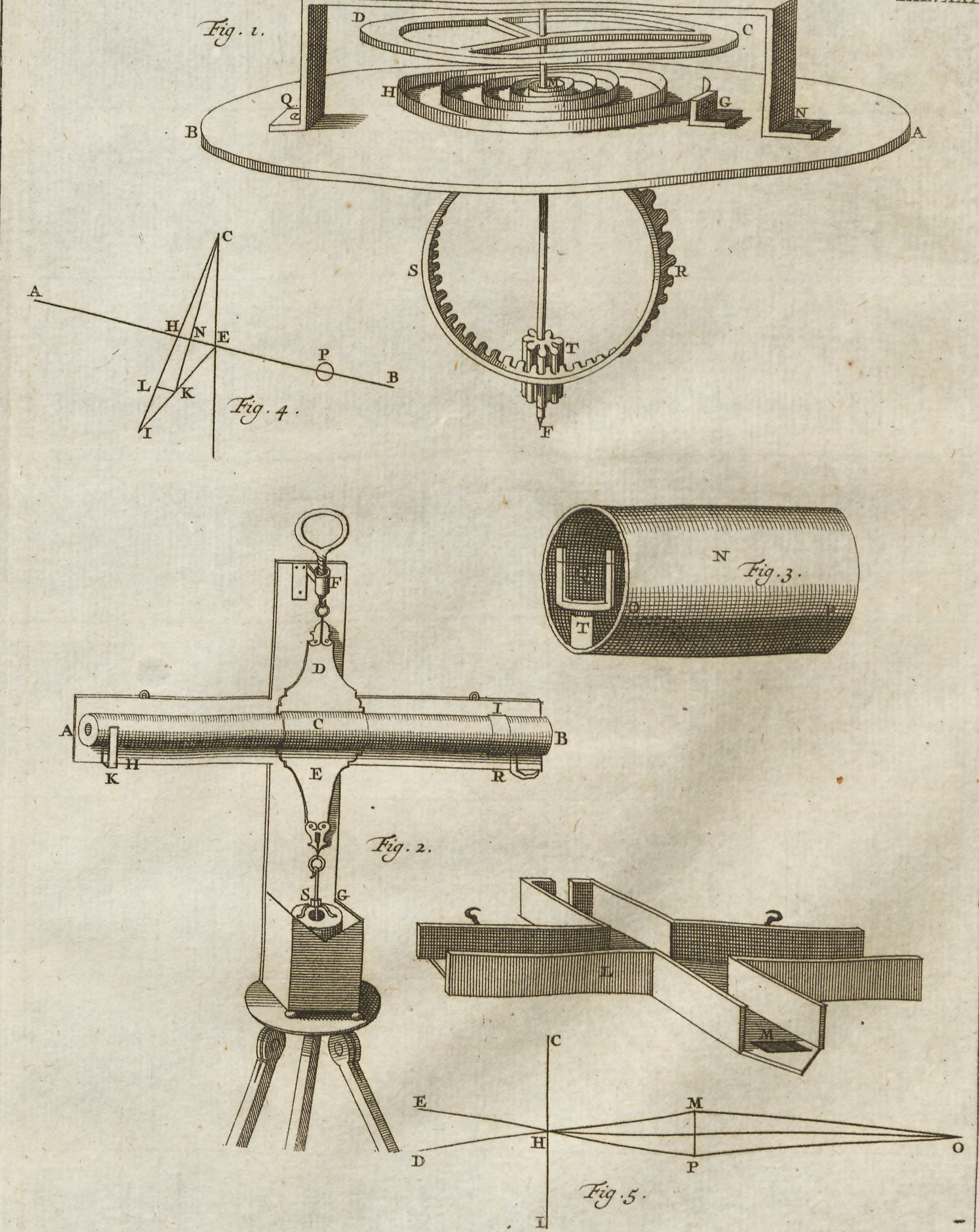
QUod plerisque omnibus accidit novis inventis, ut, à parvis orta initiis, cura & tractatione hominum auctiora fiant ac perfectiora, id vel præcipue, in admirando illo proferendi visus artificio, usu venisse animadvertimus. Notum est enim quàm fuerit à prima origine tenue ac pene nihili, cum rudimenta ejus quædam, in Portæ Neapolitani libris,

obſcure expoſita conſpicerentur; quibus tantum præcelluere noſtratium hominum conatus, ut non ſane immerito primi ejus inventores haberentur. Hos vero rurſus longiſſime prævertit Galilæus, tot tantiſque rebus, tubi ſui opera, in cælo deprehenſis, quarum nihil quidquam ante ipſum fuerat perceptum. Videbatur nihil præſtantius iis, quæ ſibi paraverat, organis repertum iri. At, ſi nunc in vitam redeat, quis dubitet quin ſuis ipſe multo præpoſiturus ſit ea quæ deinde exſtiterunt; tum noſtra, quibus Saturni planetæ veras figuras annulumque primi conſpeximus; tum magis etiam, quæ his ſucceſſerunt Italica, ab egregiis artificibus elaborata. Quibus uſus Vir Clariſſimus Dominicus Caſſinus, alia inſuper nova phænomena cœlo deduxit; planetariorum globorum in ſeſe revolutiones, comiteſque Saturni duos, præter eum quem nos repereramus, reliquis manifeſtiorem.

Quod ſi attendamus quibus acceſſionibus in tantum hæc ars continue creverit, nihil aliud reperiemus niſi auctam tuborum longitudinem, lenteſque, quas vocant, vitreas in ſphæræ majoris convexitatem diligentius conformatas. Etſi enim modos quoſdam alios, compendiaque inveſtigaverint viri ſubtiliſſimi; jam conicarum ſectionum præſcriptis figuris, quæ vitro inducerentur; jam ſpeculorum reflexionibus radios lucis colligendo; certum eſt hæc omnia vel fruſtra fuiſſe, vel votis & expectatione longe minora, ob cauſas quas exponere non eſt hujus loci; unamque adeo rationem, qua proficeretur, hactenus eſſe relictam, tuborum productionem. Et ſane, quanto magis rei ipſius naturam intueor, tanto propius eſt ut exiſtimem, nihil alia via ne impoſterum quidem eſſe ſperandum.

Optime igitur operam ſuam ij collocaſſe videntur, qui parandis tubi majoris lentibus incubuerunt. Quorum diligentiæ ſucceſſus hac in parte non defuit. Sed aliunde non exiguum oblatum fuit incommodum, nimia tuborum longiorum gravitas ac moles; quibus movendis neceſſario machinæ in auxilium advocandæ fuerunt. Hæ vero & in iis quæ nunc extant, pedum triginta aut quadraginta, longitudinibus difficile conſtruun-

TAB. XXIX.


Fig. 1.
P
E
O
D
C
H
M
Q
G
N
B
A
S
R
T
F
Fig. 4.
C
A
H
N
E
P
B
L
K
I
Fig. 3.
N
T
Fig. 2.
F
D
I
A
C
B
K
H
E
R
S
G
L
M
Fig. 5.
C
E
M
H
D
P
O
I

ſtruuntur tractanturque; &, ſi ulterius progrediendum ſit, multo plus exhibituræ ſint negotii. Adeo ut hic velut obex quidam fixus fuiſſe videatur ad majora tendentibus. Quare rem inprimis gratam me facturum arbitror hæc ſtudia colentibus, ſyderumque obſervationi intentis, ſi, quod nuper inveni, oſtendero qua ratione impedimentum illud omne ac tædium tollatur; magnoque temporis, operæ & ſumptuum compendio, maxima quæque teleſcopia ad hæc ſpectacula adhibeantur. Scio inter cætera quæ in hunc finem propoſita fuere, hoc quoque, quod hic adferimus, aliis in mentem jam à multis annis veniſſe, ut ſine tubo lentes diſponerentur; ſed quod volebant efficere eos nequiiſſe, niſi machinatione quadam difficili nimium, quæque propterea adhuc exitum non habuerit. Nos autem quæ docebimus, reipſa utilia eſſe invenimus, idque magno commodo noſtro quotidie experimur. Ea vero ſic ſe habent.

Loco patente & undique aperto, malus in terram defigitur, ad perpendiculum erectus. Noſter, quo primum uſi ſumus, pedum quinquaginta altitudinem habebat; teleſcopiis nempe pedum 70 & amplius ſuffecturus, quanquam non in omni ſyderum ſupra horizontem aſcenſu. Deberet enim non multo infra totam teleſcopii longitudinem produci. Hujus, priuſquam erigatur, latus unum dolabra complanatur, atque ibi regulæ binæ affiguntur inter ſe parallelæ, ac ſeſquipollice diſtantes, itaque canalem efficientes, interius paulo latiorem, qui à ſummo malo ad imum fere pertingat, reliquis tantum pedibus tribus vacuis. Præterea in ipſo mali cacumine, orbiculus imponitur, circum axem mobilis, inque eum funis ducitur dupla mali longitudine, craſſitudine minimi digiti dimidia. Utque eo, ſi forte opus ſit, aſcendi poſſit, triangula lignea æqualibus ſpatiis defiguntur, quibus ſcandentis pedes inſiſtant. Ita demum paratus malus erigitur, parte ea, qua terra tegendus, illita pice, circumdataque arena, quo minus putredine corrumpatur. Uſus mali eſt, ut lens major ejus opera in altum tollatur quouſque opus eſt; quod fit hoc modo.

Afferculus bipedalis uno latere ita inciditur, ut intra canalem, quem diximus, liberrime moveri queat. Hujus medio affigitur brachium itidem ligneum, pedem unum à malo exftans, cujus in extremo aliud fesquipedale, media item fui parte, conjungitur rectis angulis. Utrumque vero Horizonti parallelum extenditur. Huic transverfo brachio lens imponitur ea qua dicemus ratione, atque omnia furfum adducuntur, adnexis afferculi extremis ad funem ante demonftratum; qui ab imo malo ad fummum afcendens, ac fuper orbiculum transiens, inde defcendit rurfus ac, priufquam terram attingat, in fui ipfius caput alterum innectitur. Habet autem funis is adjectum plumbum, pondere æquali quantum eft brachii mobilis cum lente impofita; eoque loco deligatum, ut ad fummum malum pertingat, cum lens in imo confiftit. Ita hæc facillime ad eam quæ requiritur altitudinem erigitur &, omiffo fune, fponte ibi fufpenfa manet. Forma plumbi parte utraque in coni apicem definit, ne obhæreat ad triangula quæ per malum defixa diximus.

Cæterum lens hæc telefcopii major collocatur aptaturque hoc modo. Primum in annulum feu cylindrum cavum, è ferri bractea fabricatum, ipfa includitur, longum digitos quaternos. Huic cylindro, five alteri potius in quem hic inferitur, bacillus pedalis, digiti craffitudine, extrinfecus fecundum latus affigitur, totus in partem unam prominens. Hæc omnia globulo æneo infiftunt, avellanæ nucis magnitudine, qui bacillo cohæret, inque fubjecto fui moduli cavo liberrime volvitur; ita tamen ut excidere nequeat. Cavum partibus duabus conftat, quæ, fuper pediculo tereti, cochlea junguntur adftringunturque, fed ita ut globulum nihil prorfus premant. Lens igitur, cum bacillo fibi adfixo, hoc modo mobilis efficitur. Quæ porro ut æqualiter librata confiftat, pondus unius libræ circiter infra bacillum appenditur, filo æneo craffiore femipedali conjunctum atque infixum. Cujus flexu facile ita pondus temperatur, ut centrum commune, fuæ lentisque gravitatis, cum centro Sphærulæ conveniat, atque hoc pacto quocunque pofitu lens fufpenfa maneat,

maneat, attactuque leviſſimo moveatur. Qua in re potiſſima verſatur inventi pars. Pede enim globuli in foramen transverſi brachii, quod ſupra deſignavimus, immiſſo, (duo autem vel plura ejusmodi foramina fiunt, ut in omnem cæli partem commode lens obverti poſſit) filum vel funiculus tenuiſſimus bacillo, ſive caudæ extremæ, illigatur; juncturus nempe lentem majorem cum ea quæ oculo proxima ponitur, ac proinde futuri teleſcopii longitudinem æquans, vel potius paulo excedens. Hinc, ubi ſublata ad malum fuerit lens, quocunque id filum, manu leviter tractum, circumferetur, lentem una movebit, eamque hoc modo ad aſtrum quodcunque recta opponet. Quod certe absque hoc libramento fieri non poſſet. Cæterum ut extento filo cauda ſeu bacillus, quem lenti adpoſuimus, parallelus fiat, quod omnino neceſſe eſt, infigitur parti ejus extremæ ſtylus æreus digiti longitudine, cui deorſum flexo, donec cuſpide ſua tantundem ac centrum globuli infra bacillum deſcendat, ita demum filum, quod diximus, adnectitur. Cur autem ſtylo flexili hic utamur poſtea dicetur.

Jam vero & de oculari lente explicandum, quomodo cum priore componatur; quod multis verbis non indiget, ſiquidem eadem fere omnia, quæ in majori lente, obſervanda ſunt. Similiter enim tubo, ſeu cylindro brevi, hæc quoque includitur; item bacillo ſeu caudæ conjungitur; quæ porro globulum ſuum cui innitatur habet. Sed hujus loco axiculus transverſus adhiberi poteſt. Infra bacillum vero pondus exiguum rurſus appenditur, quanto opus eſt ad faciendum libramentum. Porro capulus, globulum vel axiculum ferens, manu obſervatoris apprehenditur; bacillus lentem majorem ſublime poſitam verſus, directus eſt, filo eidem, quod inde deſcendit, illigatus. Adducta vero manu, contentoque leviter filo, parallelas inter ſe fieri lentes perſpicuum eſt. At non eodem modo, bacilli hujus extrema parte, filum adnectitur, ac ſuperiori illi, qui lentem majorem dirigit, ſed per foramen trajectum, inde verticillo involvitur, cujusmodi ſunt quibus teſtudinum chordas intendunt; qui verticillus

medio

medio bacillo à latere infixus eſt. Hujus converſione, inter obſervandum, fili longitudo producitur contrahiturve, donec intervallum inter lentem utramque, oculo ſpectatoris exacte conveniat, poſtquam antea prope verum fuerit repertum, quod eſt facillimum.

Vide Auctarium. pag. 274.

Cæterum, quo poſſit obſervator immotam detinere lentem ſibi proximam, quod apprime neceſſe eſt, fulcrum quoddam præſto eſt è levi materia compactum, duobus pedibus inſiſtens, ac ſuperiori parte transverſum habens baculum, cui brachia utraque, ſive ſtantis ſive ſedentis, innitantur; dum altera manus, quomodo diximus, lentem ſuſtinet. Multoque expeditior eſt hæc ratio, atque ad uſum accommodatior, quam ſi tertius pes fulcro accedat, inque ipſum lens ocularis imponatur.

Ut vero noctu, atque in tenebris, ſtellæ quævis teleſcopio noſtro facile reperiantur, lumine utimur laternæ incluſo, quales jam vulgo notæ ſunt, vitri convexi vel ſpeculi opera longe lucem projicientes. Hujus radiis ad malum lentemque in eo hærentem directis, ubi circulus ipſam continens conſpectus fuerit, facile eo transfertur viſus, ut ſtella ipſi media lente tegatur, ſimulque admota lente minori, per utramque ſe ſpectandam præbeat. Ac ſane multo citius hoc peragitur, quam factum ſit hactenus teleſcopiis tubo inſtructis. Adeo ut hoc quoque nomine longe præſtet nova hæc obſervandi ratio. Lunam vero contemplari volentibus, lucerna nihil opus eſt, quod ipſius aſtri luce lens conſpici poſſit. Sed hic ob diſci lunaris amplitudinem; ne partem quampiam intuenti, ab alia parte lux, aliaque via quam per majorem lentem, ad oculum accidat; circulus papyraceus lenti huic circumponitur, paulo majore quam dupla diametro ad eum quo tota Luna tegeretur. Quod niſi fiat, dilutiores apparent umbræ tractuſque ii qui, cæteris obſcuriores, in ejus globo conſpici ſolent. Atque ita jam teleſcopii noſtri aërii rationem omnem & apparatum explicuimus, non ſane operoſum; filoque illo, velut Ariadnæo, unde hactenus inventus non erat, exitum reperimus.

Cæ-

Cæterum quo clarius ea, quæ diximus, intelligantur, delineationem hic ſubjicimus, in qua

Malus eſt, a b. TAB. XXXI.
Aſſerculus in canali mobilis, c d.
Brachium ipſi ad angulos rectos infixum, e.
Baculus tranſverſus in quem lens imponitur, f f.
Funis in ſe rediens, g g.
Plumbum funi innexum, h.
Orbiculus in ſummo malo, a.
Cylindrus cavus lentem primariam continens, i.
Bacillus cylindro affixus, k l.
Globulus æneus bacillo hærens & in ſubjecto cavo volubilis, m.
Plumbum filo æneo junctum, n.
Stylus brevis ac flexilis, extremo bacillo inſertus, l.
Tubulus minorem ſeu ocularem lentem ferens, o.
Bacillus tubulo affixus, p.
Axiculus mobilis, q.
Capulus manu tenendus, r.
Glans plumbea, ſ.
Verticillus cui filum involvitur, t.
Pinnulæ decuſſatim poſitæ, atque ita foramen efficientes quo filum trajicitur, u.
Filum tenue bombycinum, l u.
Fulcrum cui ſpectator innititur, x.
Laterna, y.

Triangula per malum diſpoſita, quibus conſcendi poſſit, omiſſa ſunt, ne figuram obſcuriorem redderent.

Supereſt ut nonnulla, quæ fortaſſe nondum expertis ſcrupulum injicere poſſent, paulo accuratius examinemus. Verebuntur primum ne, ſubſidente filo quod ad utramque lentem pertingit, flexus ejus, quanquam exiguus, in magnis tamen illis, pedum centum aut ducentorum, longitudinibus impediat poſitum earum parallelum. Et profecto, ſi fune graviore opus foret, non parum noceret curvatura ejus, nullaque fere tendendi vehementia ſuperari poſſet hoc incommodum. Nunc verò, ſuſpenſâ librataque lente majori ut à no-

bis factum est, levissimi tantum fili bombycini tractu eam dirigimus; cujus pondus in pedes quinquaginta semidrachmam non superat; quodque idem appensas libras septem sustinet priusquam rumpatur. Quare flexus ejus neque in hac, neque in multo majori lentium distantia quidquam officit, etsi non nisi modica vi trahatur, duabus tribusve æquipollente libris; utique cum geometrica perfectio nequaquam hic requiratur, ut cuilibet experto notum.

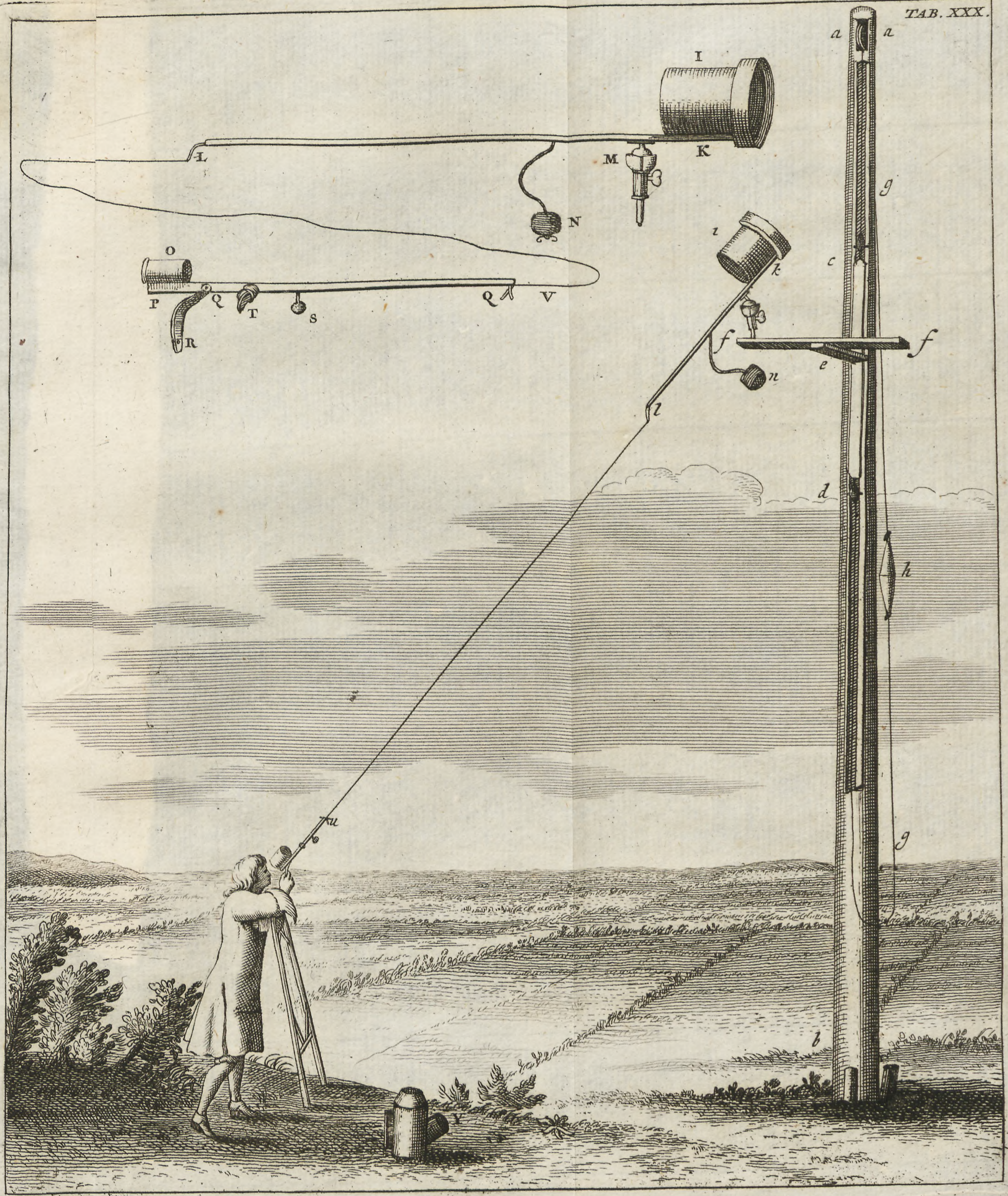
Etenim certum est eadem ratione, qua funis fune levior est, vim tensionis diminui, qua utrumque ad rectam lineam æqualiter accedat. Ut proinde funiculus quinquaginta pedes longus, atque unciam pendens, vi librarum quadraginta octo opus habeat, ubi filum nostrum, longitudine pari, non nisi tribus libris indigebit. Atque hoc per se clarius est quam ut demonstratione comprobetur. Idem enim est prorsus cum sexdecim funiculi semidrachmales trahuntur singuli trium librarum pondere, atque cum uncialem funiculum simul componentes, is à conjunctis itidem sexdecies ternis libris contenditur.

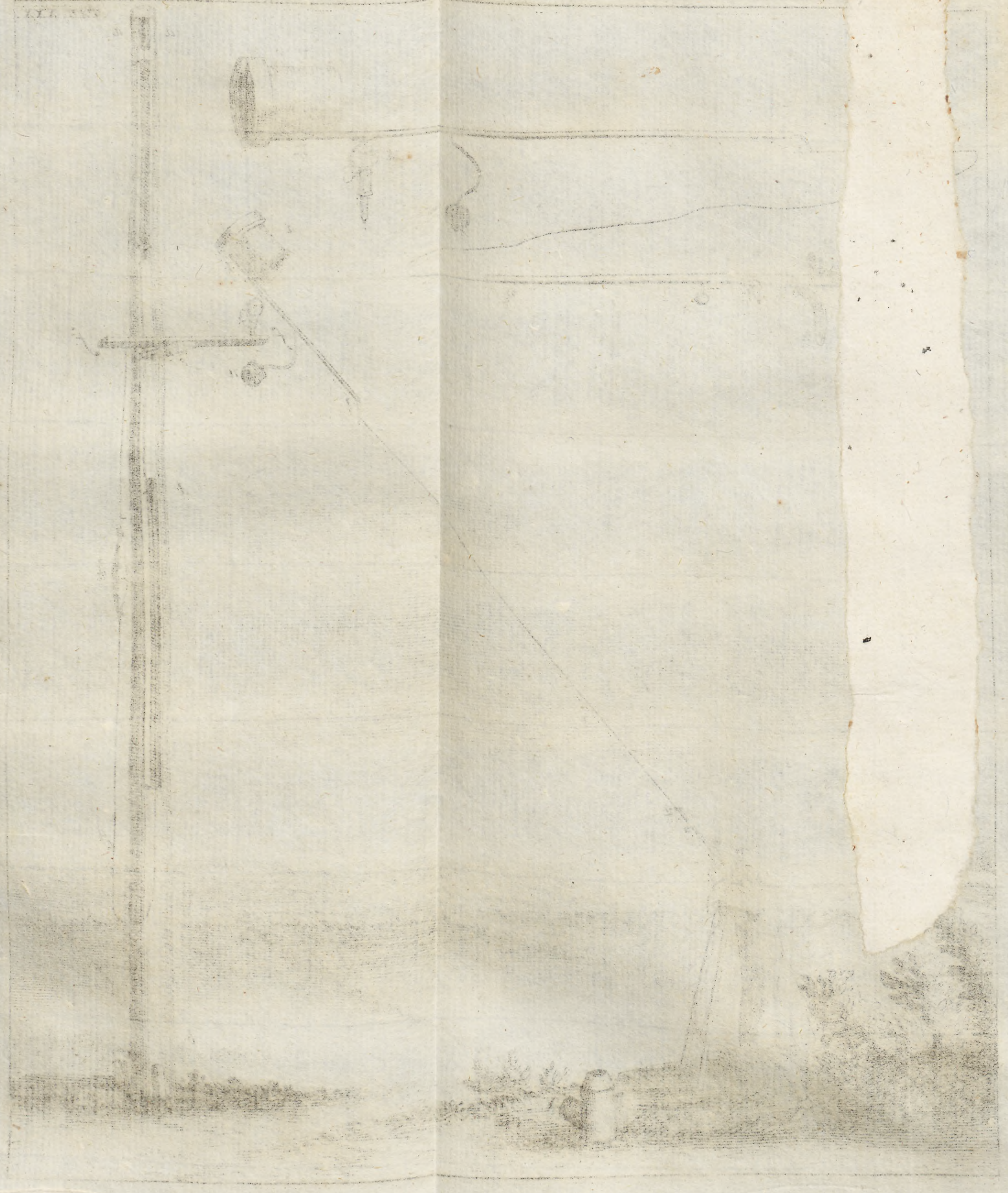
Sed ulterius quoque hæc, quæ ad fili flexum attinent, geometriæ rationibus, experimentisque expendi possunt. Nempe contentum filum, flexu illo exiguo, parabolicam lineam tam prope exprimit, ut pro vera absque errore habeatur. Cujus parabolæ profunditatem, in longitudine pedum centum quinquaginta, invenimus pedis unius circiter quartam partem; cum filum horizonti parallelum tenderetur, nec nisi vi librarum duarum & semis. Sit fili parabola *a b c*, profunditas ejus *d b*, ducta nimirum recta *a d c*. Porro tangant parabolam rectæ *a e*, *c f*: quibus occurrant *c e*, *a f*, parallelæ *d b*. Intuenti igitur ex *a* puncto, secundum rectam *a e*, notatum fuit spatium *c e* fieri pedis unius; unde fit *d b* pedis quarta pars. Ipsi vero *c e* æquale est *a f*. Itaque lentem in *c* positam ita trahit filum *c b a*, ut non ad oculum, qui est in *a*, sed ad *f* punctum directe opposita sit. Ut proinde pedis unius intervallo à vero loco oculus absit: quod in illa pedum 150 distantia nihil obesse potest. Fit enim angulus

TAB. XXXI. Fig. 1.

defle-

TAB. XXX.





deflexionis *c a e* vel *a c f* tantum duarum quintarum unius gradus; adeo ut remedio, quod tamen dabimus, non sit opus. Sumpta autem *g h* distantia prioris dupla, seu pedum trecentorum, ut filum incurvum sit *g b h*, erit cavitatis mensura *k b*, prioris *d b* quadrupla quidem, sed angulus deflexionis tantummodo duplus, hoc est, $\frac{4}{5}$ unius gradus; ut facile perspicitur, ducta tangente *g l*, quæ cum perpendiculari *h l* conveniat. Ipsa enim *h l* quadrupla erit ad *k b* sive *c e*; distantia vero *g h* ad *a c* erat dupla. Quare angulus deflexionis *h g l*, antea inventi *c a e*, duplus censeri potest.

Hæc verò, scrupulorum 48, aberratio nullius adhuc momenti est, neque neglecta nocebit. Attamen, quo minus causandi locus hic supersit, ostendam jam quænam adhiberi possit correctio, atque ejusmodi quidem ut, una opera, omnem aliam lentis declinationem restituat.

Igitur semel ab initio, ad superiorem lentis magnæ præparationem, hoc quod dicemus, adjungatur. Nempe lente quemadmodum præcepimus librata, atque ad oculi altitudinem defixa, filum caudæ adnexum manu altera capiatur, eaque oculo admoveatur; altera lucernam juxta teneat. Tum paulatim recedendo, extentumque filum producendo, observetur an duplex flammæ imago circa mediam lentem appareat, ab utraque nimirum superficie ejus reflexa. Id si contingat ubi jam tota fili longitudo exierit, quanta nimirum futuro telescopio debetur, indicio est rectissime lentem ad oculum converti. Quod si altera tantum flammæ reflexio conspiciatur, male collocata erit, sin neutra, pejus. Hic vero jam remedium adhibebitur, ubi cognitum fuerit in quam partem lens declinet. Stylus enim æneus extremæ caudæ adjectus, filumque innexum habens, in partem eandem parumper flectendus est; ac rursus, ut ante, lucernæ reflexio tentanda; idque ita repetitis vicibus faciendum, quoad utraque flammulæ imago in unum convenire conspiciatur. Tensione autem fili utendum mediocri, qualem supra definivimus, duarum aut trium librarum vim referente, eique

quatenus licet adsuescendum. Hoc modo correcta semel lentis positio ad omnes observationes valebit. Neque hic subtiliter nimium objiciat quisquam quod obliquo fili ascensu, cum ad astra dirigitur, paulo minor efficitur flexus ejus à gravitate ortus, quam cum filum idem horizonti parallelum extenditur. Est enim differentia hæc perexigua, præsertim in tanta fili levitate; & lentium parallelismus, ut jam diximus, ad geometriæ leges exactus non requiritur.

Multo magis ventus obesse dicendus foret, filum sinuans atque in latus impellens, præsertim in magnis, quas diximus, longitudinibus; nisi quod tubis quoque idem ventus adversus est, qui concussu ejus tremunt ac vacillant, magno spectantis incommodo; ut propterea sæpe observationibus supersedendum fuerit. Sed quo æquiore animo hæc dispendia feramus, sciendum est, flantibus ventis, semper fere aëris pelluciditatem adeo turbari, etiamsi serenus videatur, ut hoc uno omnis telescopiorum prospectus impediatur; quod exercitatis ignotum esse nequit. Imo & tranquillo interdum ac prorsus sereno cœlo, scintillantibus cum maxime sideribus, frustra tamen telescopia adhibentur; humido vapore quodam aërem obsidente, quo fit ut ad Planetarum corpora respicienti, undatio quædam tremula & fluctuans omnem visus aciem intercipiat. Possetque, ubi hoc accidit, ipsa lentium bonitas suspecta esse, nisi alio tempore ac puriore cœlo fuisset cognita. Idem vapor, ut hoc quoque obiter admoneam, non raro, lenti majori adhærescens, radiorum lucis partem avertit: cui malo, calefacto modice ad ignem vitro, occurritur.

Videamus nunc & illud quod de illustranda lente eadem diximus ad malum subrecta. Quæ si valde procul distet, puta ad ducentorum & amplius pedum intervallum, vix videtur tantum luminis, ut ab observatore cerni possit, acceptura, etiamsi lucerna convexo vitreo juvetur, uti præcepimus. Sed hic intendere amplius lumen licebit, vel aucto lucernæ ipsius ellychnio, vel latiori lente adhibita leniusque convexa, quæ lucem transmissam, etiamsi pari quantitate

acci-

accipiat, minus tamen diffundet, longiusque proinde ejaculabitur.

Quantum igitur ad hæc attinet, nihil admodum referre liquet quænam fuerit telescopii longitudo, sed æque facile qualiacunque in usum deduci. Aliquod tantum discrimen in varia mali altitudine positum esse. Cujus quidem parandæ plures modi suppetunt. Possumus enim, uno statuto malo, alium ejus opera duplo altiorem juxta attollere, ac simul firmiorem reddere, transversis fibulis utrumque conserendo. Ac firmissima quidem fuerit compages hujusmodi, si duo mali humiliores, cum tertio duplæ altitudinis, binis ternisve pedibus inter se distent, in triangulum dispositi, atque uti diximus religati. Qua ratione facile ad centum pedum altitudinem perveniemus. Ad multo majores vero, vel validiori malorum ac trabium substructione utendo, vel ad turrim aut ædificii altioris angulum inferiora ligna applicando; ita ut nihil tamen obstet, quo minus, ab imo ad summum, lens primaria adducatur, per continuum canaliculum, uti diximus, ascendens. Sed & super turri aut domus culmine erigi malus potest, ut ibi adstet is cui funis cura demandata est, ad evehendam demittendamve lentem.

Nec vero præpropera aut supervacua cura hæc à nobis agitari quis putet, quod verisimile non sit his altitudinibus opus fore. Ecce enim, dum hæc scribo, Cassini literis certior fio, lentes quatuor, quarum maxima telescopio pedum centum quadraginta destinata sit, à Josepho Campano, easque præstantissimas Romæ esse perfectas, & ad magnum Galliæ Regem missas. Etsi enim ad cœlestium observationem nondum fuere admotæ, non dubitandum tamen interdiu institutum fuisse earum examen, in atriis porticibusve prælongis unde lux exclusa esset. Nunc vero, hoc nostro invento, utilitas sua tum his lentibus, tum si quæ has longitudine excedentes prodeant, constabit.

Quod si cogitemus quibus modis telescopiorum efficaciam alii augere studuerint; quæ frustra illi quæsiverunt, ea nos levi hac opera consecutos esse videri possit. Sive enim figu-

ris lentium hyperbolicis ellipticisve, ut Cartesius, sive speculis cavis, ut Neutonus, sive alia quavis ratione id aggressi sint, huc omnia redibant ut brevioribus telescopiis, ac minori molimine usurpandis, multum amplificarentur res visæ. Nam neque accurata illa ac scrupulosa superficierum formatio devitari poterat, neque etiam lentium speculorumve magnitudo. quoniam obscuritate nimia, quicquid machinati fuerimus, inutile reddi necesse est, nisi pro ratione percepti augmenti crescant aperturæ quibus primum lux subintrat. Nos vero longitudines quidem non imminuimus, sed ne obessent effecimus, quod fere eodem redit.

Si quis vero jam requirat quousque & quo operæ pretio extendi porro telescopia posse existimem, & num productis longe ultra modum eorum quæ paulo ante diximus, sperandum sit adhuc decuplo propius ad lunam cæteraque astra nos accessuros, quam quo triginta pedes habentibus processimus; quibus tanti itineris partes centum quadraginta novem, una duntaxat reliqua, confectæ sunt: respondebo me certos quidem arti terminos præfinire non posse; huc tamen, quo dixi, nec maximo hominum conatu perventum iri. multoque minus futurum, quod aliqui videntur non desperasse, ut lunam ac Planetas cæteros velut è propinquo inspiciamus, & utrum animalibus habitentur, an præter vastas solitudines nihil habeant, visu penetremus. Primum enim, in parandis lentibus, scio quantopere crescat cum magnitudine formandi difficultas; ipsiusque inveniendi vitri quod vitiis iis careat, quæ maxime huic operi infesta sunt. Quanto enim ulterius radii colligentur, tanto magis hæc vitia se prodant necesse est. Constat præterea, ut jam ista nihil obstent, non amplificari res visas, nisi pro ratione diametrorum aperturæ lentis exterioris. Quæ diametri nequaquam crescunt cum telescopiorum longitudine; sed, quantum video, rationem longitudinum subduplam sequuntur. Adeo ut data apertura pollicum trium, in telescopio triginta pedes longo; quantam circiter experientia concedi sinit; alia, ad trecentos pedes, non nisi novem unciarum & semis sit futura,

futura, ac propterea tantum triplo majora fere omnia sint apparitura, prægrandi hoc telescopio, quam illo pedum tricenum. At si decuplo excessu idem superandum sit, jam ter mille pedum longitudine opus erit, quo quidem nulla humana ope perveniri posse, vel solius altitudinis causa, manifestum est.

Sane majores multo forent, & majori proportione crescerent, eæ, quas diximus, aperturæ, si nihil aliud obstaret quam figuræ sphæricæ parum idonea, in colligendis radiis, curvatura. Nunc vero alia quædam, ex ipsa refractionis natura, oritur radiorum aberratio, quam ante annos aliquot Neutonus egregiis quibusdam experimentis & prismatum vitreorum coloribus comprobavit. Hæc vero & ipsa leges suas habet, quibus, si recte eas perspicio, subdupla illa, quam dixi, aperturarum ad longitudines ratio colligitur.

AUCTARIUM.

Videbatur jam perfecta absolutaque omnibus numeris nova Astroscopia nostra; typisque excusa, nondum tamen edita erat; cum secundis cogitationibus, ut fit, alia quædam nobis in mentem venere, quibus ea melior commodiorque fieret. Quæ cum auctarii vice hic adponere visum sit, simul hoc monemus, ut, sicut posterius reperta fuere, ita ultimo loco, postquam reliqua descriptio ac delineatio percepta fuerit, legantur.

Cum primum spectatores invento nostro, ac Planetis nacti sumus, telescopicis observationibus minus assuetos, docuit experientia, eos quidem per se difficilius stellæ conspectum consequi; sicut antehac quoque, ubi in grandiores tubos inciderant, eveniebat. Quod autem hic fieri solitum, ut, reperto prius sidere, ac manente tubo, tantummodo oculum ei spectator jussus admoveret, id non perinde nobis nunc imitari licebat; cum lens oculo proxima, ubi defigeretur, non haberet. Itaque hic quoque ratio fuit excogitanda, qua positum suum servaret ocularis lens. Quod quidem præstitimus

mus machinæ exiguæ opera, quæ fulcro bipedi, in deſcriptione deſignato affigitur; ut in figura adjecta videre eſt.

Tranſverſarii namque in ſummo fulcro pars eſt *a a*. Rhombus plicatilis ex ære *b b*, binis lateribus ad duplam longitudinem productis. Longitudo laterum pollices $5\frac{1}{2}$, latitudo paulo major pollice dimidio; craſſitudo parte ejus decima. Hunc rhombum tranſverſarii medio applicitum tenet cochlea ferrea *f*, ſuppoſitâ æris vel ferri particulâ *g*, ac præterea orbiculo ex ære tenui, leniter convexo, cujus preſſu lentus æquabiliſque efficitur motus rhombi ac diductio. Porro ex angulo ejus ſuperiore, axis ſeu columella prominet *c*, perpendiculariter inſiſtens, longitudine ſeſqui pollicis. Cujus capite altero lamella mobilis adhæret, 4. pollices longa, dimidium lata; quæ hic conſpici nequit, quippe tecta capulo ligneo *d*, paris longitudinis, cui conſerta eſt. Huic demum capulo, plano ac parte anteriori leviter inciſo, inſeritur lamella altera ænea *e*, quæ ſuper axiculo mobili bacillum ſuſtinet, cum affixa oculari lente, tubulo ſuo incluſa. Ut autem rhombus cum impoſito onere æqualiter libretur ſuper axe *f*, adjiciuntur in productis lateribus extremis pondera paria *h h*, quantis ad hoc opus eſt.

TAB. XXXI. Fig. 2.

Quibus ita ſe habentibus, quocumque perducta fuerit obſervantis manu lens ocularis, capulo *d* ſemper deorſum converſo, ibi ſponte ſua conſiſtit; atque ita, invento ſidere, facile imperitior ſpectator in prioris locum ſuccedit, eodemque fruitur ſpectaculo. Facit enim funiculus utramque lentem conjungens, ut poſitum ſuum fulcrum ſervet, ſpectatorem verſus reclinans, etſi duobus tantum pedibus inſiſtat; ſimulque fulcri pondere, eorumque quæ ipſi impoſita docuimus, idem funiculus intenditur; adeo ut nihil aptius commodiusve hac in re optari queat.

Altitudo fulcri eſt pedum 4. poll. 9. Gravitas ejus librarum $2\frac{1}{4}$. Lentis ocularis, cum tubulo & bacillo, gravitas libra dimidia. Rhombi cum ponderibus *h h*, libræ $2\frac{1}{4}$. Quæ propterea adſcribo, ut conſtructionem noſtram, experientia comprobatam, eo facilius cuivis imitari liceat.

Nunc

Nunc vero aliud præterea addemus, quo perfectior evadat hæc nostra observandi ratio. quod licet, omissum, nihil plerumque noceret, curioso tamen syderum inspectori nequaquam est negligendum. Nempe cum Saturni comites illos Cassinianos diligentius requirerem, eosque difficulter adsequerer, præsertim noctibus non admodum obscuris, intellexi in causa esse lucem tenuem quandam, ab aëre ad oculum manantem; non eam quæ per lentem majorem advenit, sed quæ extrinsecus circum latera præterlabitur. Huic importunæ luculæ excludendæ, nonnihil quidem conducere sciebam, si circulum illum papyraceum, quo in luna observanda utebar, etiam hic lenti majori circumponerem. Sed aliud efficacius remedium, circa hæc occupato incidit, priori illi jungendum; ut nempe, perforatæ laminæ oppositu, oculi pupilla arctaretur, quæ alioqui per tenebras late patere solet. Cujus simul ac experimentum feci, jam clare tres Saturni Lunulas conspexi; cum amoto exiguo foramine media illa nostra tantum cerneretur. Quia vero, ita reductâ pupillâ, minus facile propositum sydus investigatur, quam cum tota patet, idcirco orbiculum illum perforatum, ac semipollicem latum, brachiolo quodam mobili, ac Græco Λ hærentem simili, cui in figura hac adscriptum est *k*, ita conjunximus tubuli fundo per quem lens ocularis inspicitur, quique latiori foramine pervius est, ut non ante quam hoc foramine sydus inventum fuerit, superinducatur alterum illud angustius.

Credidisset fortasse aliquis hac oculi contractione non parum visum obscurari. cum tamen certum sit, si diameter exigui foraminis, ad diametrum aperturæ lentis majoris eam rationem habeat, quam habent inter se focorum utriusque distantiæ, nihilo obscurius telescopio ejusmodi omnia cerni, quam si apertus ac liber oculus relinquatur. Sed præstat duplicare tantillam hanc latitudinem, vel paulo etiam augere amplius, quo minus difficilis sit rei videndæ inquisitio, nec nimium cito inventa stella elabatur, ob mundi conversionem diurnam. Nobis in telescopio 34 pedes longo, foraminuli dia-

meter decimam sextam circiter pollicis partem habet. Ipsum vero duos pollices cum dimidio ab oculari lente abest, quanta est præcise in hac lente foci distantia. Quod diligenter curandum, quia alias non poterit amplum spatium, ut solet, uno obtutu comprehendi. Facile autem deltoidis brachii flexu, qui quidem in schemate nostro conspici nequit, quantum opus est, lamella perforata removetur, quæ nobis semipollice à tubuli fundo extat.

Porro circulus lenti magnæ circumdatus, telescopii partem longitudinis quadragesimam quintam circiter diametro æquet. Cujus circuli objectu quia paulo impeditiorem reddi necesse erat astri investigationem, visum fuit imponere bacillo, seu caudæ lentis ocularis, stylum *m*, perpendiculariter erectum; cujus apex tantundem supra axem lentium attollitur quantus est circuli illius semidiameter. Hinc enim fit, ut si oculum prius ibi collocemus, unde cum summo margine circuli in eandem rectam lineam stella conveniat; tumque, apprehenso capulo *d*, moveamus lentem ocularem cum adjuncto bacillo, donec in eandem quoque rectam quadret extremum styli *m*; fit inquam ut, ad tubulum ocularem visum referenti, stella eadem per telescopium sese conspiciendam det, vel certe parum absit. Usu vero & exercitatione tum hæc, tum cætera quæ ad hanc observandi rationem pertinent, facilia fiunt.

IV.

Excerpta ex literis D^{ni} Hugenii de novâ methodo construendi Barometrum.

Quod novam meam methodum Barometri spectat, nosti, diversas aëris atmosphæræ pressiones multo magis fore visibiles, & faciliores distinctu, si in tubo 30 pedes alto fiat barometrum ope aquæ quam sunt in barometris vulgaribus, quæ cum Hydrargyro construuntur. Cum enim maxima diversitas sit circiter duorum pollicum in barometris vul-

gari-

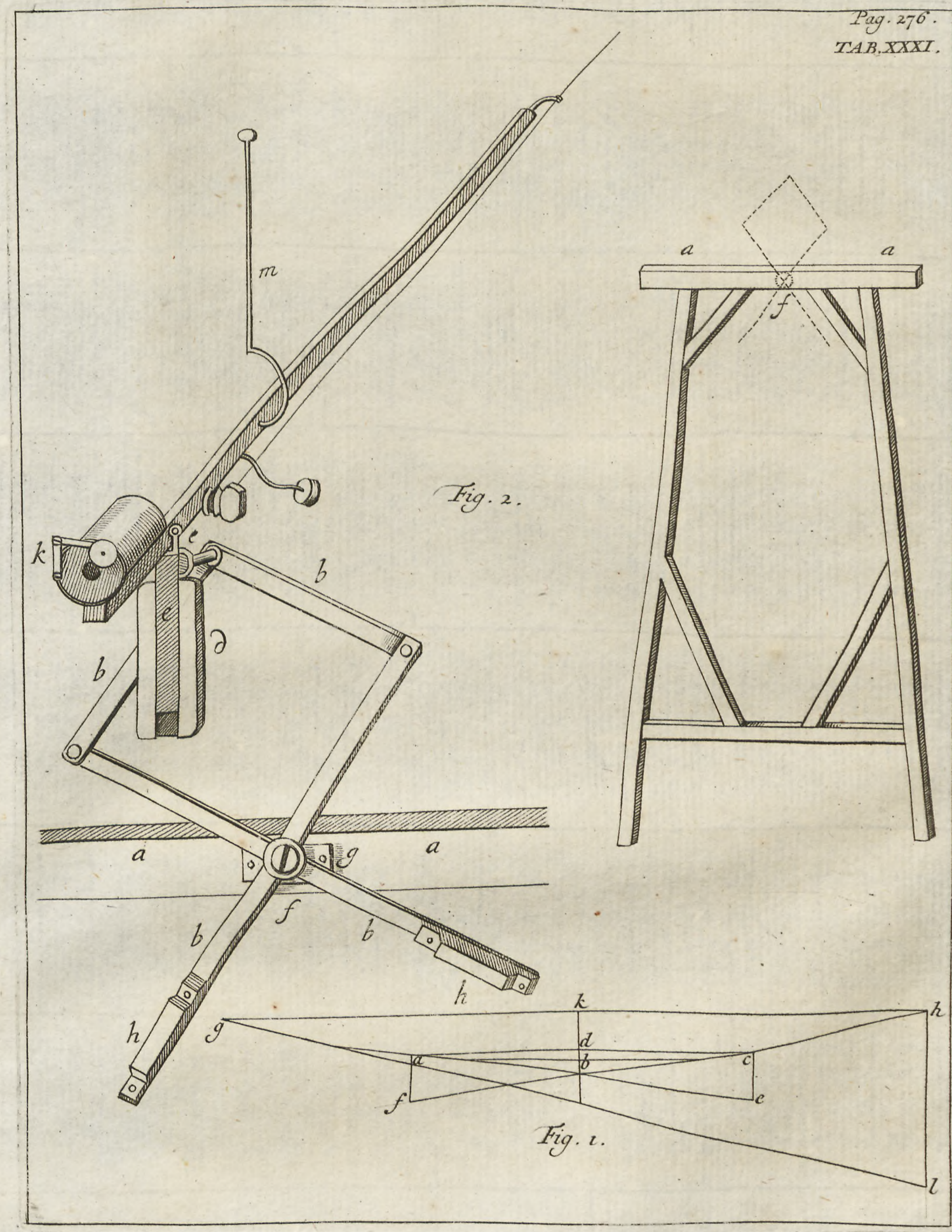


Fig. 2.

Fig. 1.

garibus, in novo hoc barometro erit viginti octo pollicum id est decies & quater major erit, aliæque variationes augebuntur eadem ratione, quæ ipsa datur inter Mercurii & aquæ gravitates specificas.

Sed uti difficile est bene disponere hæc barometra ob magnam tubi altitudinem, quæ impedit etiam, quo minus commodè locari possint, aut de loco in locum transferri. Cogitavi, quo pacto construi posset barometrum mediocris magnitudinis & portatile, cujus effectus quam proxime idem esset ac aliorum illorum magnorum barometrorum, & duas diversas constructiones inveni.

Prima est, ut fiat tubus vitreus A B quatuor pedum cum semisse, qui clausus sit in extremitate A, & cujus cavitas sit circiter duarum linearum; requiritur ut latior sit in loco medio, ubi detur quasi pyxis cylindrica C D, cujus altitudo sit circiter unius pollicis, & Diameter E E 14 vel 15 linearum, id est septies vel octies major diametro tubi; infunditur in apertam extremitatem tantum aquæ, quantum requiritur ad replendum dimidium receptaculi C D cum partis superioris tubi dimidio C F; Porro repletur quidquid superest Mercurio; qui etiam infunditur in vas G ad altitudinem semipollicis, deinde immergitur in hunc extremitas tubi B; tum pro parte exit Mercurius, & qui super est manet ad altitudinem E E; aqua, quæ supernatat, descendit usque in F, relinquens reliquum tubi F A aëre vacuum, & superficies aquæ, adscendendo & descendendo denotat diversum atmosphæræ pondus, gradibus fere æqualibus iis quibus aqua illud denotat in barometro 32 pedum.

TAB. XXXII. Fig. 1.

Altera constructio partim similis est priori, sed multo melior est; detur tubus in medio incurvatus H M N, duæ in hoc tubo requiruntur pixides cylindricæ æquales K & M, quarum una, sc. K, quæ est ad tubi extremitatem, hermetice sit clausa superius, & M, quæ est paululum supra curvaturam, sit utrinque aperta in locis in quibus cum tubo jungitur; longitudo crurum determinata est per distantiam pyxi-

TAB. XXXII. Fig. 2.

 dum

dum K, M, quæ sit circiter $27\frac{1}{2}$ pollicum *, mensurando distantiam inter harum media. Altitudo cujusvis pyxidis est præterpropter unius pollicis cum semisse; diameter interior unius pollicis vel 15 linearum, diameter cavitatis reliqui tubi $\frac{1}{10}$ vel $\frac{1}{12}$ ejusdem magnitudinis. Primo infunditur solus Mercurius in tubum per aperturam N, ut fiat barometrum vulgare ex iis, quæ inferius recurvata sunt. Infundendum vel tollendum est Hydrargyrum donec superficies dentur circiter in medio pyxidum K & M, si tempore quo fit hæc operatio aër mediæ sit gravitatis, id est in barometris vulgaribus Mercurius sit ad altitudinem $27\frac{1}{3}$ pollicum; alioquin enim si pressio aëris sit major vel minor ordinariâ, ad hoc attendendum, computando pro uno pollice variationis, in vulgari barometro, lineam unam cum semisse variationis in quavis pyxide: Postquam Mercurius bene aëre depurgatus erit, ita ut nullus detur in pyxide K infundetur per aperturam N quidam liquor, qui hieme non congelatur, & qui nequit dissolvere Mercurium; E. G. aqua communis mixta cum $\frac{1}{8}$ aquæ fortis: spiritus vini quidem possidet has duas qualitates, sed non conveniret barometro, quia per calorem dilatatur. Hoc etiam referri debet ad primam formam Barometri.

Quod attinet ad liquoris quantitatem, debet illa adscendere ad pedem unum circiter in tubum B C positâ mediâ aëris pressione.

Dispositio ita hoc Barometro videbimus, maximam differentiam pressionis aëris, quæ notabitur per superficiem liquoris in tubo M N, fore propemodum 22 pollicum, si diametri pyxidum cylindricarum, sint decies majores diametro tubi. Et ut inveniamus quantum differentiæ quas indicatæ barometrum hoc nostrum excedant illas, quas potest indicare barometrum vulgare, generalis est regula, differentias nostri novi Barometri esse ad differentias Barometri vulgaris, ut decies & quater quadratum diametri pyxidum ad idem quadratum plus vicies octies quadratum diametri tubi, qui aquam continet; & hinc sequitur, cujuscunque magnitudinis sint pyxides, maximas differentias non posse excedere 28 pollices, quandoquidem differentiæ Barometrorum ordinariorum non excedunt duos pollices. Ut

* *Pollices hi sunt partes duodecimæ pedis. Regii Gallici.*

Ut transferatur commode hoc Barometrum, afferi adjungendum eft. vel Thecâ includendum; & notari debent in ligno divifiones æquales ad indicandas altitudinum differentias, quæ augebuntur eadem ratione, in quâ minuetur atmofphæræ pondus.

Sic parvæ mutationes, in pondere atmofphæræ, & quæ non percipiuntur in Barometris ordinariis, in his fenfibiles fiunt.

Exempli gratiâ fi ferantur in Turrim *de Noſtre Dame* vel *Montmartre* videbimus fuperficiem aquæ defcendere in primo Barometro quosdam pollices, & tantum in altero adfcendere; fi ferantur in domum elevatam tantum 50 pedes, & porro inde defcendamus, habebimus notabilem mutationem $\frac{1}{2}$ propemodum pollicis, ita ut poffimus ope hujus inftrumenti fatis bene menfurare diverfam altitudinem montium a fe invicem diffitorum, & regionum, quarum fitus non finit, ut has metiamur aliter. Si mutationes temporum ope Barometrorum, prævideri poffint uti fperandum videtur, certum eft, quod illa, quæ hoc modo conftructa funt, magnam utilitatem habebunt præ aliis, quæ adhibita funt huc usque.

Verum eft quod quædam novorum horum Barometrorum fenfibiliter quodammodo mutentur ex calore vel frigore aëris exterioris, quamcunque etiam adhibeamus operam ad illa interiori aëre purganda; fed Barometra ordinaria funt etiam eidem varietati obnoxia, & fi in noftris magis confpicua fit, hoc inde venit, quod multo majores differentias indicent, quam Barometra vulgaria: fed ut occurramus huic malo, quod plane nobis impedimento effet, fi vellemus metiri altitudines, poffumus Thermofcopium includere in parte Barometri aëre vacuâ, & efficere calefaciendo aërem, qui utrumque cingit, ut Thermometrum redeat ad eandem notam in utraque operatione; & hac viâ certi erimus, quod aër externus nullam inducat mutationem Barometro, & quod omnis varietas, quæ ibi apparebit, oriatur ex diverfâ atmofphæræ gravitate.

Dixi pofteriorem conftructionem alterâ meliorem effe, non

ſolum, quia ultimum Barometrum multo minoris voluminis eſt, ſed &, quia obſervavi, quod in priori parum aëris, quem aqua exhalat in vacuo, pedetentim augeatur temporis diuturnitate; cui vitio certum eſt Barometrum 32 pedum, de quo ſupra dixi, pariter obnoxium eſſe; Et, ut huic malo occurratur, quærendus eſt liquor, qui non producit aërem, ut faciunt aqua & ſpiritus vini. Sed patet, quod poſterius noſtrum Barometrum hoc vitio non laboret, quoniam aqua in vacuo non eſt incluſa: Quod ſi percipiamus aquam, quæ eſt in poſteriore Barometro, vapores emittere, tantum ſuperius infundenda eſt gutta olei, quod frigore non inſpiſſatur, quodque calore non emittit vapores, ut oleum amygdali dulcis.

V.

Nova vis movens mediante pulvere nitrato & aëre.

Deſideratum a longo tempore eſt artificium quo vis pulveris pyrii aliis, quam quibus huc uſque inſerviit, uſibus applicari poſſet, in quibus omnibus vis admodum ſubita requiritur, qualem obſervamus in exploſione bombardæ & ſclopeti & disruptione cuniculorum: ſi impetus ille promtus poſſet moderari & reduci ad vim magis placidam, maximam in mechanicis utilitatem haberet, & in multis occaſionibus, in quibus vim hominum, equorum, venti, aliarumque potentiarum adhibemus, inſerviret. Ad hunc effectum excogitavi machinam, hic delineatam. Hanc non propono, acſi in omnibus partibus perfecta foret, ſed tanquam inventum, quod cum pro parte ſucceſſit, poterit ad majorem proferri perfectionem.

TAB. XXXII. Fig. 3.

A A cylindrus cavus eſt, intus bene politus, & ubique æqualis magnitudinis; B eſt embolus in ſuperiori parte Cylyndri, & qui in hoc poteſt moveri; in C C cylindrus eſt perforatus duobus foraminibus, quorum diametri circiter ſunt $\frac{1}{4}$ diametri cylindri; tubi D, D, corii madidi & mollis, firmiter

miter alligati sunt duobus cylindris minoribus, qui cum majori cohærent, & circumdant foramina; tubus unus exhibetur pendens, alter extensus. In fundo cylindri cum hoc conjungitur ope cochleæ interposito annulo coriaceo pyxis H; ita ut exacte claudat apperturam cylindri; E E sunt retinacula, quæ cylindrum in inferiori parte conjungunt cum theca, qua includitur, sed quæ hic non est exhibita, ne turbetur figura: E F est funis annexus embolo B, circumponitur trochlea G, & inservit ad movendum id, quod ei applicatur.

Obtecto parvâ aquæ quantitate embolo, qui superius firmiter debet consistere, ne possit exire ex cylindro, immittitur in cistam H parum pulveris tormentarii cum parva quantitate igniarii Germanici accensi, & clauditur bene cista mediante sua cochleâ.

Pulvis ille paulo post accensus implet cylindrum flammâ & fugat aërem per tubos coriaceos C D, C D, qui extenduntur, quique statim clauduntur iterum ab aëre exteriore; ita ut cylindrus maneat aëre vacuus, saltem maximâ parte; porro embolus B est adactus per pressionem aëris, qui supra gravitat ad descendendum, & sic trahit funem F F pariter illud quod ei appenditur.

Quantitas ejus pressionis cognita est, & determinata, per gravitatem aëris, & per magnitudinem diametri emboli, qui, si sit unius pedis, ita premitur, ut sustineat pondus 1800 circiter librarum; posito, quod cylindrus totus fiat aëre vacuus, quod huc usque efficere non potui; etiam experimenta eo respectu in magnis & parvis cylindris non eodem modo processere.

Cylindrus diametri $2\frac{1}{2}$ pollicum, & 20 poll. longus, pondere 6 granorum pulveris aëre, evacuatus fuit $\frac{5}{6}$ partibus; in cylindro ejusdem latitudinis, sed longitudinis 44 poll, requiruntur 36 grana pulveris ut ejiciantur $\frac{4}{5}$ aëris; Et in cylindro diametri unius pedis, & $3\frac{1}{2}$ altitudinis, $1\frac{1}{2}$ drachma pulveris ad fugandum $\frac{1}{2}$ aëris; & duplicata pulveris quantitate vix magis evacuatus fuit cylindrus.

Aër

Aër vero ille qui ſupereſt in cylindro, impedit magnam partem effectus, quem exereret machina, ſi omnis aër prorſus exhauriretur; ut ſatis videre eſt, & ſimul determinari computatione poteſt. Ideo deberet examinari, quæ ratio inter altitudinem & diametrum cylindri ſit optima in hâc machina ad hanc maxime evacuandam adhibitâ minima quantum poſſet pulveris quantitate, nam licet totus cylindrus non evacuetur, vis hujus preſſionis nihilominus magnum ederet effectum.

Poterit hæc inſervire non tantum elevationi magnorum ponderum quorumcunque & aquarum. Sed etiam ad projicienda globos & ſagittas magna vi, juxta methodum baliſtarum veterum.

Ulterius, cum propter cylindri convexitatem, non ſit neceſſe, ut ſit valde ſolidus ad reſiſtendum preſſioni aëris externi, certum eſt totam machinam exigui ponderis eſſe poſſe, quæ levitas conjuncta cum magna vi, quam habet, poterit forte uſui eſſe ad effectus edendos quos huc uſque impoſſibiles duximus.

VI.

Demonſtratio Æquilibrii bilancis.

TAB. XXXII. Fig. 4.

In demonſtratione, quam Archimedes dedit de propoſitione fundamentali Mechanices, tacite ponit quid, de quo jure aliquo poſſumus dubitare; eſt autem hoc, ſi plura pondera æqualia annexa ſint libræ ad diſtantias æquales a ſe invicem; ſive omnia ſint ad eandem partem puncti ſuſpenſionis, ſive quædam transferantur ád patrem oppoſitam, ut in hac figura, ubi punctum ſuſpenſionis eſt A, pondera habere eandem vim ad deflectendam libram quam ſi forent omnia ſuſpenſa in puncto, ubi eſt commune eorum centrum gravitatis, ut hic eſt punctum B. adeo ut ſi ſeparatim ſuſpenſa in æquilibrio forent cum contrario pondere C, hoc etiam obtineret ſuſpenſis omnibus ponderibus in puncto B, vel eorum loco pondus D, quod æquat omnium gravitatem.

Qui-

Quidam Geometræ parumper mutando hanc demonstrationem tentarunt defectum minus sensibilem reddere, sed in totum fuisse sublatum mihi non videtur. Igitur conatus sum alio modo eandem propositionem demonstrare uti sequitur.

1°. Postulatur cum Archimede, duo pondera æqualia appensa extremitatibus brachiorum æqualium libræ fore in æquilibrio.

2°. Positis ponderibus æqualibus, & brachiis libræ, cui appensa sunt, inæqualibus, illam inclinari ad latus brachii longioris.

3°. Postulatur posse concipi, lineas & plana, de quibus loquimur in hac demonstratione, inflexilia & sine gravitate esse.

PROP. I. *Si super planum Horizontale quod imponitur lineæ rectæ, quæ id dividit in duas partes, applicetur pondus, vis, quam illud pondus habebit ad deflectendum planum partem versus ad quam applicatur erit major, quam si positum sit prope dictam lineam.*

Sit planum Horizontale A B impositum lineæ rectæ C D, & cui applicetur pondus E, cujus distantia a C D lineâ perpendiculari E H mensuratur; & cui porro applicetur idem pondus in F, ita ut distantia F H minor sit quam E H, dico, quod habebit plus virium ad planum deflectendum, si sit applicatum in E quam in F. TAB. XXXII. Fig. 5.

Nam producta recta E F H in G & positis H G & H F æqualibus; certum est, pondus æquale illi, de quo locuti sumus, applicatum in G in æquilibrio futurum cum altero in F, propter æqualia brachia F H, H G.

Sed pondus translatum ex F in E deflectet planum, quoniam plano existente sine gravitate effectus idem est ac in bilance brachiorum inæqualium quæ æqualibus ponderibus gravantur, idem ergo pondus positum in E plus virium habet ad planum deflectendum quam si est in F; Q. E. D.

PROP. II. *Si planum Horizontale, oneratum plurimis ponderibus, maneat in æqualibrio, impositum lineæ rectæ, quæ*

id secat in duas partes, centrum gravitatis plani sic onerati erit in ipsa lineâ rectâ.

TAB. XXXII. Fig. 6. Sit planum Horizontale A B oneratum ponderibus C C, D D & quod manet in æquilibrio, impositum rectæ E F; dico centrum ejus gravitatis esse in illa linea E F; nam posito, si fieri potest, centrum gravitatis esse alibi in puncto G, ducatur per id punctum recta H K parallela ipsi E F.

Tunc ergo, quia planum fultum in puncto G, manet in suo situ Horizontali, debent, ducta linea recta quacunque in plano per punctum G, pondera ad utramque partem lineæ esse in æquilibrio.

Idcirco pondera C C facient æquilibrium cum ponderibus D D, quando planum fulcitur a recta H K: id quod fieri nequit, quoniam manet in æquilibrio fultum a recta E F; nam patet, omnes distantias ponderum ad unam partem esse diminutas, scilicet ponderum C C, & consequenter etiam effectus gravitatis eorum; & distantias ponderum oppositorum D D esse auctas, & eodem tempore effectum eorum gravitatis, adeo ut ultima pondera deflexura sint planum ad suam partem, & multo magis si unum vel plura pondera C C sint ad alteram partem lineæ H K; Centrum ergo gravitatis plani onerati erit in linea E F. Q. E. D.

PROP. III. *Duo gravia commensurabilia appensa ad extremitates brachiorum Libræ erunt in æquilibrio, si brachia sint in ratione reciproca gravium.*

TAB. XXXII. Fig. 7. Sint gravia commensurabilia A & B, quorum A sit majus; & libra C D E, cujus brachium D E sit ad D C, ut grave A ad grave B; dico, libram esse in æquilibrio appenso A ad extremum C, & B ad extremum E, si C E sustineatur in D.

Concipiatur planum parallelum ad horizontem transiens per lineam C E, in eo plano sint ductæ per puncta E & C rectæ L E G, K C M perpendiculares ad C E; fiat ulterius E F æquale C D, & ducantur G F K, M D L quæ cum C E angulos semirectos efficiunt & sese mutuò ad angulos rectos secant in N; illæ lineæ necessario occurrunt duabus prioribus, quas duximus per E & C; ponamus pun-

ĉta

cta occursus esse G, K & M, L; manifestum est, E G æquale esse E F; & C K, C F; uti etiam G K, M L, se mutuo secare in medio in puncto N; & triangula G N L, K N M esse similia & æqualia: sumatur E H æquale E G, & C O æquale C K; tum, quia E D est ad D C ut pondus A ad B, patet quod lineæ E D & D C, sint commensurabiles, ut & H G & K O, cum inter se sint ut E F ad F C, id est ut C D ad D E. Sint ergo K O & H G divisæ in partes æquales per maximam earum communem mensuram, & quantitates A & B pariter divisæ; idcirco habebuntur tot partes ponderis A, quot habentur partes in linea K O, & tot partes ponderis B, quot habentur partes in linea H G, quæ partes ponderum, æquales inter se, sint singulæ appensæ in medio unius ex partibus linearum K O, H G.

Jam demonstrabimus, quod gravibus ita dispositis, planum maneat in æquilibrio, quando fulcitur a puncto D, unde veritas propositionis erit manifesta; quoniam concipere possumus omnes partes plani esse sublatas & solas lineas K O, H G, oneratas ponderibus æqualibus ipsis A & B, sustineri in extremitatibus libræ C & E, nam cum planum sit sine gravitate, partes sublatæ non possunt mutare æquilibrium.

Ad demonstrandum igitur, æquilibrium plani, ut dictum est gravati, dari in puncto D, sint ductæ ex quovis pondere perpendiculares ad lineam L M, quantum necesse est, productam, uti R S, Z I, T V, X Y. Perpendiculares T V & R S, quæ ducuntur a ponderibus maxime vicinis punctis G & K erunt inter se æquales; nam triangula G N L, K N M sunt æqualia & similia, uti dictum est, & latera G L & K M sunt etiam æqualia inter se, ut & intervalla G T & K R, quæ singula æqualia sunt dimidio unius ex partibus æqualibus in quas divisæ sunt lineæ H G, K O; unde patet lineas T V, R S, etiam fore æquales, uti dictum est; Tunc si fulciatur planum in linea L M Q, pondus T in æquilibrio erit cum pondere R.

Pariter, ob æqualitatem perpendicularium X Y & Z I, pondus X erit in æquilibrio cum pondere Z, & sic con-

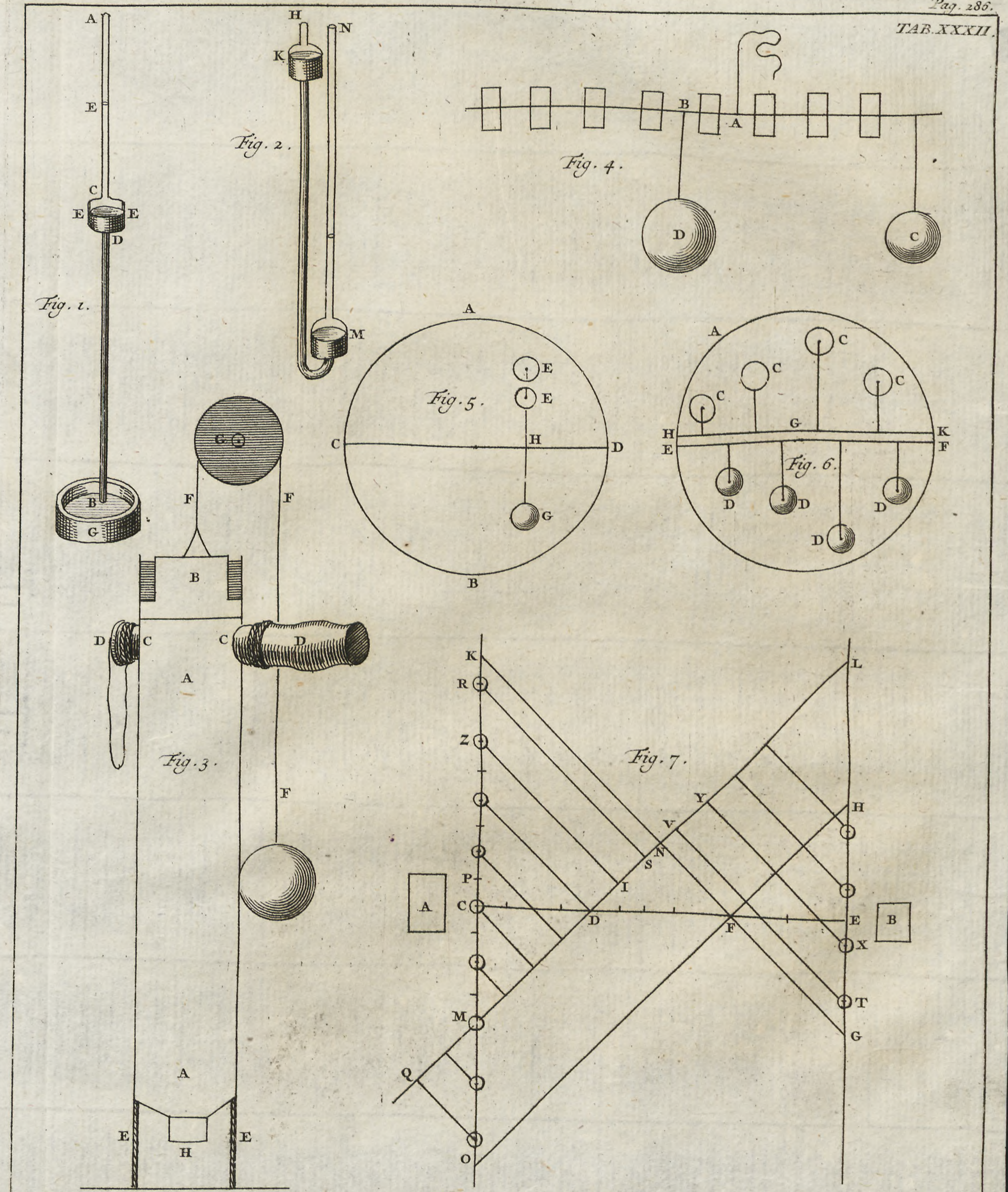
ſequenter omnia pondera lineæ G H cum tot ponderibus ſumtis poſt K in linea K O; id eſt, ſi ſumatur pars K P æqualis lineæ G H, pondera appenſa inter K & P, æquiponderabunt cum omnibus ponderibus lineæ G H.

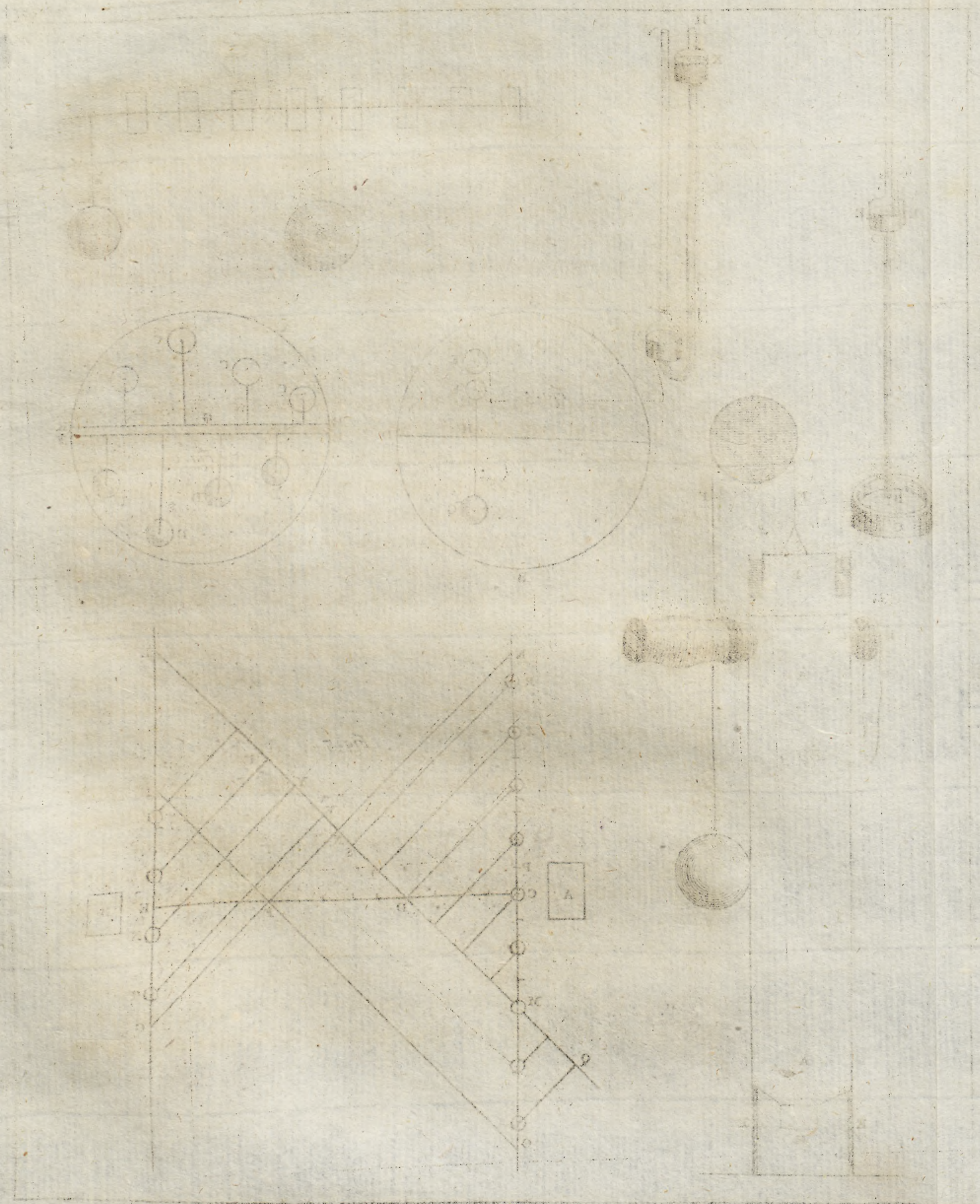
Si ergo pondera reliqua in linea P O etiam faciant æquilibrium unum cum altero in plano fulto a linea L M Q, ſequetur planum oneratum omnibus ponderibus manſurum in æquilibrio ſuper eandam illam lineam.

Æquilibrium autem ponderum reliquorum ita invenitur: cum ſit K O = 2 C F; & K P = H G, id eſt 2 C D, erit P O = 2 D F; ſed M O = D F; quoniam C M = C D; ergo M P eſt dimidium P O; Adeo ut lineâ P O, quæ continet numerum partium, quibus K O ſuperat H G, in 2 partes æquales dividatur per rectam L M Q, manifeſtum ergo eſt æqualem numerum ponderum illorum quæ continet illa linea P O dari ad partem utramque puncti M, & ſimiliter diſponi; ideo ſi numerus, illorum ponderum ſit impar, illud quod in medio eſt, erit in puncto M, unde ſequitur, ſingulas perpendiculares quas duximus ab iiſdem ponderibus ad lineam L M Q æquales eſſe ſibi reſpondentibus, & conſequenter pondera eſſe in æquilibrio, quando planum fulcitur a linea L M Q; quod cum ita ſit demonſtratum de aliis ponderibus linearum P K & H G, ſequitur planum cum omnibus ponderibus manſurum in æquilibrio fultum a linea L M Q; Centrum ergo gravitatis plani ſic onerati eſt in illa linea; ſed centrum gravitatis etiam eſt in linea C E, quoniam evidens eſt planum etiam futurum in æquilibrio ſi in hac linea ſuſtineatur, Erit ergo centrum gravitatis punctum commune illis duabus lineis L M Q & C E, ſcilicet punctum D in quo ſi planum ſuſtineatur manet in æquilibrio. patet ergo, veritas Theorematis.

VII.

TAB. XXXII.





VII.

De potentiis fila funesve trahentibus.

PROP. I. *Si punctum A trahatur a filis duobus A B, A C angulum B A C facientibus, sintque potentiæ trahentes ut filorum ipsorum A B, A C, longitudines multiplices secundum numeros datos N & O; juncta vero B C dividatur in E, ut sit reciprocè C E ad E B sicut numerus N ad O, & jungatur A E: dico filis A B, A C ita trahentibus, æquipollere filum A E tractum à potentia quæ sit ut longitudo A E multiplex secundum numerum æqualem utrisque N & O.* TAB. XXXIII. Fig. 1.

Producantur enim A B, A C ad F & G, ut sit A F multiplex A B secundùm numerum N, & A G multiplex A C secundùm numerum O; junctæque F G occurrat A E producta in H, & sint B K, C L parallelæ A H.

Quia ergo F H ad H K ut F A ad A B, hoc est, ut numerus N ad unitatem; H K vero ad H L ut B E ad E C, hoc est, ut numerus O ad numerum N: erit, in proportione turbata F H ad H L, ut numerus O ad unitatem, hoc est ut G A ad A C, sive ut G H ad H L. Itaque F H ad H L ut G H ad H L, ac proinde F H æqualis H G.

Sit jam A H continuata usque in P, ut sint æquales A H, H P, & jungantur G P, F P: eritque F A G P parallelogrammum, ad cujus diametrum P A ducantur F Q, G R, parallelæ B C. Manifestum igitur est fieri triangula similia & æqualia F P Q, G A R, quorum latera inter se æqualia P Q, R A. Est autem A E ad A R ut A C ad A G, hoc est, ut unitas ad numerum O. Eadem verò A E ad A Q ut A B ad A F, hoc est, ut unitas ad numerum N. Ergo erit A E ad utramque simul A Q, A R, sive A Q, Q P, hoc est, ad A P, ut unitas ad utrumque simul numerum N & O.

Cùm ergo potentiæ fila A B, A C trahentes, sint ut A F, A G, quibus æquipollet attractio per filum A E à potentia quæ sit ut A P, ex theoremate Mechanico satis noto, manifesta est propositi veritas.

PROP. II. *Datis positione quotlibet punctis; sive in eodem plano fuerint, sive non: si à puncto quod eorum commune est gravitatis centrum, ad unum quodque datorum fila extendantur, eaque singula trahantur à potentiis quæ sint inter se ut filorum longitudines, fiet æquilibrium manente nodo communi in dicto gravitatis centro.*

TAB. XXXIII. Fig. 2.

Sint data puncta A, B, C, D, E, quæ vel in eodem plano vel aliter utcunque collocata intelligantur: attributâ autem singulis æquali gravitate, constat commune eorum gravitatis centrum inveniri hoc modo.

Jungantur nempe duo quælibet datorum punctorum rectâ A B, quâ bifariam sectâ in F, erit hoc centrum gravitatis punctorum A, B. Ducatur deinde ad punctum aliud C recta F C quæ secetur in G, ut sit C G dupla G F; & erit G centrum gravitatis punctorum trium A, B, C. Rursus ducatur ad aliud punctum recta G D, seceturque in H, ut sit D H tripla H G, & fiet H centrum gravitatis punctorum quatuor A, B, C, D.

Similiterque ductâ H E ad punctum quintum E, sectâque in K, ut K E sit quadrupla K H, erit K centrum gravitatis punctorum quinque A, B, C, D, E. Ac simili ratione quotcunque punctorum centrum gravitatis invenire licebit.

Porro extentis filis à puncto K ad A, B, C, D, E, quæ trahantur singula à potentiis quæ sint inter se ut ipsæ longitudines K A, K B, K C, K D, K E: dico fieri æquilibrium manente nodo communi in K. Ducantur enim à centris gravitatis inventis F, G, H, ad centrum gravitatis omnium punctorum K, rectæ F K, G K, H K. Itaque constat filis A K, B K, punctum K trahentibus cum potentiis quæ sint ut longitudines eorum filorum, æquipollere filum F K, tractum à potentia quæ sit ut dupla longitudo F K. Rursus verò duobus his, filo F K trahenti cum potentia quæ sit ut dupla F K; & filo C K trahenti cum potentia quæ sit ut simplex longitudo C K, æquipollet filum G K tractum à potentia quæ sit ut tripla K G per præcedentem: ergo filum G K ita tractum æquipollet filis tribus K A, K B,

K G,

K C. Similiter verò duobus his, filo G K tracto à potentia quæ sit ut tripla G K, & filo D K tracto à potentia quæ sit ut simplex longitudo D K, æquipollet filum H K tractum à potentia quæ sit ut quadrupla H K. Ergo hoc æquipollet filis omnibus K A, K B, K C, K D, punctum K uti dictum est trahentibus. Atqui filo K H in directum opponitur filum K E tractum à potentia quæ est ut longitudo K E, id est ut quadrupla K H. Ergo cum filis K E, K H, in partes directè oppositas trahentibus cum potentiis æqualibus, punctum K necessario in locum suum servatum sit, sequitur & filis K A, K B, K C, K D, uti dictum est trahentibus & ex alia parte filo K E nodum restare immotum. Quod erat demonstrandum.

Possunt autem & binorum quorumque punctorum centra gravitatis primò designari, & per hæc deinceps centra gravitatis quaternorum, & per hæc octonorum & sic porro; qua ratione simplicior plerumque efficitur demonstratio, ac præsertim si datorum punctorum numerus fuerit pariter par.

TAB. XXXIII. Fig. 3.

Ut si quatuor data fuerint A, B, C, D; sive in eodem plano, sive non: junctis A B, C D, divisisque bifariam in E & F; ductâque inde F E, quæ rursus bifariam secetur in G; constat G esse centrum gravitatis punctorum A, B, C, D. Quod si jam nodus G trahatur filis G A, G B, G C, G D, à potentiis quæ sint inter se ut hæ ipsæ filorum longitudines; dico fieri æquilibrium.

Constat enim filis G A, G B, æquipollere filum G E tractum à potentia quæ sit ut dupla G E; filis verò G C, G D, æquipollere filum G F tractum à potentia quæ sit ut dupla G F. Cum ergo G E, G F æquales sint, unamque lineam rectam efficiant, eodem modo nodus G trahitur, ac si traheretur à potentiis æqualibus per fila G E, G F. Unde immotum manere necesse est.

Constat verò si puncta A, B, C, D non sint in eodem plano, fore G centrum gravitatis pyramidis cujus anguli hæc ipsa quatuor puncta; cum in omni pyramide idem sit centrum

trum gravitatis ipsius solidi & quatuor punctorum angularium, uti ostendere facillimum est. Et hinc patet veritas theorematis Robervalliani, *Si à centro gravitatis pyramidis fila tendantur ad quatuor angulos, quæ trahantur à potentiis quæ sint inter se ut filorum ipsorum longitudines, fieri æquilibrium manente nodo in dicto gravitatis centro.*

VIII.

Solitio problematis a G G. Leibnitio propositi in diario (cui titulus Nouvelles de la Republique des Lettres) *mensis Sept.* 1687.

PROBLEMA.

Detegere lineam juxta quam si corpus descendat temporibus æqualibus æqualiter tellurem versus accedat.

SOLUTIO.

Impossibile est problema si requiratur ut corpus motum in tali linea inchoet a quiete.

TAB. XXXIII. Fig. 4.

Sed si ponamus corpus quandam, quantumvis exiguam, velocitatem habere ex. gr. quam acquirit cadendo ab altitudine A B, quæsito satisfacit curva B C, cujus hæc est proprietas ut cubus altitudinis B D æqualis sit quadrato perpendicularis C D ad A B continuatam ducto in $\frac{8}{9}$ A B.

Præter curvam hanc B C, in numeræ aliæ dantur ejusdem generis, & quæ facile deteguntur, in quibus corpus etiam, temporibus æqualibus, æqualiter, sed lentius quam per B C, ad Tellurem accedit.

Si B D sit dupla ipsius B A, tempus descensus per curvæ partem B C aquale erit tempori casus per A B.

H. D. Z.

IX.

IX.

Christiani Hugenii, Solutio Problematis de linea in quam flexile se pondere proprio curvat.

Si Catena C V A suspensa sit ex filis F C, E A utrinque annexis, ac gravitate carentibus, ita ut capita C & A sint pari altitudine, deturque Angulus inclinationis filorum productorum C G A, & catenæ totius positus, cujus vertex sit V, axis V B. TAB. XXXIII. Fig. 5.

1. Licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenæ puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata L H dividat æqualiter axem B V. Jam si angulus C G A sit 60°, erit inclinanda a puncto A ad axem recta A W, æqualis $\frac{1}{2}$ A B, cui ducta parallela L R, tanget curvam in puncto L. Item si latera G B, B A, A G sint partium 3, 4, 5, erit A W ponenda partium $4\frac{1}{2}$.

2. Invenitur porrò & recta linea catenæ æqualis, vel datæ cuilibet ejus portioni. Semper enim dato angulo C G A, data erit ratio axis B V ad curvam V A. Velut si latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit curva V A tripla axis V B.

3. Item definitur radius curvitatis in vertice V, hoc est, semidiameter circuli maximi, qui per verticem hunc descriptus totus intra curvam cadat. Nam si angulus C G A sit 60°, erit radius curvitatis ipsi axi B V æqualis. Sin vero angulus C G A sit rectus, erit radius curvitatis æqualis curvæ V A.

4. Poterit & circulus æqualis inveniri superficiei conoidis, ex revolutione catenæ circa axem suum. Ita si angulus C G A sit 60°, erit superficies conoidis ex catena C V A genita æqualis circulo, cujus radius possit duplum rectangulum B V G.

5. Inveniuntur etiam puncta quotlibet curvæ K N, cujus evolutione, una cum recta K V, radio curvitatis in verti-

ce, curva V A describitur; atque evolutæ ipsius K N longitudo. Velut si angulus C G A fuerit 60°, erit K N tripla axis B V. Si vero latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit illa $\frac{5}{4}$ axis B V.

6. Præterea spatii N K V A N quadratura datur. Posito enim angulo C G A 60°, erit spatium illud æquale rectangulo ex axe B V, & ea quæ potest triplum quadratum ejusdem B V. Si vero latera G B, B A, A G sint ut 3, 4, 5, erit idem spatium æquale septuplo quadrato B V, cum parte octava.

7. Porro puncta quotlibet catenæ inveniri possunt, posita quadratura curvæ alterutrius harum: $xxyy = a^4 - aayy$, vel $xxyy = 4a^4 - x^4$. Vel etiam data distantia centri gravitatis ab axe, in portionibus planis, quas abscindunt rectæ axi parallelæ in curva harum priore. Quadratura autem hujus curvæ pendet a summis secantium arcuum per minima æqualiter crescentium: quæ summæ ex Tabulis sinuum egregio quodam adhibito compendio inveniuntur quamlibet proxime. Hinc ex. gr. inventum, quod si angulus C G A sit rectus, & ponatur axis B V partium 10000; erit B A, 21279, non una minus. Curva autem V A, per superius indicata cognoscitur hic esse partium 24142, non una minus.

In his omnibus non nisi ad casus singulares solutiones problematum dedi, vitandæ prolixitatis studio & quoniam non dubito quin regulas universales Viri docti affatim sint exhibituri. Quod si tamen aliquæ ex nostris requirentur, eas lubenter mittam. Ac jam pridem omnes apud Clarissimum Virum *G. G. Leibnitium* involucro quodam obtectas deposui.

X.

Hugenii Annotationes in librum Parisiis 1689. editum, de Manuaria Nautica.

Auctor hujus libri est D. Renaldus (*M. Renau, Ingenieur general de Marine*), summa cura & methodo conscriptus est, &

& auctoris peritia in Geometricis, & analysi in hoc patet; nulla ponuntur principia, quæ vera non fatear, & integra si Theoria inde legitime deducta foret, nihil in opere culpandum esset; hoc tamen deficiente, utile credidi de notabili quem notavi errorem, monere, cum enim spectet ad maximam partem regularum, quæ in hoc libro Nautis præscribuntur posset hos in maximos, & periculosos admodum errores inducere.

Initium faciam memorando quæ in Art. 1. cap. 2. continentur, in quo Auctor navem H B M ponit, in qua linea recta D C Veli positionem repræsentat, quod tanquam plana superficies concipitur, perpendiculariter super istam lineam elevatam; A B est directio venti qui velum propellit; B G est perpendicularis ad D C; G K est perpendicularis ad B K, carinam navis productam; G E A est arcus circuli centro B descripti; B K G est circuli peripheria cujus Diameter est B G.

TAB. XXXIII. Fig. 6.

Verissimum est quod Auctor notat, superficiem C D a vento A B propelli juxta lineam B G, ita ut navis per B G ad punctum G tenderet, si nullibi magis quam ad proram aqua resisteret. Addit, navem istam lineam percurrendo directe progredi per B K, & ad latus per K G; sed cum navis majori difficultate aquam lateribus, quam prorâ secet, non poterit juxta directionem K G per integram hanc lineam progredi, sed deerit pars, quæ sequetur rationem excessus quo difficultas secandi aquam ad latus superat difficultatem qua navis hanc prorâ secat; ex. gr. si difficultas secandi aquam ad latus se habeat ad difficultatem qua prora illam secat ut decem ad unum, si fiat K G ad K L ut 10 ad 1, & ducatur B L, dicit Auctor navem moveri per B L, hancque lineam percurrere eo tempore quo potuisset in G pervenire, si resistentia ab omni parte fuisset æqualis.

Auctorem huc usque nos fuisse secutos sufficiat. Contendo ipsius errorem in eo dari, quod dicat navem pervenire ex B in L *eodem tempore*, quo pervenisset ex B in G. Nam si deviatio nullam esse ponamus, ut ambages removeantur, certissimum est navem, juxta Auctorem, progredi

ex B in K, eodem tempore, quo pergeret ex B in G, si undequaque aquam eadem facilitate secaret, aut directe per B G, æque ac per B K progrediretur.

In his sic ratiocinatum fuisse auctorem videtur, scilicet, si in motu ex B in G, navis feratur ad latus per K G & directe progrediatur per B K, oportet, ut sublato motu per K G, motus per B K supersit, quo motu linea B K percurrebatur eodem tempore quo B G.

Sed notandum erat, licet motus navis per B G possit concipi tanquam compositus ex motibus per B K, & K G, inde non sequi si in re ipsa tantum supersit motus per B K (sive figura ipsius navis in causa sit, sive hæc cohæreat cum fune infinito B R, perpendiculari ad B M) ventum qui navem ex B in G transtulisset, hanc æquali tempore posse transferre ex B in K. Ut enim determinemus viam juxta B K percursam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad resistentiam quam ex actione aquæ patitur navis.

Constat autem in Mechanicis, vim, qua velum D C, navem pellit per B K, esse ad vim qua idem velum, & in eadem positione respectu venti, illam pelleret per B G, uti B K ad B G: ut Auctor ipse ponit in his, quæ scripsit de impressionibus aquæ in gubernaculum Art. 5. hujus secundi Cap. Sed celeritates quoque essent sicuti B K ad B G; quia ponit Auctor lineas æqualibus temporibus percurri. Vires ergo forent ut celeritates, quod impossibile est, dictisque Auctoris repugnat in 13° Art. primi Cap. ubi dicit, *ut corpus diversis velocitatibus in fluido moveatur, requiri vires in ratione quadratorum celeritatum:* lineæ ergo B K, B G, non percurruntur æquali tempore. Ut autem determinetur, spatium juxta B K percursum continuanda est B K in S, ita ut B S sit media proportionalis inter B K, B G. Tum B S erit spatium, quod eo tempore permeabit navis quo pergeret per B G; si aquam juxta hanc directionem eadem facilitate secaret. nam quadrata celeritatum per

B G,

B G, & B S, & consequenter etiam aquæ resistentiæ sunt inter se ut B G ad B K; ast, uti modo ostendi, virium ratio est etiam ut B G ad B K; vires igitur sunt ut resistentiæ, & etiam ut quadrata velocitatum. Hæ ergo sunt velocitates, quæ sunt ut B G ad B S, quas Navis in ambobus motibus acquirere debet secundum ipsam Auctoris statim memoratam, nec in dubium revocandam, regulam. Non ergo ut credidit Auctor circumferentia circuli B K G determinat spatia a navi permeanda in diversis carinæ positionibus, manente eadem veli C D positione respectu directionis venti, sed determinantur hæc spatia curvâ B I S G T, cujus puncta eodem modo ac S, facile inveniuntur. Hic autem notandum est, spatia quæ hac curvâ deteguntur, eo magis ab iis differre, quæ Auctor adhibitâ circumferentiâ B K G determinat, quo angulus quem carina cum venti directione efficit acutior est; ita juxta B N navis progredietur per B I, quæ dupla est ipsius B N circulo inscriptæ, si B N sit $\frac{1}{4}$ B G; & tripla si B N sit $\frac{1}{9}$ B G.

Error a me notatus in toto fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur Theoremata quæ de cætero elegantia videntur. Quale est inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, carinæ situm, quo in adversum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati; unde Auctor deducit, ponendo quod deviatio nulla sit, carinæ & veli situm in hoc casu omnium maxime utilem dari, quando angulus quem carina cum vento efficit est 60 gr., & angulus venti cum velo 30 gr., quod a vero abest; nam per Regulam, quam veram novi detego, quando venti & carinæ angulus est graduum 60, navem celerius moveri, ideoque in adversum venti magis progredi, si angulus veli & venti 38 gr. 23′. fiat, quam si angulus hicce foret 30 graduum. Regula qua detego veli situm, ut navis omnium celerrime moveatur, ubi carinæ cum vento angulus datus est, talis est $x^4 = aaxx + \frac{1}{3}ppxx - \frac{4}{9}aapp$. scilicet, si x designat sinum O Q anguli veli cum vento, a radius B A, p sinus F P anguli carinæ cum vento. Et congruit hæc regula cum illa quam

D. Fatio antea invenit, cum aliis pulcherrimis circa hanc materiam, ut percepi in tabula quadam, in qua quorundam istorum angulorum rationes designarat. Duas veras radices continet æquatio hæc inservientes duobus casibus, in quibus carina cum venti linea eundem angulum efficit, utpote, quando navis vento secundo aut adverso utitur.

Cæterum quin vera sit nostra regula non poterit, D. Renaldus dubitare, cum per eam angulus gubernaculi cum carina, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem determinavit in capite 7°. Quod ipsius inventum certe utilissimum est. Ponendo enim $p = a$, id est ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, nostrâ regulâ habetur $x = \sqrt{\frac{2}{3}aa}$, quem ille detexit sinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod sic necessario sese habere facile patet.

Licet Theoria hæc post a me indicatam correctionem difficilior evadat, quam in tractatu Dni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi posse, qua & navis & veli situs determinarentur, ut in adversum venti omnium maxime progrediatur, sed computatio nimium longa foret, quare hanc nunc non aggredior. Quibus addendum navis deviationem in hac computatione non considerari, ex qua consideratione maxima daretur difficultas. Quia non modo cum auctore attendendum est ad relationem inter resistentias quas patitur navis proram versus & ad latus, sed etiam ad actionem venti in ipsam navem, præcipue in hujus latus; ita ut ex unica observatione quæ ad deviationem spectant non possent deduci.

X I.

Responsum Dni Renaldi ad Dominum Hugenium.

Dnus Hugenius hæc ponit, *licet motus navis per B G possit concipi tanquam compositus ex motibus per B K & K G, inde non sequi, si re ipsa tantum supersit motus per B K, ventum, qui navem ex B in G transtulisset, hanc æquali tempore posse trans-*

transferre ex B in K. Et primo in eo mihi videtur falli. Nam ut navis possit ferri ex B in G tempore determinato, necesse est ut reapse celeritatem habeat, quâ eodem tempore secundum determinationem B K, lineam B K, & secundum determinationem K G, lineam K G possit percurrere. Et ne hoc in dubium vocari possit, concipiamus navim pelli secundum determinationem B K, vi quâ certo tempore ex B possit pervenire in K; concipiamus eandem simul pelli secundum K G, vi quâ eodem tempore possit percurrere lineam K G: cum duæ hæ vires nec sibi contrarientur nec etiam concurrant (est enim B K perpendicularis ipsi K G) necesse est ut harum unicuique navis ex toto obsecundet; & per consequens celeritas, quam singulis momentis habebit secundum B K, erit ad celeritatem, quam iisdem momentis habebit, secundum K G, ut B K ad K G; & ita navis utrique vi satisfaciens, movebitur per B G, & tempore determinato perveniet in G; Et ideo si in effectu ipsi relinquatur solus motus per B K, vis quæcunque, quâ pelleretur ex B in G, illam tempore æquali pellet ex B in K. Inutilem enim reddendo illam impressionis partem, quæ requiritur ut eodem tempore navis percurrat K G, neque augetur, ut diximus, neque minuitur celeritas per B K. Fateor, si angulus B K G esset acutus, vim peculiarem quâ pelleretur navis secundum K G, aliquid detracturam celeritati, quam haberet secundum B K utpote sibi contrariæ; & contra, si angulus B K G foret obtusus, eandem celeritatem utpote cum altera concurrentem, esse augendam; sed cum angulus B K G rectus sit, vis illa celeritatem navis secundum B K neque auget, neque minuit.

Addit D^nus Hugenius; *Ut enim determinemus viam juxta B K percursam, vim propellentem debemus determinare, & attendere ad resistentiam quam ex actione aquæ patitur navis.* Statim ostendi relationes celeritatum in variis determinationibus sibi invicem perpendicularibus, sufficere ad detegendam viam, quam navis est secutura; nec per consequens ad id requiri relationem virium, nec resistentiarum; sed cum dictæ celeritates à viribus dependeant, idem ex rela-

relatione virium facile probabo.

Demonſtravi Articulo 13° Cap. 1. Theoriæ manuariæ nauticæ, de quo Articulo Dnus Hugenius mecum conſentit, vires navem propellentes eſſe inter ſe ut quadrata velocitatum; & propterea vis requiſita, ut navis certo tempore ſecundum determinationem B K conficiat B K, eſt ad vim, quâ ſecundum determinationem K G conficiat K G, ut quadratum B K, ad quadratum K G; unde ſequitur, navem, ſi ſecundum duas illas determinationes ſimul pelleretur, habituram vim duabus illis viribus æqualem; cum ſcilicet neutra neutri quicquam vel addat vel detrahat; per conſequens vis illa exprimetur per quadratum ipſius B G, quod æquale eſt quadratis B K & K G; & ita navis habebit celeritatem ex illa vi ortam, id eſt, dicto tempore quantitatem B G peragrabit. Et propterea, ſi navis pelleretur ſecundum B G, vi quæ exprimitur per quadratam B G, perveniret in G eodem tempore, quo perveniret in K, ſi pelleretur ſecundum B K, vi quam exprimit quadratum B K.

Pergit Dnus Hugenius hoc modo; *Conſtat autem in mechanicis, vim, quâ velum D C pellit navem per B K, eſſe ad vim, quâ idem velum, & in eadem poſitione reſpectu venti, navem pelleret per B G, ut B K ad B G.* Non ego fateor id ex regulis Mechanices ſequi; è contra certum eſt, virium illarum relationem inter ſe eſſe ut quadratum B K ad quadratum B G, non vero ut B K ad B G; & ut omne hic dubium eximatur, concipiamus aërem ſecundum lineam A B duplo citius moveri uno tempore quam altero. Quando duplo citius movebitur quadruplo fortius in velum impinget, quoniam unaquæque particula duplo fortius impingit propter velocitatem duplam, propter quam etiam duplo plures particulæ eodem tempore impingunt. Quare ſi velocitas ſit dupla, & maſſa itidem dupla, vis ſeu potentia eſt quadrupla. Si tripla foret velocitas, unaquæque particula triplo fortius impingeret, quia tripla eſſet velocitas; & ſimul quia tripla eſſet velocitas, triplo plures par-

particulæ ſimul impingerent; unde triplâ exiſtente velocitate, maſſâ etidem triplâ, potentia aut vis erit noncupla; ex quo patet maſſam augeri in eadem ratione, qua velocitas augetur; & cum unaquæque pars etiam fortius impingat in ratione auctæ velocitatis, potentia aut vis venti in velum, eſt in ratione duplicata celeritatum venti, id eſt, in ratione quadratorum velocitatum venti in velum. Agnoſcit hocce principium Cl. Hugenius; reſtat ergo tantum, ut illud applicemus.

Prima applicatio oſtendet, quare vis venti in velum, cum ventus velo perpendicularis eſt, ſeſe habeat ad vim ejuſdem venti in velum, quando illud inclinatum vento opponitur, ut quadratum radii ad quadratum ſinûs anguli incidentiæ; aut, quod idem eſt, cur vires ejuſdem venti in vela varia inclinatione ipſi obtenſa, ſint inter ſe in ratione quadratorum ſinuum angulorum incidentiæ, quod demonſtravi Articulis 7. 8. & 9. Cap. 1., & quod etiam hoc modo nunc demonſtro. Probatum dedi in Theoria Manuariæ Nauticæ, Artic. 6. Cap. 1. corpus motum ab A in B non occurrere ſuperficiei C D niſi ſecundum determinationem ſuam A V, ponendo ſcilicet A V perpendicularem ipſi D C productæ, & in illam ſuperficiem nullam vim exſerere niſi ſecundum hanc determinationem; quod agnoſcit D^nus^ Hugenius. Hoc poſito, ventus A B in velum non agit, niſi ſecundum hanc determinationem, id eſt, cum velocitate A V. Si velum C D vento A B perpendiculare eſſet, ventus in velum ageret velocitate A B; & per conſequens ex principio quod ſtatim adſtruxi, vis cum qua ventus in velum ageret, ſi vento eſſet perpendiculare, eſt ad vim venti in velum D, quod inclinatè vento obtenditur, ut quadratum A B ad quadratum A V, id eſt, ut quadratum radii ad quadratum ſinûs anguli incidentiæ.

Secunda applicatio inſervit ſolvendæ quæſtioni, de qua lis eſt inter D^num^ Hugenium & me, id eſt oſtendit, quod, velo conſtituto in ſitu C D, & navi in ſitu B K, vis, qua ventus ope veli, navim ſecundum B G propellit, ſit ad vim, qua idem ventus, ope ejuſdem veli navim propellit ſecun-

dum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K, & non quemadmodum ſuſtinet Hugenius, ut B G ad B K.

Quod ut pateat, concipiamus ventum in velum impingere cum velocitate B G; quoniam in illud impingit ſolummodo per motum, qui dirigitur ſecundum B G ſpectandus eſt ventus, tanquam latus ex B in G velocitate B G. ſed quando illa velocitate fertur ex B in G, fertur velocitate B K ſecundum determinationem B K, & velocitate K G ſecundum determinationem K G; quare ex iis quæ ſuperius a me dicta ſunt, vis qua navis pellitur ſecundum B G eſt ad vim qua pellitur ſecundum B K, ut quadratum B G ad quadratum B K; & ad vim, qua pellitur ſecundum K G, ut quadratum B G ad quadratum K G. Obſervandum autem eſt, eandem vim venti in velum, id eſt, vim totalem ſecundum B G, quam vim exprimit quadratum B G, diviſam eſſe ſecundum B K, & K G, in duas partes, quarum ſumma vim totalem adæquat; & illa vis, potentia, ſeu motus, quibus tribus una eademque res ſignificatur nominibus, nullum vel augmentum vel imminutionem accipit, ex noſtris motum conſiderandi modis, qui motus non in ſola corporum velocitate conſiſtit, ſed ex eorundem maſſis quoque conſtituitur. Ergo potentia, vis, ſeu motus, eſt productum quadrati celeritatis per maſſam. Quare potentia ex duabus aliis potentiis conflata, iis æqualis eſt, dummodo unius determinatio determinationi alterius ſit perpendicularis, quia eo in caſu duæ illæ potentiæ, nec quicquam addere, nec detrahere quicquam altera alteri, poſſunt, duabus determinationibus, uti diximus, nihil oppoſiti habentibus. Inde fit ut potentia ſecundum B K eadem manere poſſit, idemque per conſequens illius effectus, licet in infinitum augeatur ſeu minuatur potentia ſecundum K G. Eo in caſu ſola potentia totalis B G mutationem patietur, quia ſemper æqualis erit ſummæ potentiarum, ex quibus producta fuerit.

Ex omnibus, quæ a me nunc dicta ſunt, ſequitur, navem H B M, ſi pellatur ſecundum B G ope veli D C, & ſi

ſi velocitas, quâ movetur ad latus, ſit ad velocitatem quâ directè progreditur, ut G K ad L K, ſequitur, inquam, navem juxta B L proceſſuram, & in L perventuram eodem tempore, quo perveniſſet in G, ſi ab omni parte aquas ſecaret eadem facilitate, quâ ſecat has à parte proræ; & ſi, quemadmodum poſuit Dnus Hugenius, navis fune B R infinite longo, & ipſi B K perpendiculari adſtringeretur, ad tollendum omnem motum ſecundum determinationem K G, ſequeretur etiam perventuram navim ad punctum K eodem tempore quo perveniſſet ad punctum G; quod erat in quæſtione, & quod erat demonſtrandum.

Si vera foret mechanices regula, quam memorat Dnus Hugenius, ſcilicet vim cum qua velum D C navim propellit ſecundum B K eſſe ad vim, cum qua idem velum navem ſecundum B G propellit, ut B K ad B G, non ſolum navis non perveniret in K eodem tempore, quo perveniſſet in G, poſitis circumſtantiis, de quibus ſupra, ſed & navis aquam æqualiter ab omni parte ſecans, & a velo D C, ſecundum B G ipſi perpendicularem propulſa, non ferretur juxta lineam B G: nam ex eadem mechanices regula, vis, qua ferretur navis juxta B K ope veli, foret ad vim qua ferretur ſecundum K G, ut B K ad K G, & velocitates navis eſſent inter ſe ut radices virium. Ergo velocitates quæ ex illis viribus orirentur, ſcilicet velocitas quam ſingulis momentis acquiſiviſſet navis in motu juxta B K, eſſet ad velocitatem quam iiſdem momentis haberet ex motu juxta K G, ut radix B K ad radicem K G. Sed ut navis moveatur ſecundum B G, quando inæquales ſunt velocitates inter ſe, quales hic a nobis ponuntur, requiritur, ut ſint inter ſe ſingulis momentis, ut B K ad K G, & non ut eorundem radices. Ergo navis non ferretur juxta B G, quod eſt abſurdum; nam cum vis totalis, quæ navem impellit, ſit juxta B G, ponendo navem ab omni parte æqualiter aquam ſecare, non poteſt non illam lineam ſequi.

Ita pergit Cl. Hugenius, *Error à me notatus in toto*

 fere

fere tractatus reliquo locum habet, quo varia labefactantur theoremata, quæ de cætero elegantia videntur. Quale est inter alia hoc. Dato O B A angulo veli cum vento, Carinæ situm, quo in adversum venti maxime progreditur navis, determinari dividendo æqualiter in duas partes complementum O B E anguli dati. Unde Auctor deducit &c.

Siquidem, quem errorem credidit D^nus Hugenius, errorem non esse ostenderim, intacta remanent tractatus mei theoremata.

Addit; *Cæterum, quin vera sit nostra regula non poterit dubitare D^nus Renaldus; cum per eam angulus gubernaculi, quo navis omnium celerrime circumvolvitur, idem detegatur, quem Cap. 7. determinavit. Quod certe ipsius inventum utilissimum est. Ponendo enim* $p = a$, *id est ponendo venti lineam ad carinam perpendicularem, nostrâ regula habetur* $x = \sqrt{\frac{2}{3}aa}$, *quem ille detexit sinum anguli carinæ aut directionis motus aquæ cum gubernaculo, quod sic necessario sese habere facile patet.*

Et hic à D^no Hugenio dissentire cogor, & ab ipso meo consequenter tractatu, in quo error datur maximus, statim à me, detectâ prius ingenue ejusdem causâ, ostendendus. Composueram primo librum meum, pro vero ponendo principium falsum, à P. Pardies, art. 118. scientiæ virium motricium prolatum; præter quod nil continet de navis motu tractatus illius, & quod nec ipsum ulli rei applicatur; imo nullam auctor viam aperit solvendi vel unam, quæ spectat theoriam Manuariæ Nauticæ, propositionem. Cum jam sub prælo sudarent ultimæ libri I. paginæ; principii memorati falsitatem animadverti, & quoniam per omnes tractatûs propositiones dispersum, falsas reddebat resolutiones omnes, totam editionem suppressi. Solidiori postea fundamento nixus easdem denuo solvi, præloque subjeci, hæ sunt quæ in lucem sunt editæ. Sed aliis distentus negotiis, vocem *vis*, loco *velocitatis*, quæ erat substituenda, in demonstratione Art. 5. Cap. 2. incogitanter reliqui; quod D^nus Hugenius non attendit. Fateor me, in Art. 6. Cap. 1. promiscue vocibus *virium* & *velocitatum* uti, sed unius tantum corporis in vacuo motum

ibi

ibi considero, & in eo casu velocitas & vis eandem semper relationem habent. Capitis autem 7. errorem, post alteram tantum libri mei editionem animadverti, neque tunc illum corrigere per negotia mihi licuit. Falsitatem vero ita demonstro.

TAB. XXXIII. Fig. 7.

Centro B describatur circulus A D R E C, & repræsentet linea A B carinam navis, B R vero carinam productam. Supra B R, tanquam diametrum describatur semicirculus B G R, & similiter supra A B semicirculus A V B. Sit B D certus gubernaculi situs, & B C gubernaculum productum; B E perpendicularis supra A B; B G & A V perpendiculares supra D C; & G H perpendicularis ad B E. Ponendo alium gubernaculi situm, qualis est B *d* producta in *c*; ducantur in iisdem circumstantiis lineæ B *g*, A *u*, & *g h*. Si navis antrorsum moveatur secundum lineam B A, anguli A B C, & A B *c* æquales angulis G B E, & *g* B E, sunt anguli incidentiæ aquæ in gubernaculum. Unde sequitur, aquam, posito gubernaculo in situ B D, impingi secundum determinationem & cum velocitate A V, & per consequens cum vi, quam exprimit quadratum ipsius A V. Et quoniam velocitas navis sese habet tantum ut radix ipsius vis, propter aquæ resistentiam, propellitur navis secundum determinationem B G, velocitate quæ exprimitur per B G, quia B G est æqualis & parallela ipsi A V. Sed quando propellitur navis secundum B G velocitate B G, propellitur secundum B E velocitate B H. Si gubernaculum foret in alio situ B *d*, iisdem ratiociniis probaretur, navem pellendam fore secundum B E velocitate B *h*. Sed quando majori velocitate navis pellitur secundum B E, citius etiam convertitur. Quare si B G, quæ perpendicularis est ad gubernaculi situm, secet semicirculum B G R bifariam, id est, si angulus G B E, æqualis angulo incidentiæ A B C, sit 45. graduum, G H perpendicularis ipsi B E, erit tangens semicirculi. Ergo G H quæ exprimit celeritatem, quâ navis pellitur secundum B E, est omnium maxima. Nam si gubernaculum constituatur in alio situ, ut in B *d*, tunc B *g* ipsi perpendicularis, secabit

ſemicirculum in *g*, unde ſi ducatur perpendicularis *g h*, erit illa propior puncto B, quam ipſa G *h*, & navis pelletur ſecundum B E velocitate B *h*, quæ minor erit quam B H. Quare, ut navis citiſſime convertatur, neceſſe eſt ut *vectis* gubernaculi B C cum carinâ navis faciat angulum 45. graduum, non autem, ſicut Cap. VII. Theoriæ dicitur, angulum graduum circiter 55.

Concludit Cl. Hugenius hiſce verbis, *licet theoria hæc poſt indicatam à me correctionem difficilior evadat, quam in tractatu Dni Renaldi, percipio nihilominus regulam detegi poſſe, qua & navis & veli ſitus determinarentur, ut in adverſum venti omnium maxime progrediatur, ſed computatio nimium longa foret quare hanc nunc non aggredior.*

TAB. XXXIII. Fig. 8. In meo certe tractatu facillima foret determinatio ſitûs navis velique, non tantum ſi in adverſum venti omnium maxime ſit progrediendum, ſed & conveniens cuicunque viæ inſtituendæ, ſi deviatio navis à calculo ſecluderetur; quod ut pateat, ſit linea venti A B, & ſit data via B K, cum vento conſtituens angulum quemcunque A B K. Ut inveniatur, quo veli ſitu, navis illâ viâ citiſſime poſſit progredi, ſi ſcilicet nulla ſit deviatio; ſumatur B R tanquam diameter, & centro M deſcribatur ſemicirculus B G V; ab eodem puncto M ducatur M G viæ B K parallela; a puncto B ad punctum G ducatur B G, & tandem ducatur D B C perpendicularis ipſi B G. Dico D C repræſentare veli ſitum, quo per viam B K navis omnium citiſſime poſſit progredi. Ad id probandum, ducatur G K perpendicularis ipſi B K. Ex omnibus quæ ſuperius dicta ſunt, patet ventum A B propellere navem ope veli D C, ſecundum B G velocitate B G, eodem tempore quo eandem propelleret ſecundum B K velocitate B K. Et quoniam G K eſt perpendicularis ipſi B K, erit itidem perpendicularis ipſi M G. Ergo G K eſt tangens ſemicirculi. Ergo quotcunque ducantur perpendiculares ex aliis circumferentiæ ſemicirculi punctis, ſupra B K, cadent omnes inter B & K. Ergo navis celeritas in veli ſitu D C erit omnium maxima. Addo, velum D C ſecare bifariam an-

angulum A B K, qui est angulus venti cum viâ. Ad quod demonstrandum ducatur M N perpendicularis ipsi B G. secat M N angulum B M G angulo A B K æqualem, bifariam; & quoniam M N est parallela ipsi D C, angulus B M N dimidius anguli B M G, qui æqualis est angulo A B K, æqualis est angulo A B C, qui ipse per consequens æqualis est dimidio angulo A B K. Unde sequitur, veli situm semper bifariam debere secare angulum venti & viæ, & cum agitur de progrediendo in adversum venti, debere illum cum velo constituere angulum 30. graduum, proramque itidem cum velo angulum 30. grad.; quia, ut demonstratum fuit in Theoria Manuariæ Nauticæ, quocunque in situ respectu venti disponatur velum, necesse est ut ejus complementum prora bifariam secet. Et exinde apparet, quocunque in situ constituatur prora, quæ semper cum via congruit; quia ponitur navem non deviare, necesse esse ut angulum quem cum prora, ventus constituit, velum bifariam secet. Unde sequitur angulum rectum debere à prora & velo in tres partes æquales secari, id est, ventum cum velo 30. gradus constituere, proram itidem cum velo 30. gradus, & cum vento per consequens 60.

X I I.

Exceptio D^{ni} Hugenii ad Responsum D^{ni} Renaldi.

Mihi evidens videbatur illud quod in observationibus de errore primario, qui reperitur in tractatu de manuaria nautica D^{ni} Renaldi, proposueram, & censuerunt viri in re Mathematicâ versatissimi, argumentum meum omni exceptione majus esse; idcirco neque credideram, velle ipsum quidpiam respondere, quo suam confirmaret Theoriam; interim ex iis, quæ in lucem edidit, apparet eum minime de suo errore mecum sentire; & quandoquidem rationibus utitur, e quibus haud ita facile se expedire possent illi, qui non satis hæcce omnia excusserunt, obstrictum me credidi ad demonstrandum ma-

majori evidentiâ, quam antea, ejus Theoriam sustineri non posse, nisi principia mechanices, jam dudum stabilita, quorumque veritatem negare nec auderet, nec vellet, evertantur.

Ne inutiliter protraham controversiam nostram respondendo argumentis quæ Dus Renaldus mihi objicit, ostendam tantum illum, ut jam observaram, errasse in propositione, qua nititur tota ejus Theoria, deinde paucis indicabo, quid huic errori ansam dederit.

TAB. XXXIII. Fig. 9. Ut ostendam, quinam sit quæstionis status, hic maximam partem eorum, quæ nostras figuras spectant, repeto, scil; H M est navis carina; C D velum; A B linea venti velum inflantis; B G est perpendicularis ad C D; G K perpendicularis ad B K, quæ indicat carinam prolongatam; continuo G B ad Z, & M H ad X.

Dus Renaldus in Theoria cap. II. Art. 1. dicit, si ponatur navem undique eâdem, qua puppis, facilitate aquam findere, illam ita a vento propelli, ut progressura sit per rectam B G, quod est verum; sed si juxta situm carinæ navis tantum progredi queat in recta B K, vel si funis B R perpendicularis ad B K, & cujus longitudo censetur infinita, eam cogat insistere in via B K, contendit, velo & vento iisdem ac antea manentibus, navem percursuram spatium B K, eodem tempore quo percurrisset B G; ego autem defendo, quod percurreret spatium B S, medium proportionale inter B K & B G; Et hic est controversiæ nostræ status.

In probatione, quam affert in responsione suâ, loco venti A B oblique cadentis in velum C D, substituit ventum Z B, qui in id perpendiculariter agit; quod potest, & minime controversiam mutat, quum certum sit, quod quocunque sensu ventus in velum C D cadat, conetur navem propellere per viam B G perpendicularem ad C D; neque ullius usus sunt, quas habet D. Renaldus, diversas considerationes de motu venti. Ratiocinando dein invenit, quod vis, quâ navis pellitur a vento secundum B G ope veli, sit ad vim, qua pellitur ab eodem vento ope ejusdem veli secundum B K, ut

ut quadratum B G ad quadratum B K, non vero ut B G ad B K, quod ego contendo, & inde tota res pendet.

Ut determinemus cujus ſententia vera ſit, concipiamus planum, in quo noſtra figura exiſtit, ita ad Horizontem erectum, ut linea B G ad eundem ſit perpendicularis, & ſit R B X funis affixus in R, ad quem in B alligatum & ſuſpenſum ſit pondus Q: Ponamus ulterius portionem B X perpendicularem ad R B a manu retineri in X; clarum eſt, id exacte repræſentare caſum navis, de quo eſt quæſtio; nam loco venti, qui impingendo in velum C D propellat navim ſecundum B G, hic habemus pondus Q, quod trahit punctum B juxta B G; & funis B R, qui cenſetur infinitæ longitudinis, & impedit, quo minus navis aliam plagam versùs, quam B K poſſit progredi, hic eundem edit effectum reſpectu nodi B.

Ut ergo vis, qua ventus propellit navem ſecundum B G, eſt ad vim, qua hanc propellit ſecundum B K, ita eſt pondus Q ad gravitatem, quæ agit in manum quæ in X cohibet, quò minus nodus B moveatur verſus B K; illa enim gravitas æquipollet vi, qua nodus ſecundum B K trahitur. Cum autem G K parallela ſit ipſi B R, certum eſt ex notiſſimis Mechanicæ regulis, quod pondus Q ſit ad id quod retinet chordam B X, vel ad gravitatem quæ in X agit in manum ut B G ad B K. Vis ergo, qua navim propellit ventus ſecundum B G, eſt ad vim, qua propulſa eſt verſus B K, ut B G ad B K non vero, ut illarum linearum quadrata, ut Dnus Renaldus contendit.

Ponamus porro, navem H M, quæ undas eadem undique facilitate ſecat, propelli per ventum Z B vel A B (perinde enim eſt) quo naviget certo tempore per B G, velo exiſtente in C D, & determinandum eſſe, quantum progreſſura ſit ſecundum B K æquali tempore eodem vento, eodemque veli ſitu. Cum celeritates navis in duabus illis viis tales debeant eſſe, ut reſiſtentiæ, quas infert ipſi aqua, ſint ut vires, quibus propellitur (nam in eo caſu ſolo motu æquabili progreditur), & cum reſiſtentiæ

ſint ut quadrata celeritatum, ideo requiritur ut quadrata celeritatum ſint ut vires, id eſt ut G B ad B K; & conſequenter ut velocitates ſint ut G B ad B S; quandoquidem quadrata G B & B S ſunt ut lineæ G B, B K per conſtructionem. Probavi ergo ex ordinariis Mechanices principiis, id, quod in obſervatione mea propoſueram.

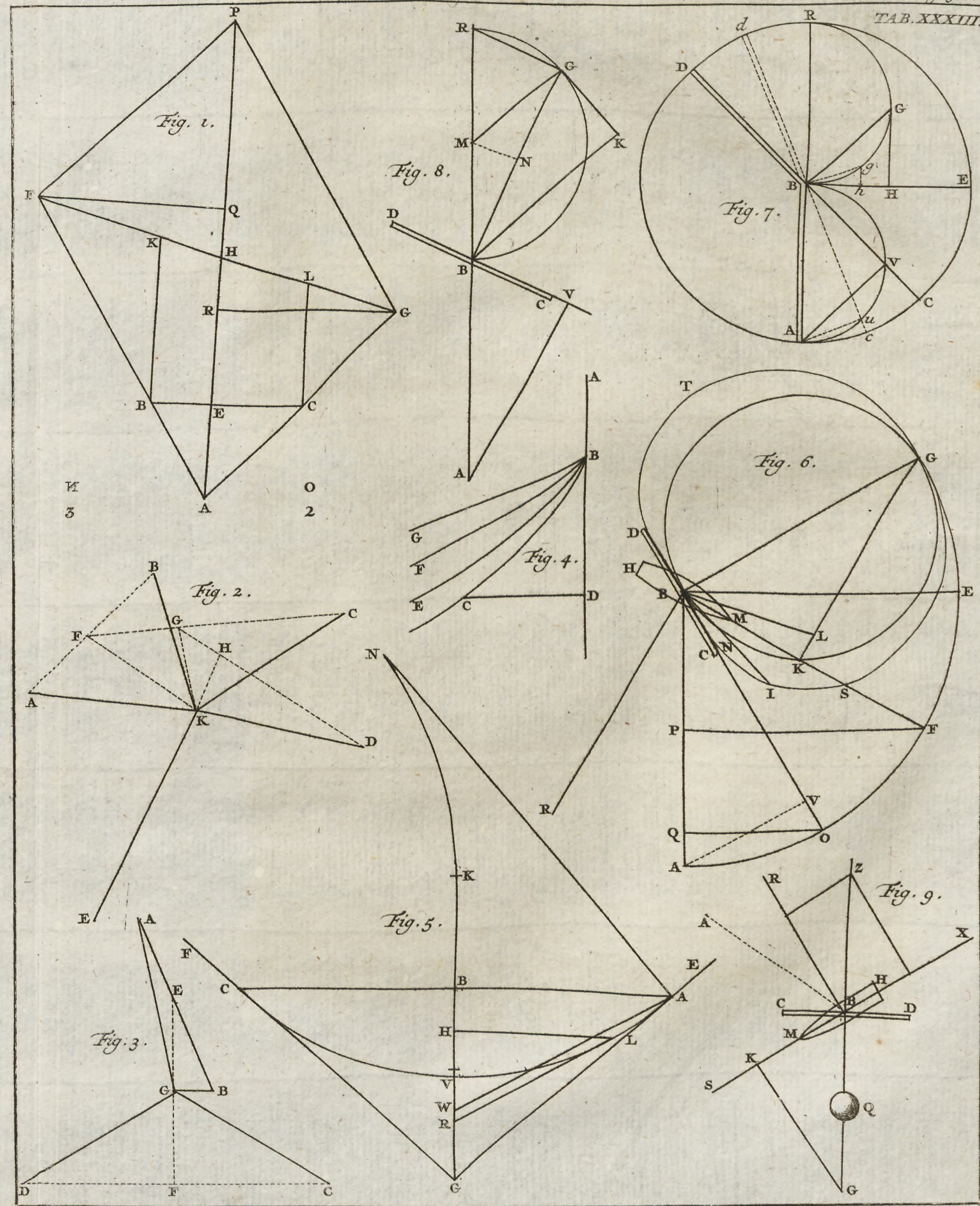
Superfluum foret alia argumenta D[ni] Renaldi examinare, quibus vult hanc eandem, quam refutavi propoſitionem, confirmare; ſolummodo indicabo originem erroris, qui in iis occurrit, præſertim naſci ex eo, quod in Articulo 7. Cap. 1. Theoriæ ſuæ concludat, *vires relativas materiæ fluidæ ad ſuperficies diverſimode inclinatas eſſe inter ſe, ut quadrata ſinuum angulorum incidentiæ;* debuiſſet addere *ad ſuperficies æquales diverſimode inclinatas;* cujus vocis *æquales* paulo ante in eodem Articulo pag. 7. quoque non meminerat; quod ſi ſuppleatur, tum demonſtratio optime congruit cum concluſione cumque veris principiis P: Pardies in Art. 118. Tractatus de *Viribus moventibus.* Pater hic tantum in eodem illo Articulo deceptus fuit, quod ignorarit vel ſaltem non recordatus fuerit, reſiſtentias aquæ in corpus eſſe ut quadrata velocitatum ejus corporis; ideo enim p. 225. facit *a f ad a u in duplicatâ ratione b o ad m p* cum ſimpliciter facere debuerit *a f ad a u, ut b o ad m p.*

Quod attinet ad utiliſſimum Gubernaculi ſitum, D[nus] Renaldus ſe ipſum nullo jure culpat, & dum quæ primo determinaverat corrigere conatur, male ratiocinatur; in reſponſione p. 303, nam tantum determinandum eſt, in quonam Gubernaculi ſitu aqua id propulſura ſit maximâ vi, juxta perpendicularem ad carinam; unde neceſſario ſequetur maxima puppis velocitas juxta illam perpendicularem. Errat etiam, quum vult, p. 25 Theoriæ ſuæ de Manuaria Nautica, legi *velocitas* loco *vis.*

Quod ſupereſt, obſervo, totam hanc Theoriam, ut ediderat, veram fore ſi reſiſtentiæ aquæ eſſent ut velocitates navis, ſunt autem ut quadrata illarum velocitatum.

F I N I S.

TAB. XXXIII.



CHRISTIANI HUGENII

A ZULICHEM,

Dum viveret Zelhemi Toparchæ,

OPERA VARIA.

VOLUMEN SECUNDUM.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JANSSONIOS VANDER AA,
Bibliopolas. MDCCXXIV.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA

GEOMETRICA.

TOMUS SECUNDUS.

Tomi secundi contenta.

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI,

EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

Quibus subjuncta est

Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO, editæ Anno cIↃ IↃCXLVII.

AD LECTOREM.

De Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, si tamen ita vocari queat, quod æternâ lege definitum constitutumque, quale nunc est, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic stellas in cœlo novas, quæ superioribus sæculis incognitæ, nostrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetustate cedit, sed nos novitatem singulis tribuimus, prout quæque sese nobis offerunt fiuntque manifesta. Itaque & inscripti trigoni Parabola ante Archimedem sesquitertia fuisse dicenda est; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus semper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini, de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuisse constet vel determinata. Damus autem non isti, quam retulimus, Archimedeæ similem determinationem, neque vel ipsa rerum natura, post tot subtilissimorum hominum delusos conatus, spem reliquisse videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas sumpsimus, expectandi: Verùm id præstitisse profitemur, quod in ipsa

quoque inſcriptione expreſſum eſt, & paulò quid amplius, ſi Lectoris æqui judicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipſes & Circulos ad quadrata redigere non finis eſt horum Theorematum, ſed conſequentia duntaxat; eoque nomine potiſſimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inſcripta triangula rationem demonſtrant. Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ deſtinatâ planè, ſed impeditâ difficilique; quâ deinde breviorem exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipſin & Circulum quoque pertineret, commodumque obvenit conſtans illa in cognatis figuris mirabilisque convenientia. Quæ quidem univerſim in omnibus hiſce quo minus locum habeat, ſola facit Propoſitionum noviſſima, ſupernumeraria illa quaſi, atque ultra propoſitum adſcita, cujuſque hoc ſolum mihi tribui par eſt, quod ex præcedentibus ipſam non ineleganti ratione comprobari poſſe oſtendi. Dudum enim hîc nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonſtratum dedit acutiſſimus Geometra I. Della Faille, felix, meâ quidem ſententiâ, quod ante alios perſpexerit, quomodo à ſectorum gravitatis centro Quadratura dependeret: cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruiſſe agnoſcam, non æquè gaviſus ſum detectâ in reliquis hujus ſegmentis ſimili connexione,

ne, quàm cum eandem in Hyperboles portionibus obſervaſſem, illudque inveniſſem de quo tantus Vir non potuit non & ipſe cogitaſſe. Raros alioqui ſemper hæc figura, ſi cum Circulo conferatur, ſui contemplatores nacta eſt; ejuſque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia ſint inſpecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari neceſſe ſit; cujuſmodi ſunt exacta perimetri longitudo, Helicis Archimedeæ contingens, Quadratricis Dinoſtrati terminus, vel tangens quoque ejuſdem Quadratricis ad terminum alterum, (ſicut aliquando me demonſtraſſe memini) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel ſub ulla conditione Hyperbole cum ſpatio rectis comprehenſo lineis comparari poſſit. Noſtrâ ſanè ætate, paucisque abhinc annis Vir Clariſſ. D. Gregorius à S. Vincentio, de quo mihi deinceps dicendum reſtat, exquiſitâ prorſus novâque methodo utramque Quadraturam aggreſſus eſt, & credidit eâdem ſe propemodum demonſtratione abſolviſſe. At ego cum ampliſſima quæ de hiſce volumina emiſit, perſcriptis jam Theorematis meis, diligentius evolverem, (certus, ſi quod intenderat obtineret, ſaltem gravitatis me centra exhibiturum,) intellexi tandem, majori ſubtilitate quàm ſucceſſu rem arduam tentatam fuiſſe, ratione quoque repertâ quâ id clariſſime oſtendi poſſe confido.

Et

Et quando inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui ſibi hanc provinciam delegerit, ac proinde fieri poſſet ut longa porro dubitatio maneret circa demonſtrationes, quas certiſſimas eſſe oportet; arbitratus ſum me facturum quod & in publicum utile eſſet & à propoſiti argumenti ratione non alienum, ſi ſimul hîc prodire ſinerem, quæ novam in re obſcura lucem allatura videbantur. Nulla autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctoritatem acceſſi, ſed cauſæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offenſam proponi poſſe. Majori quoque fiduciâ, poſteaquam is ſeſe ipſum per literas, quarum aliquod inter nos commercium eſt, auctorem hortatoremque candidè præbuit, ut ſiqua commentatus eſſem, ea cum univerſis communicarem. Ingenuitatem hanc inſignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & ſpero modeſtâ reprehenſione ſatis me declaraſſe, quanti æſtimem Doctiſſ. Viro haberi amicus. Cujus invicem ſumma, quâ me uſque adhuc excepit, humanitas facit ne quid aliud exſpectem, niſi ut vel moderatè & ſine ulla acerbitate ad mea reſpondeat, ſi quid iis reponendum eſſe duxerit, vel rationibus evidentiſſimis perſuaſus, æquè lubens noſtra quam alterius poſthac opera veriora ſentiat & amplectatur.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,

CONST. F.

THEOREMATA
DE
QUADRATURA
HYPERBOLES, ELLIPSIS,
ET CIRCULI,
EX DATO
PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

THEOREMA I.

Portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori, circumscribi potest figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quæ portionem excedat spatio quod minus sit quovis dato.

DATA sit portio A B C, cujus diameter B D. Super basin A C constituatur parallelogrammum A E, latera duo habens diametro B D parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo continuè in duo æqualia secto, relinquetur tandem pars quæ mi-

TAB. XXXIV. Fig. 1.

minor erit dato spatio; sit ea parallelogrammum B F, & dividatur basis A C in partes æquales ipsi D F, punctis G, H, K &c. atque inde ducantur ad sectionem rectæ G L, H M, K N &c. diametro B D parallelæ, & perficiantur parallelogramma D O, G P, H Q, K R &c. Dico figuram ex omnibus istis parallelogrammis compositam (quæ imposterum ordinatè circumscripta vocabitur) superare portionem A B C minori quàm datum sit spatio.

Jungantur enim A N, N M, M L, L B, B S, &c. eritque hac ratione inscripta quoque portioni figura quædam rectilinea; majorque erit excessus figuræ circumscriptæ quæ ex parallelogrammis composita est, super inscriptam, quàm supra portionem A B C. Excessus autem circumscriptæ super inscriptam ex triangulis constat, quorum quæ sunt ab una diametri parte, ut A R N, N Q M, M P L, L O B, æquantur dimidio parallelogrammi O D vel B F, quia singulorum bases basi D F æquales sunt, & omnium simul altitudo, parallelogrammi B F altitudini. Eâdem ratione triangula quæ sunt ab altera diametri parte, æquantur dimidio parallelogrammi B F: Ergo omnia simul triangula sive dictus excessus æqualis est parallelogrammo B F, eóque minor spatio dato. Sed eodem excessu adhuc minor erat excessus figuræ circumscriptæ supra portionem A B C: igitur hic excessus dato spatio multo minor est. Et apparet fieri posse quod proponebatur.

Theorema II.

Datâ portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majore, & dato triangulo qui basin habeat basi portionis æqualem; potest utrique figura circumscribi ex parallelogrammis quorum sit omnium eadem latitudo, ita ut uterque simul excessus quo figuræ circumscriptæ portionem & triangulum superant, sit minor spatio quovis dato.

Da-

Data sit portio A B C & triangulus D E F, basibus A C, D F æqualibus; & portionis diameter sit B G, in triangulo verò ducta à vertice in mediam basin linea E H. Sint autem utræque B G, E H vel ad bases rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet B G ad E H, in eandem dividatur spatium datum, sintque partes K & L. Circumscribatur jam sicut antea portioni A B C figura ordinatè, quæ portionem superet excessu minore quàm sit spatium K. Et triangulo D E F circumscribatur figura quæ totidem parallelogrammis constet, quot sunt in figura portioni A B C circumscripta.

TAB. XXXIV. Fig. 2.

Quoniam igitur bases portionis & trianguli æquales sunt, apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallelogrammum B M sit ad E R ut B G ad E H, id est ut K ad L, sitque B M minus quam K [1], erit quoque E R minus quam L [2]. Verùm omnia triangula quibus constat excessus figuræ circumscriptæ supra triangulum D E F, æqualia sunt parallelogrammo E R, ergo minor est idem excessus spatio L. Sed & excessus quo figura circumscripta portionem A B C superat, minor est spatio K. Ergo uterque simul excessus minor erit spatio K L dato. Et constat fieri posse quod proponebatur.

[1] Ex constr.
[2] 14. 5. Elem.

Theorema III.

SI portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori, circumscribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portionis diametro.

Sit portio quælibet istarum A B C, diameter ejus B D; & circumscribatur ei ut supra figura ordinatè. Ostendendum est ejus figuræ centrum gravitatis fore in B D diametro. Ducantur lineæ H K, N R, P S, conjungentes suprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portionis æqualiter utrinque distant.

TAB. XXXVI. Fig. 3.

Quoniam igitur F H, L K sunt diametro B D parallelæ, suntque D F, D L æquales, oportet lineam H K, quæ duas F H, L K conjungit, à diametro B D bifariam secari; quare eadem H K parallela erit basi A C [1], & E H K G recta linea. Itaque E C parallelogrammum est; cujus opposita latera quum bifariam dividat diameter B D, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis [2]. Eâdem ratione parallelogramma erunt H M, N O, P Q, & singulorum centra gravitatis in linea B D. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis compositæ centrum gravitatis in eadem B D reperiri necesse est. Ista autem figura eadem est quæ portioni ordinatè fuerat circumscripta. Ergo figuræ portioni ordinatè circumscriptæ centrum gravitatis constat esse in B D portionis diametro. Quod erat ostendendum.

[1] 5. lib. 2. Con.

[2] 9. lib. 1. Arch. de Æquipond.

Theorema IV.

Portionis hyperboles, ellipsis & circuli, centrum gravitatis est in portionis diametro.

TAB. XXXIV. Fig. 4.

Esto portio hyperboles, vel ellipsis vel circuli dimidiâ primum figurâ non major, A B C; diameter ejus B D. Ostendendum est, in B D reperiri portionis A B C gravitatis centrum.

Si enim fieri potest, sit extra diametrum in E, & ducatur E H diametro B D parallela. Dividendo itaque D C continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam D H; sit ea D F, & circumscribatur portioni figura ordinatè ex parallelogrammis quorum bases æquales sint lineæ D F, & jungantur B A, B C. Figuræ itaque portioni circumscriptæ centrum gravitatis est in B D portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur E K, producaturque, & occurrat ei A L parallela B D. Quia autem portio major est triangulo A B C, & excessus quo figura circumscripta portionem superat, minor parallelogrammo B F, uti supra demonstratum fuit *; erit major ratio portionis A B C ad dictum excessum, quàm trianguli A B C ad B F parallelogrammum, id est quàm

* Theor. 1.

A D

A D ad D F; multoque major quam A D ad D H, vel quàm L K ad K E. Sit itaque M K ad K E ſicut portio A B C ad exceſſum quo ipſa ſuperatur à figura ordinatè circumſcripta. Itaque cum K ſit centrum grav. figuræ portioni circumſcriptæ, & E centrum grav. ipſius portionis; erit M centrum gravitatis omnium ſpatiorum quæ eundem exceſſum conſtituunt [1]. Quod eſſe non poteſt; Nam ſi per M linea ducatur diametro B D parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus ſpatia. Manifeſtum eſt igitur, portionis A B C centrum grav. eſſe in B D portionis diametro.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.

Eſto nunc A B C portio ellipſis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Abſolvatur figura, & producatur B D uſque dum ſectioni occurrat in E; erit igitur portionis A E C diameter E D, & B D E diameter totius figuræ. Et quoniam in B D E diametro eſt figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonſtratis conſtabit, ſi in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipſi A C ſit parallela,) & in eadem centr. gravitatis A E C portionis minoris, ſicut modò oſtenſum fuit; erit quoque centr. gravitatis portionis reliquæ A B C in B D E [2]; quod erat oſtendendum.

TAB. XXXIV. Fig. 5.

[2] 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

* LEMMA.

Eſto linea E B, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ E S, B P, & inſuper alia P D. Dico id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Eſt enim rectangulum E D B æquale iſtis duobus, rectangulo E D P & rectangulo ſub E D, P B: quorum ultimum ſuperat rectangulum E P B rectangulo D P B. Igitur exceſſus rectanguli E D B ſupra rectangulum E P B æqualis eſt duobus iſtis, rectangulo E D P, & D P B. Sed rectangulum E D P addito rectangulo D P B, id eſt rectangulo ſub E S, D P, æquale ſit rectangulo S D P. Manifeſtum eſt igitur, exceſſum rectanguli E D B ſupra E P B, æquari rectangulo S D P.

TAB. XXXIV. Fig. 6.

† Eſto rurſus linea E B, cui ad utrumque terminum auferan-

TAB. XXXIV. Fig. 7.

* Idem hoc aliter demonſtratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24.
† Vide eundem, lib. 7. Prop. 57.

rantur duæ æquales E S, B P, & insuper alia P D. Dico iterum, id quo rectangulum E D B excedit E P B, æquari rectangulo S D P. Rectangulum enim E D B æquale est istis duobus, rectangulo E D P, & rectangulo sub E D, P B; horum autem E D P rursus æquale est duobus, rectangulo nimirum S D P, & ei quod continetur sub E S, D P, sive rectangulo D P B. Igitur rectangulum E D B istis tribus æquale est rectangulis, S D P, D P B, & rectangulo sub E D, P B; horum vero duo postrema æquantur rectangulo E P B; ergo rectangulum E D B æquale est duobus, rectangulo nimirum S D P & E P B, unde apparet excessum rectanguli E D B supra rectangulum E P B æquari rectangulo S D P.

THEOREMA V.

Datâ portione hyperboles, vel ellipsis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; si ad diametrum constituatur triangulus hujusmodi, qui verticem habeat in centro figuræ, & basin portionis basi æqualem & parallelam; eam vero quæ deinceps à vertice ad mediam basin pertingit tantam, ut possit ipsa rectangulum comprehensum lineis, quæ inter portionis basin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. Erit magnitudinis, quæ ex portione & præscripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quod est trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.

TAB.XXXV. Fig. 1. 2. 3.

Data sit portio hyberboles, vel ellipsis vel circuli portio dimidiâ figurâ non major, A B C. Diameter ejus sit B D, & figuræ diameter B E, in cujus medio centrum figuræ F. Et sumatur F G quæ possit rectangulum B D E, ductâque K G H æquali & parallelâ basi A C, quæque ad G bifariam

riam dividatur, jungantur K F, F H. * Demonstrandum est, quòd magnitudinis compositæ ex portione A B C & triangulo K F H, centrum gravitatis est punctum F.

Si non est in F, sit si fieri potest primùm ab ea parte puncti F quæ est versùs A B C portionem, atque esto punctum L; constat autem futurum in recta B D G, quum in hac sint utraque centra gravitatis portionis & trianguli K F H. Jungantur A B, B C, & quam rationem habet G F ad F L, eam habeat magnitudo composita ex triangulis A B C, K F H ad spatium quoddam M; & circumscribantur portioni & triangulo K F H figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium sit eadem latitudo, ita ut duo simul excessus quibus istæ figuræ superant portionem A B C & triangulum K F H, minores sint spatio M [1]. Igitur duorum simul triangulorum A B C, K F H ad dictos duos excessus sive residua major erit ratio quàm ad M, id est quàm G F ad F L; ac proinde longè major ratio portionis A B C unà cum K F H triangulo ad eadem residua quam G F ad F L. Sit itaque N F ad F L, sicut portio A B C simul cum triangulo K F H ad duo residua, & cadet terminus N ultra trianguli basin K H. Jam per F ducatur O Ξ parallela basi A C vel K H; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo K F H æqualiter à diametro distabunt, ut sunt R Q, Σ T, sint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta Z Λ Δ Ω, secans lineam O Ξ in Υ; & ducatur R P basi A C parallela, abscissæque ad verticem lineæ P B sumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, E S.

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim sunt applicatæ C D & R P, erit ut rectangulum B D E ad rectangulum B P E, ita quadratum C D ad R P quadratum [2]; verùm ut C D ad R P, hoc est, ut H G ad Ψ G, ita est H F ad Σ F, & ita Z Υ ad Λ Υ; igitur ut C D quadratum ad quadratum R P, id est ut rectangulum B D E ad B P E, ita

[1] Theor. 2. h.

[2] 21. lib. 1. Con.

* Notatu dignum quod K F, F H in hyperbole sunt asymptoti.

ita est quadratum Z Υ ad Λ Υ quadratum. Quare & per conversionem rationis, sicut rectangulum B D E ad differentiam rectangulorum B D E, B P E, ita quadratum Z Υ ad differentiam quadratorum Z Υ, Λ Υ. Est autem differentia rectangulorum B D E, B P E, æqualis rectangulo S D P, sicut lemmate præmisso demonstratum est; differentia verò quadratorum Z Υ, Λ Υ, æqualis quadrato Z Λ & duobus rectangulis Z Λ Υ[3], sive quod idem est, rectangulis Z Λ X, Z Λ Υ bis sumptis, hoc est, duplo rectangulo sub Z Λ, X Υ. Itaque sicut est rectangulum B D E ad rectangulum S D P, ita quadratum Z Υ ad duplum rectangulum sub X Υ, Z Λ. quare cum rectangulum B D E quadrato F G æquale sit[4], ideoque & quadrato Z Υ, erit quoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo sub X Υ, Z Λ[5]. Quia verò F punctum dividit B E per medium, suntque æquales B P, E S, etiam F P, F S æquales erunt, unde additâ utrique F D, erit S D æqualis toti P F D id est Δ Υ Ω: sed Δ Υ Ω dupla est lineæ V Υ, quia bis continet utramque Υ Δ, Δ V in hyperbole, in ellipsi verò & circulo bis utramque V Ω & Ω Υ; ergo & S D dupla V Υ, ideoque rectangulum S D P æquale duplo rectangulo sub Υ V, Ω Δ. Sed idem rectangulum S D P æquale ostensum fuit duplo rectangulo sub X Υ, Z Λ; ergo æquale est rectangulum sub Υ V, Ω Δ, rectangulo sub X Υ, Z Λ. Est itaque Υ V ad Υ X, ut Λ Z ad Ω Δ[6]; verùm ut Λ Z ad Ω Δ, ita est parallelogrammum Σ T ad R Q; itaque & Υ V est ad Υ X ut parallelogrammum Σ T ad R Q parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallelogrammo compositæ centrum gravitatis est punctum Υ[7]. Eâdem ratione ostendi potest de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppositorum centrum gravitatis est in linea O Ξ. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumscriptis componitur, centr. gravitatis in eadem O Ξ reperiri necesse est. Sed ejusdem compositæ magnitudinis centrum gravit. est quoque in recta

B D G,

[3] 4. lib. 2. Elem.

[4] Ex constr.

[5] 14. 5. Elem.

[6] 16. l. 6. Elem.

[7] 7. lib. 1. Archim. de Æquip.

B D G, quoniam in ea sunt centra gravitatis utriusque figuræ circumscriptæ [8]; igitur magnitudinis ex dictis figuris compositæ centrum grav. est ipsum punctum F. Positum autem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione A B C & K F H triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compositæ ex duobus residuis, quæ in figuris circumscriptis remanent, erit centr. grav. in producta L F, ubi ea sic terminatur, ut pars adjecta habeat ad F L eandem rationem quam portio A B C simul cum K F H triangulo ad dicta duo residua [9]: is autem terminus est N; itaque N punctum est centrum gravitatis duorum residuorum. Quod fieri nequit; Nam si per N ducatur recta basi K H parallela, erunt ab una parte spatia omnia è quibus utrumque residuum constat. Non est igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione A B C & K F H triangulo compositæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F. Namque hoc si dicatur, planè simili demonstratione eò devenietur ut duorum residuorum quæ demptâ portione A B C & K F H triangulo, in circumscriptis figuris supererunt, centrum gravitatis sit ultra portionem A B C; quod est æquè absurdum. Reliquum est igitur ut sit ipsum punctum F; quod erat ostendendum.

8 Theor. 3. h.

9 8. lib. 1. Archim. de Æquipond.

THEOREMA VI.

Omnis hyperboles portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera duarum, lateris transversi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro sectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.

Esto hyperboles portio, & inscriptus ei, qualem diximus, triangulus A B C; diameter autem portionis sit B D, & latus transversum sive diameter sectionis B E, in cujus medio centrum sectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in

TAB. XXXIV. Fig. 8.

portione punctum L. Dico portionem ad inscriptum triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius E D ad F L.

Constituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus K F H; scilicet ut quadratum F G æquetur rectangulo E D B, & ut basis K H sit basi A C æqualis & parallela: ejusque trianguli sit centrum gravitatis M, sumptâ nimirum F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

Est itaque triangulus K F H ad A B C triangulum, ut F G ad B D: verùm ut F G ad B D, ita est E D ad F G, quia quadratum F G æquale est rectangulo E D B; & ut E D ad F G, ita sunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id est F M; ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ E D ad F M. Est autem portio hyperboles ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium portionis & trianguli K F H est in puncto F [3], & centra gravitatis singulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit portio ad triangulum A B C, ut duæ tertiæ lineæ E D ad F L [4]: quod erat demonstrandum.

[1] 34. lib. 1. Arch. de Æquip.

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.

[3] Theor. 5. h.

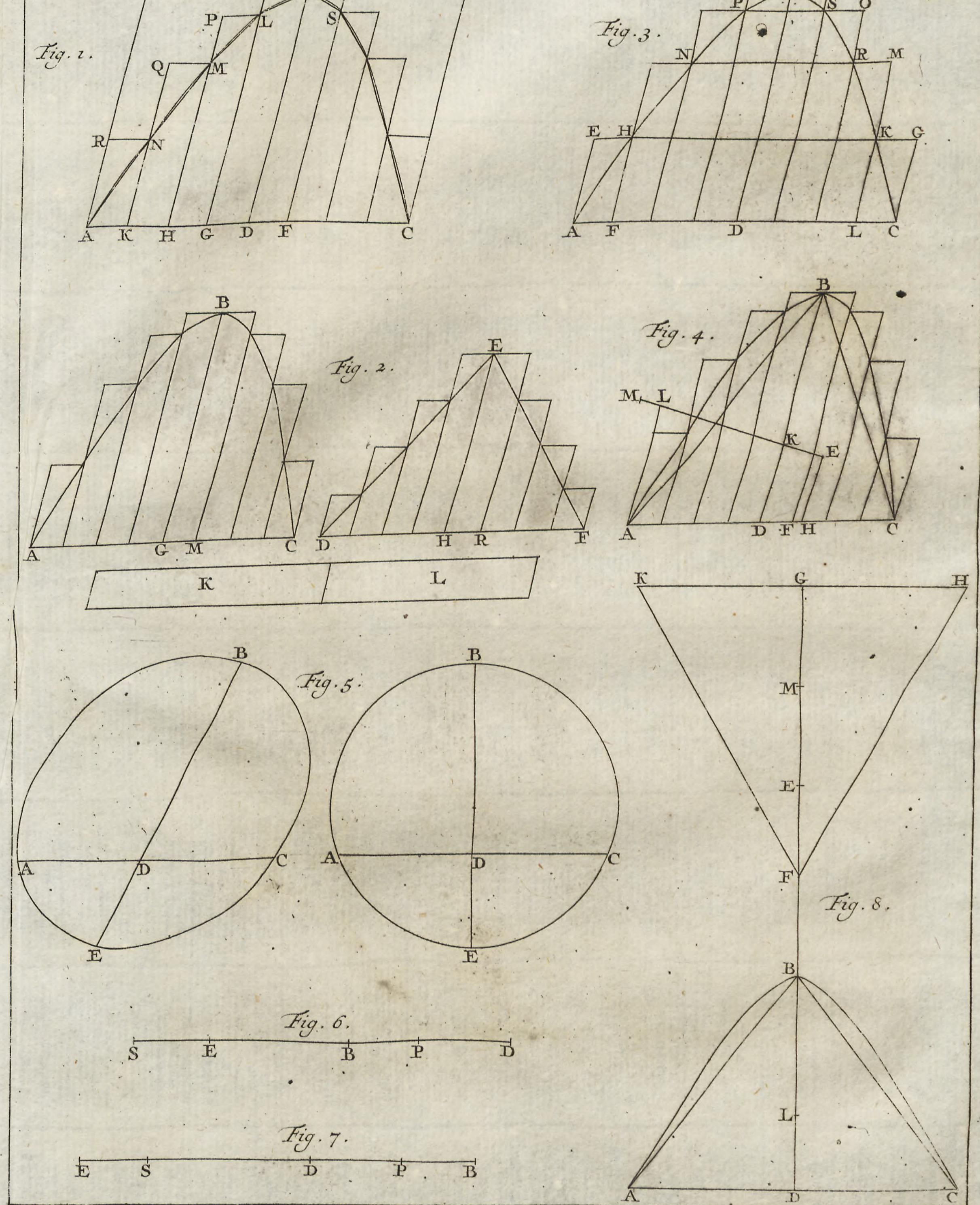
[4] 23. lib. 5. Elem.

THEOREMA VII.

Omnis ellipsis vel circuli portio ad triangulum inscriptum, eandem cum ipsa basin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam subsesquialtera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.

TAB. XXXV. Fig. 4. 5.

Esto ellipsis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inscriptus ei triangulus A B C, eandem cum portione basin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis sit B D, quæ producatur, & manifestum est quod transibit per centrum figuræ; sit hoc F, & diameter portionis reliquæ D E. Et ponatur centrum gravitatis in portione


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

tione A B C punctum L. Dico igitur portionem ad inscriptum sibi triangulum A B C eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L. Constituatur enim ut supra triangulus K F H, cujus nimirum basis K H sit basi A C æqualis & parallela, & F G quæ à vertice ad mediam basin pertingit possit rectangulum B D E: & centrum gravitatis trianguli K F H sit M punctum, sumptâ scilicet F M æquali duabus tertiis lineæ F G [1].

[1] 14. lib. 1. Arch. de Æquip.

Triangulus igitur K F H est ad triangulum A B C, ut F G ad B D; ut autem F G ad B D, sic est E D ad F G, quia quadratum F G æquale est B D E rectangulo; & ut E D ad F G, sic sunt duæ tertiæ E D ad duas tertias F G, id est, ad F M. Ergo triangulus K F H ad triangulum A B C, sicut duæ tertiæ E D ad F M. Portio autem A B C est ad triangulum K F H, ut F M ad F L [2], quoniam æquilibrium eorum est in F [3], & centra gravitatis singulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, sicut duæ tertiæ E D ad F L [4].

[2] 7. lib. 1. Archim. de Æquipond.

[3] Theor. 5. h.

[4] 23. lib. 5. Elem.

TAB. XXXVI. Fig. 1. 2.

Sit nunc portio A B C dimidiâ figurâ major. Dico eam rursus ad inscriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ E D ad F L.

Ponatur enim portionis reliquæ A E C centrum gravitatis H punctum, & jungantur A E, E C. Igitur per ea quæ jam ostendimus, erit portio A E C ad A E C triangulum, ut duæ tertiæ B D ad F H; verùm ut triangulus A E C ad triangulum A B C, sic est E D ad B D, sive duæ tertiæ E D ad duas tertias B D; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit sicut portio A E C ad triangulum A B C, ita duæ tertiæ E D ad F H [5]. Sed ut portio A B C ad A E C portionem, ita est F H ad F L [6], quoniam totius figuræ centrum gravitatis est F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio A B C ad A B C triangulum, ut duæ tertiæ E D ad F L. Omnis igitur Ellipsis vel circuli portio &c. Quod erat demonstrandum.

[5] 23. lib. 5. Elem.

[6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.

THEOREMA VIII.

IN semicirculo & quolibet circuli sectore, habet arcus ad duas tertias rectæ sibi subtensæ hanc rationem, quam semidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad sectoris centrum gravitatis.

TAB. XXXVI. Fig. 3.

Esto primùm semicirculus A B C, descriptus centro D, sectusque bifariam rectâ B D, in qua centrum gravitatis semicirculi sit E [1]. Dico arcum A B C esse ad duas tertias A C, sicut B D ad D E. Jungantur enim A B, B C. Igitur, ut semicirculus ad triangulum A B C, sic sunt duæ tertiæ B D ad D E [2], est enim B D æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut semicirculus, id est, ut triangulus habens basin æqualem arcui A B C & altitudinem B D, ad A B C triangulum, ita est arcus A B C ad A C rectam; ergo ut arcus A B C ad A C, ita sunt duæ tertiæ B D ad D E, & permutando, ut arcus A B C ad duas tertias B D, ita A C ad D E, sive ita $\frac{2}{3}$ A C ad $\frac{2}{3}$ DE, unde rursus permutando, ut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita $\frac{2}{3}$ B D ad $\frac{2}{3}$ D E, sive ita, B D ad D E.

[1] Theor. 4. h.

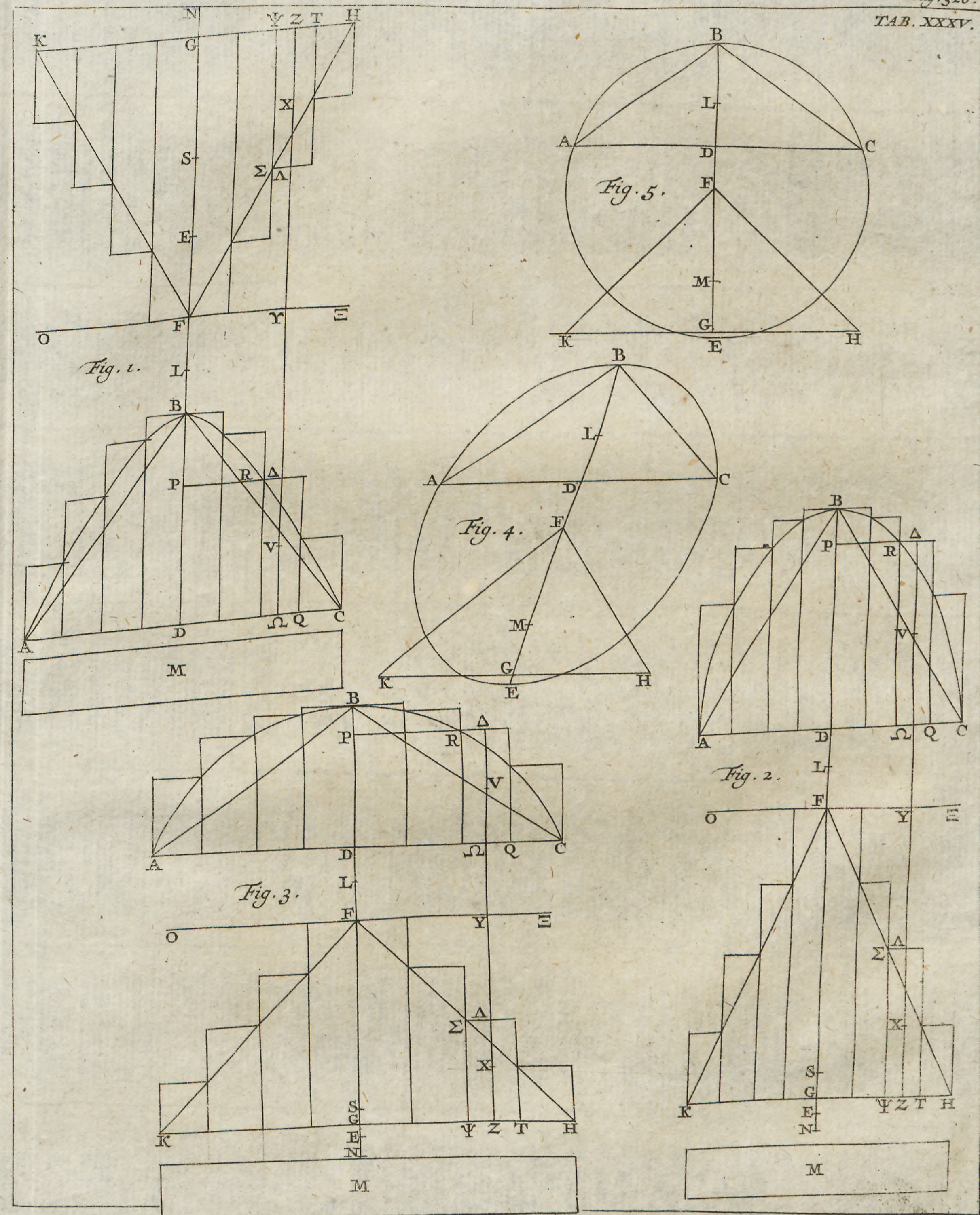
[2] Theor. 7. h.

TAB. XXXVI. Fig. 4.

Sit deinde sector D A B C, semicirculo minor, bifariam sectus rectâ D B, in qua sectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur subtensa A C. Dico rursus, arcum A B C ad duas tertias rectæ A C eam habere rationem, quam B D ad D E. Jungantur enim A B, B C, & totius circuli sit diameter K D B, quæ producatur in Q, ut fiat Q F, ad B F, sicut portio A C B ad A B C triangulum, & jungantur A Q, Q C; erit jam triangulus A Q C portioni A C B æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli A C D, & H portionis A C B; & sicut D Q ad Q F, ita sit H D ad D R.

Quia igitur sicut portio A C B sive triangulus A Q C ad triangulum A B C, id est, ut Q F ad B F, ita $\frac{2}{3}$ K F ad D H [3], erit rectangulum sub Q F, D H, æquale duabus tertiis

[3] Theor. 7. h.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

tertiis rectanguli K F B [4], id est, duabus tertiis quadrati A F; sed idem rectangulum sub Q F, D H, æquale est rectangulo Q D R, quia ut Q D ad Q F, ita fecimus esse D H ad D R; ergo rectangulum Q D R æquale duabus tertiis quadrati A F, ideoque ut Q D ad A F ita $\frac{2}{3}$ A F ad D R [5]: sed ut Q D ad A F, sic quoque est rectangulum sub Q D, A F, cui æquale quadrilaterum D A Q C, id est, sector D A B C ad A F quadratum; ergo & sector D A B C ad quadratum A F, ut $\frac{2}{3}$ A F ad D R. Porrò quoniam E centrum gravitatis est totius sectoris, & H centrum grav. portionis A C B, G verò trianguli A C D, constat esse, sicut triangulus A C D ad A C B portionem sive ad triangulum A Q C, id est, ut D F ad F Q, ita H E ad E G [6]; quare convertendo & per compositionem rationis erit ut D Q ad D F, ita G H, ad H E. Sed quia fecimus ut D Q ad Q F, ita H D ad D R, erit quoque per conversionem rationis, ut D Q ad D F, ita H D ad H R; ergo H D ad H R ut G H ad H E; quare & reliqua G D ad reliquam E R, ut H D ad H R [7], hoc est, ut D Q ad D F. Sicut autem D Q ad D F, ita est quadrilaterum D A Q C, cui æqualis sector D A B C ad A C D triangulum; igitur sector D A B C ad A C D triangulum ut G D ad E R: Est autem A C D triangulus ad D F quadratum, ut A F ad D F, sive ut $\frac{2}{3}$ A F ad $\frac{2}{3}$ D F id est D G. Igitur ex æquali in proportione perturbata, sicut sector D A B C ad quadratum D F, ita $\frac{2}{3}$ A F ad E R [8], & convertendo, quadratum D F ad sectorem D A B C, ut E R ad $\frac{2}{3}$ A F. Fuit autem ante ostensum, quadratum A F esse ad sectorem D A B C, ut D R ad $\frac{2}{3}$ A F; igitur duo simul quadrata, D F & A F, sive unum quadratum D A ad sectorem D A B C ut duæ simul E R & R D, id est ut tota E D ad $\frac{2}{3}$ A F [9]. Est verò etiam quadratum D A ad D A B C sectorem, sicut linea D A ad arcum A B, quia nimirum sector D A B C æqualis est rectangulo, basin habenti æqualem arcui A B & altitudinem D A; ergo sicut D A ad arcum A B, ita E D ad $\frac{2}{3}$ A F; & permutando, arcus A B ad $\frac{2}{3}$ A F, sive arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ut D A vel B D ad D E.

[4] 16. lib. 6. Elem.
[5] 16. lib. 6. Elem.
[6] 8. lib. 1. Arch. de Æquipond.
[7] 19. lib. 5. Elem.
[8] 23. lib. 5. Elem.
[9] 24 lib. 5. Elem.

TAB. XXXVI. Fig. 5.

Esto jam denique sector D A B C semicirculo major, & ponantur ea quæ priùs, & perficiatur circulus B A F C, & totius diameter sit B D F, in qua erit quoque centrum grav. sectoris reliqui D A F C [1], quot sit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis est D, & duorum sectorum centra grav. E & G, erit sicut sector D A B C, ad sectorem D A F C, id est, sicut arcus A B C ad arcum A F C, ita G D ad D E [2]: verùm ut arcus A F C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita est D F ad D G, sicuti modò ostensum est; ergo ex æquali in proportione perturbata, sicut arcus A B C ad $\frac{2}{3}$ A C, ita erit D F vel B D ad D E [3]. Constat itaque quod in semicirculo & quolibet circuli sectore &c. quod erat demonstrandum.

[1] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[2] 8. lib. 1. Arch. de Æquip.

[3] 23. lib. 5. Elem.

Ἐ Ξ Ἐ Τ Α Σ Ι Σ

CYCLOMETRIÆ

CLARISSIMI VIRI,

GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.

Editæ Anno D. cIↃ IↃc XLVII.

ANte quinquennium circiter Vir eruditissimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio, quatuor modos proposuit quadrandi Circulum, unum verò eorum etiam Quadraturæ Hyperboles applicavit: quem cæteris potiorem ab ipso existimari ex multis indiciis colligere licet. Unum est hoc ipsum quod duas diversarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonstravit; alterùm quod evidentior multò sit hic modus quàm reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum est, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi suæ inventionis

TAB. XXXVI.

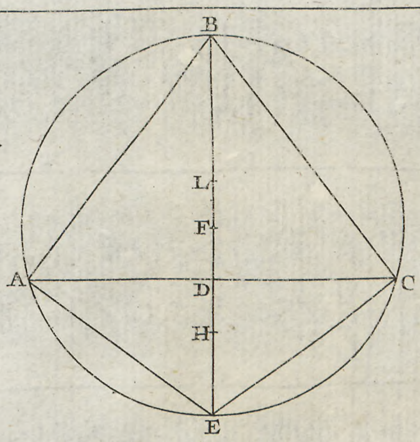


Fig. 2.

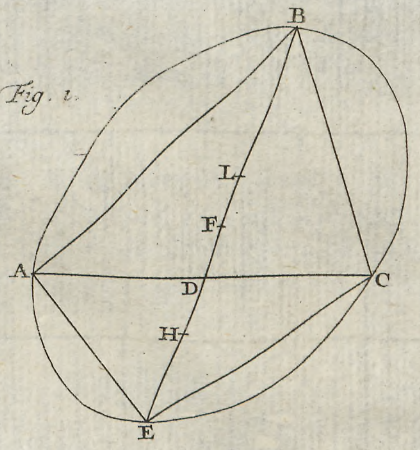


Fig. 1.

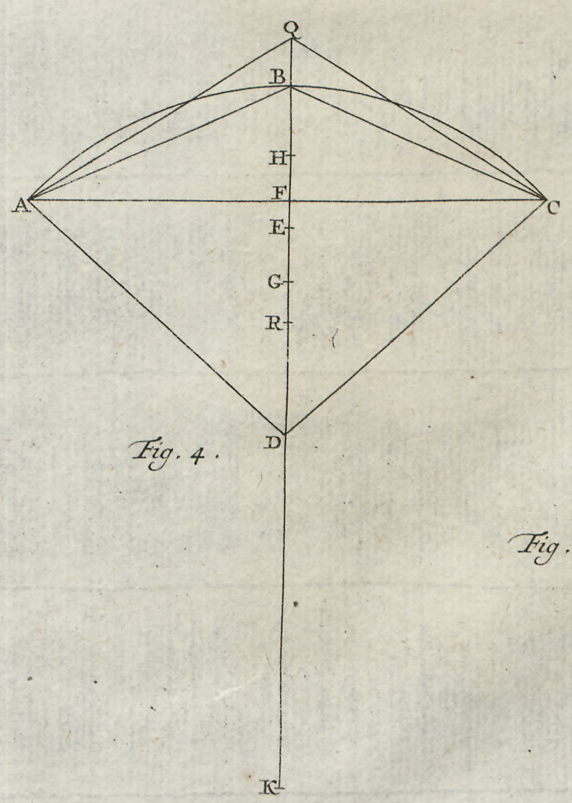


Fig. 4.

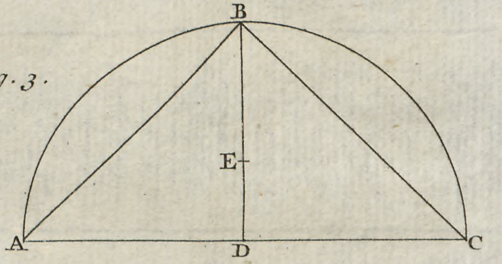


Fig. 3.

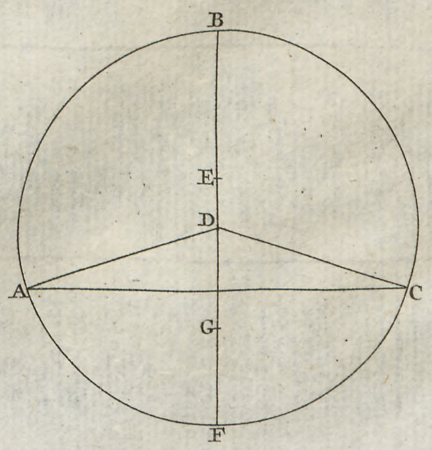


Fig. 5.

ventionis historiam & progressum paucis exposuit, nullius modi præter hunc unum meminerit. Potuit autem & aliam rationem habuisse tres posteriores quadraturas illic silentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes sciret ex iisdem principiis deductas & demonstratas esse. Sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, ut persuaderet unam pro omnibus fore discussionem quæ quadraturam primariam infirmatura esset, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea ostenderimus quæ minus obscuritatis habet, non video quâ ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quæ maximâ caligine involvuntur, quasque Auctor ipse vel uni illi posthabere videtur. Principia quæ communia esse omnibus quadraturis dixi, ea sunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis sive de Proportionum proportionibus, & de Ductibus plani in planum. Quæ quidem prorsus non impugnabo, nam & solida corpora quæcunque in Geometria considerare licere existimo, & alia omnia adhiberi posse, quæ modò ullo auxilio fore credimus ad investigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non satis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicasse, atque hinc, meâ opinione, ipsi extitisse erroris causam. Primùm omnium id in propos. 39. lib. 10. Oper. Geom. * observaveram. Positis enim numeris fortuitò assumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hisce eandem demonstrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. scripta est de totidem parallelepipedis. Et quum tamen conclusio nullam idoneam admitteret interpretationem, non dubitabam quin æquè ipsius ac mea argumentatio, quam iisdem verbis formaveram, aliquid absurdi contineret. Posterior autem demonstrationis pars rectè se habebat, ideoque arguebat peccatum in

* In hac Propos. 39. etiam Cartesius paralogismum ostendit Epist. ad Schotenium.

in priori. Sed veritus ne intricata & prolixa hinc nobis disputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea sese obtulerunt, quæ paucis hic perscribere constitui. Nulla per hæc propositionum Cl. Viri in controversiam vocabitur; sed contrà multis earum probatis, atque in usum meum conversis, eò rem deducam, ut si quidem non impossibile dicet quadraturam suam ad exitum perducere, & per eam reapse invenire rectilineum circulo æquale, ostendam qui id facillimè imposterum assequatur. Deinde vestigia ipsius insistens demonstrabo, quibus hactenus nobis præcessit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri posse, sed esse subsistendum ad conclusiones perquam absurdas. Atque ut ad rem veniamus.

TAB. XXXVII. Fig. 1.

Esto circulus cujus centrum F, diameter C D. Et diviso radio F C bifariam in G, ducantur ipsi ad angulos rectos F E, G H. Dico, datâ ratione segmenti C H G ad G H E F segmentum, dari quoque rationem circuli ad inscriptum sibi hexagonum regulare. Jungantur enim F H, H C, & manifestum est triangulum F H C fore æquilaterum; item quadrantis arcum C E triplum fore arcus H E. Si ergo data sit ratio segmenti C H G ad G H E F segmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis F E C ad segmentum G H E F. Sed data quoque est ratio sectoris F H E ad quadrantem F E C, ergo datur quoque ratio segmenti G H E F ad sectorem F H E; ac proinde dabitur quoque ratio segmenti G H E F ad triangulum F H G; quare & ratio sectoris F H E ad triangulum F H G data erit. Sed huic rationi eadem est ratio sectoris F H C ad triangulum F C H, (quoniam hæc utriusque præcedentium dupla sunt;) eademque est circuli ratio ad hexagonum regulare sibi inscriptum. Ergo & hanc datam esse apparet: quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVII. Fig. 1. 2.

Sunto nunc lineæ A B, C D, E F, singulæ æquales diametro circuli C D: & super unaquaque harum construantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B describantur semiparabolæ A V G, B T H, quarum bases sint quadratorum latera

latera B G, A H. In duobus ſequentibus quadratis ducantur diagonii C I, D K. Sed in poſtremis rurſus ſemiparabolæ deſcribantur E Σ L, F Π M, quarum vertices E & F, axes vero ſint quadratorum latera E Ψ, F Ω, & baſes Ψ L, Ω M. Porro diviſis bifariam ſingulis lineis quæ ab initio poſitæ fuerunt, in N, O, P, & medietatibus rurſus bifariam in Q, R, S, ducantur per diviſionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, T V, X Y; Z Γ, Δ Θ, Π Σ, Λ Ξ.

Oſtendit itaque Cl. V. in demonſtr. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. & veriſſimum eſt, in circulo ſuperiori ſegmentum C H G ad ſegmentum G H E F, eandem habere rationem quam habet hic ſolidum quod fit ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, ad ſolidum ortum ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N; ſicut enim ille in ſuo ſchemate ſumit æquales lineas *h i*, *k l*, ita nobis æquales ſunt ſumptæ in circulo, C G, G F, & hiſce pares A Q, Q N.

Atque ut ipſa demonſtrandi methodus quoque noſcatur, ea hujuſmodi eſt. In prop. 51. lib. 10. oſtenditur, ſolidum quod fit ex ductu ſemiparabolæ A B G in ſemipar. A B H, æquari ſemicylindro, baſin habenti ſemicirculum C E D & altitudinem C D. Deinde in Corollario ejuſdem prop. idem quoque ſingulis partibus quod totis ſolidis convenire docetur. Nimirum id ſolidum quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, æquatur quoque parti dicti ſemicylindri quæ inſiſtit ſegmento G H E F; Itemque ſolidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, æquatur ejuſdem ſemicylindri parti quæ inſiſtit ſegmento C H G. Quorum hoc vel ex eo conſtat, quod alioqui duo iſta ſolida ſimul ſumpta, hoc eſt, ſolidum ex ductu plani A V N in pl. A H T N, æquale non eſſet dimidio ejus quem diximus, ſemicylindri; & conſequenter falſum quoque eſſet quod in confeſſo eſt, nimirum ſolidum ex ductu ſemiparab. A B G in ſemiparab. A B H æquari toti ſemicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ ſemicylindri partes eandem inter ſe rationem

habent quam bases quibus insistunt, certum esse quod diximus, segmentum circuli C H G ad G H E F, esse ut solidum ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q ad solidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N.

Hæc ita enucleatè scribere volui, ne cui ignaro fortasse naturæ demonstrationum quibus Cl. V. utitur, scrupulus restare posset, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli segmenta considerat, quale ferè est G H E F, ego pro altero eorum sumpserim segmentum C H G: Quodque in linea A B ab ipso termino A æquales partes capiam A Q, Q N. Ipsum autem Cl. Virum hæc remorari non possunt, neque hîc, neque in sequentibus; quia cum in d. prop. 52. & 44, lib. 10. præcipit in linea *a b* æquales inter se sumi *h i*, *k l*, scit hoc nullam limitationem admittere; sicut & in schemate communi prop. 39, lib. 10, ubivis in linea *a b* sumitur *i k*, quæ dividitur in duas æquales *i m*, *m k*. Idem contingit in prop. sequenti 40.

Revertor autem ad propositum, & constat nunc quidem, si detur Ratio solidi quod fit ex ductu plani A Y Q in pl. A H X Q, ad solidum ex ductu plani Q Y V N in pl. Q X T N, eo ipso dari quoque rationem segmenti C H G ad segmentum G H E F, ac proinde continuò tunc inveniri posse quam rationem circulus habeat ad inscriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani A Y Q in planum A H X Q, solidum H Y. Item quod fit ex ductu plani Q Y V N in planum Q X T N, solidum X V. Similiter quod oritur ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, vocemus solidum K Θ; eâdemque brevitate dicamus solida Δ Γ, M Ξ, Λ Σ, quibus quæ denotentur jam satis intelligitur.

His sic constitutis, sciendum est, omnem spem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl. Viro in eo positum esse, quod existimet rationem solidi H Y ad solidum X V (quam unicam tantum desiderari jam admonui) facile inveniri posse, si cognitæ sint duæ rationes hæ, nimirum ratio solidi

M Ξ

M Ξ ad sol. Λ Σ., & ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ. Sic enim tunc argumentabitur; Nota est ratio solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, item ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipsa, scilicet ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ, continet rationem solidi H Y ad X V; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda sint paulò inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemus. Interea certo scio, nihil horum quæ dixi mihi à Cl. V. negatum iri, modò consideret in linea A B, sumptas esse æquales inter se partes A Q, Q N, & hisce pares C R, R O; E S, S P.

Si igitur indicavero ipsi quæ sit ratio solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, item quæ sit ratio solidi K Θ ad sol. Δ Γ, & ne tum quidem dicere possit quam rationem habeat solidum H Y ad sol. X V, fateatur sane se frustra utramque Quadraturam tentasse, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli; quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propositionem 44. lib. 10. Oper. Geom. quæ vana & inanis erit, nisi ex notis rationibus solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, & solidi K Θ ad sol. Δ Γ, innotescat ratio solidi H Y ad sol. X V. Hyperboles vero; quoniam prop. 146. ejusd. lib. 10. cui hæc quadratura innititur, eadem est cum dicta prop. 44. & iisdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin vero datis istis duabus rationibus invenire posthac poterit rationem solidi H Y ad sol. X V, tum se credat Circulum reverâ quadravisse. Nota enim sic erit ratio segmenti C H G in circulo ad segmentum G H E F, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipsas Rationes. Et primam quidem, hoc est rationem solidi M Ξ ad sol. Λ Σ, ajo esse eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram vero, rationem solidi K Θ ad sol. Δ Γ, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infrà sum demonstraturus.

Priùs autem quod ab initio promisi etiam ostendam, hisce Rationibus cognitis, tamen rationem sol. H Y ad sol. X V,

per ea quidem quæ nos adhuc docuit V. Cl. inveniri non posse. Etenim inventurus ex datis rationibus, sol. ΜΞ ad sol. ΛΣ, & solidi ΚΘ ad sol. ΔΓ, rationem tertiam solidi HY ad sol. XV, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre est ex demonstratione prop. 44. suprà citatæ, cui hunc casum convenire liquidò constat. Dicet enim, Notæ sunt prima & secunda ratio, (istæ enim sunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima secundam contineat. Sed quoties prima continet secundam, toties secunda continet tertiam, (hoc asserit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.) Ergo notum quoque quoties secunda tertiam contineat. Quare cum nota sit secunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet solidum HY ad sol. XV.

Consequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima secundam contineat; hoc est, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo sensu verbum *continere* hîc explicaturus est? Num eo, ut idem significet quod alibi *continere per multiplicationem?* utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc est ut illa hujus sit duplicata, ita enim *continere* intelligendum videtur in propositione 40. lib. 10, modo citata) vel ter, vel quater, vel sæpiùs etiam. Et hoc quidem esse non potest; nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata est neque triplicata vel ulterius multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{13}{25}$ sit duplicata rationis 5 ad 11.

An igitur verbum *Continere* in eum sensum trahet, quem habet in propositione 125. lib. 8. Oper. Geom.? Vix quidem illud suspicari possum; sed etiamsi vellet rursus inde absurdum consequetur. Nam secundum interpretationem istam; quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipsa continebit rationem 5075 ad 6413; hoc autem patebit horum numerorum inter se rationis examinanti secundùm regulam dictæ propositionis 125. Esset igitur ratio solidi HY ad sol. XV, hoc est, ratio segmenti circuli ab initio propositi CHG, ad segmentum GHEF, eadem quæ

5075 ad 6413. Quare qualium partium ſegmentum C H G eſſet 5075, talium ſegmentum G H E F eſſet 6413; & proinde quadrans F C E 11488; & ſector F H E (qui quadrantis tertia pars eſt) $3829\frac{1}{3}$: & triangulum G H F $2583\frac{2}{3}$. Sicut autem ſector F H E ad triang. G H F, ita eſt ſector F H C ad triangul. F C H, & ita circulus C D ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$ talium hexagonum inſcriptum foret $2583\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inſcriptum eſt $2583\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumſcriptum eſt $3444\frac{8}{9}$; quoniam hoc inſcripti eſt ſeſquitertium: Ergo qualium partium circulus C D eſſet $3829\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumſcriptum eſſet $3444\frac{8}{9}$, atque ita eſſet ipſo circulo minus, quod eſt abſurdum.

Manifeſtum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram caſui noſtro accommodari poſſe. Aliam autem præter illas nullam in ſuo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſol. M Ξ ad ſol. Λ Σ contineat rationem ſol. K Θ ad ſolid. Δ Γ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi H Y ad ſolid. X V. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus iſtis datis, per inventa Clariſſ. Viri cognoſci poſſe: ideoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere Circuli quadraturam.

Reſtat nunc tantùm ut manifeſta faciam quæ in præcedentibus poſita fuere, dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum M Ξ eſſet ad ſolid. Λ Σ, ut 53 ad 203: item quod ſolidum K Θ rationem haberet ad ſolidum Δ Γ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, ut notum habeamus, quæ ſit Ratio ungulæ Parabolicæ ad Cylindrum ſuum, qui baſi inſiſtit eidem, & eandem habet altitudinem; idcirco hanc Rationem declarantes, Tractatum Clariſſ. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9. propoſuit, uno egregrio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipſum non inveniſſe, quum ex iis quæ jam

oſtenderat facili negotio deducatur, ut jam ſtatim apparebit.

TAB. XXXVII. Fig. 3.

Repetitâ enim quatenus hîc neceſſe erit figurâ ipſius, quæ eſt in propoſitione 99. lib. 9. Eſto Cylindrus Parabolicus, baſes oppoſitas habens parabolas A B D, V C E; à quo ſit abſciſſa Ungula A B C D, eâdem baſi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam ſeſquialteram, ſive quam 5 ad 2.

Tranſcriptis enim reliquis ex figura eadem, eſt F B diameter parabolæ A B D: & lineæ rectæ A B, B D. Ductâ porrò B C rectâ in ſuperficie cylindri, ſumptâque ejus quartâ parte C Q, abſcinditur plano P Q N ungula P Q C N & junguntur C A, C D. Denique toti cylindro adjuncta eſt pyramis A D γ C æqualis parti B X D E C, quæ à cylindro abſciſſa eſt plano B D E C. Et hactenus quidem ſufficiet nobis conſtructionem Cl. V. repetiiſſe. Demonſtravit autem hæc duo quæ ſequuntur, ſicut videre eſt in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod ungula A B C D eſt ad ungulam P Q C N, ſicut 32 ad 1. Item quod hæc ungula P Q C N eſt ad pyramidem totam A γ D B C, (quæ compoſita eſt ex duabus pyramidibus A D B C & A D γ C) ut 1 ad 30.

Erit igitur ex æquo ungula A B C D ad pyramidem A γ D B C ut 32 ad 30, hoc eſt, ut 16 ad 15. Porrò cùm parabolæ A B D octava pars ſit ſegmentum B D X, erit quoque ſegmentum ſolidum B X D E C vel huic æqualis pyramis A D γ C, octava pars cylindri totius parabolici A V C E D B: ſed pyramis altera A D B C æquatur duabus octavis ſive uni quartæ ejuſdem parabolici cylindri; (eſt enim ipſa tertia pars ſui priſmatis, quod æquale eſt tribus quartis cylindri iſtius, ut ex quadratura parabolæ conſtat) ergo tota pyramis A γ D B C tribus octavis æquatur cylindri parab. A V C E D B. Cylindrus igitur parabolicus A V C E D B erit ad pyramidem A γ D B C, ut 8 ad 3, hoc eſt, ut 40 ad 15; ſed oſtenſum eſt eandem pyramidem A γ D B C eſſe ad ungulam A B C D ut 15 ad 16. Igitur ex

ex æquo erit cylindrus parabolicus A V C E D B ad ungulam A B C D ut 40 ad 16, hoc eſt, ut 5 ad 2; quod fuit demonſtrandum.

Quæ hîc dixi à Cl. Viro oſtenſa fuiſſe, veriſſima ſunt, ac proinde non eſt quod de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonſtr. adferre poſſem, longe ab iſta diverſam, niſi ad ſequentia properarem.

Repetitâ igitur parte ultimâ ſchematis, quod ſuprà deſcripſimus, ſit oſtendendum, quod ſolidum M Ξ, id eſt, quod oritur ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S ad ſolidum Λ Σ, id eſt, quod oritur ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, eam habet rationem quam 53 ad 203. Deſcribatur ſuper E F parabola E Π F, axem habens P Π, quam conſtat eſſe quartam partem ipſius E F ſive M E. Erit igitur parabola E Π F eadem quam V. Cl. in prop. 41. & 42. lib. 10. notat literis A R B. Ait autem in dicta prop. 42. & veriſſimum eſt, ſolidum quod producitur ex ductu plani E Σ L F in planum F Π M E æquari ſolido quod fit ex parabola E Π F ducta in ſe ipſam: ſicut illud quoque quod ſubjungit in Coroll. 1. nimirum quod ſolidum ex plano S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, æquatur ſolido ex ductu plani S Φ Π P in ſe ipſum; unde ſimiliter ſolidum ex plano E Ξ S in planum E M Λ S æquabitur ſolido ex plano E Φ S in ſe ipſum ducto.

TAB.XXXVII. Fig. 2.

Oportet itaque oſtendere ſolidum ortum ex plano E Φ S ad ſolidum ex plano S Φ Π P, utroque in ſe ipſum ducto, eſſe ut 53 ad 203.

Eſto ungula parabolica A E F Π, cujus baſis parabola E Π F repetita ſit ex figura præcedenti, eodemque modo ut iſtic diviſa lineis Π P, Φ S. Sit autem altitudo ungulæ A Π dupla diametri baſis Π P. Erit igitur hæc ea ungula, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejuſdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ E Π F in ſe ipſam. Eâdem nimirum conſideratione uſus quæ eſt in Scholio propoſ. 19. lib. 9. Nam alioqui ex ejuſmodi ductu potius dicendum eſſet geminas ungulas produci, ſingulas altitudine æquales diame-

TAB.XXXVII. Fig. 4.

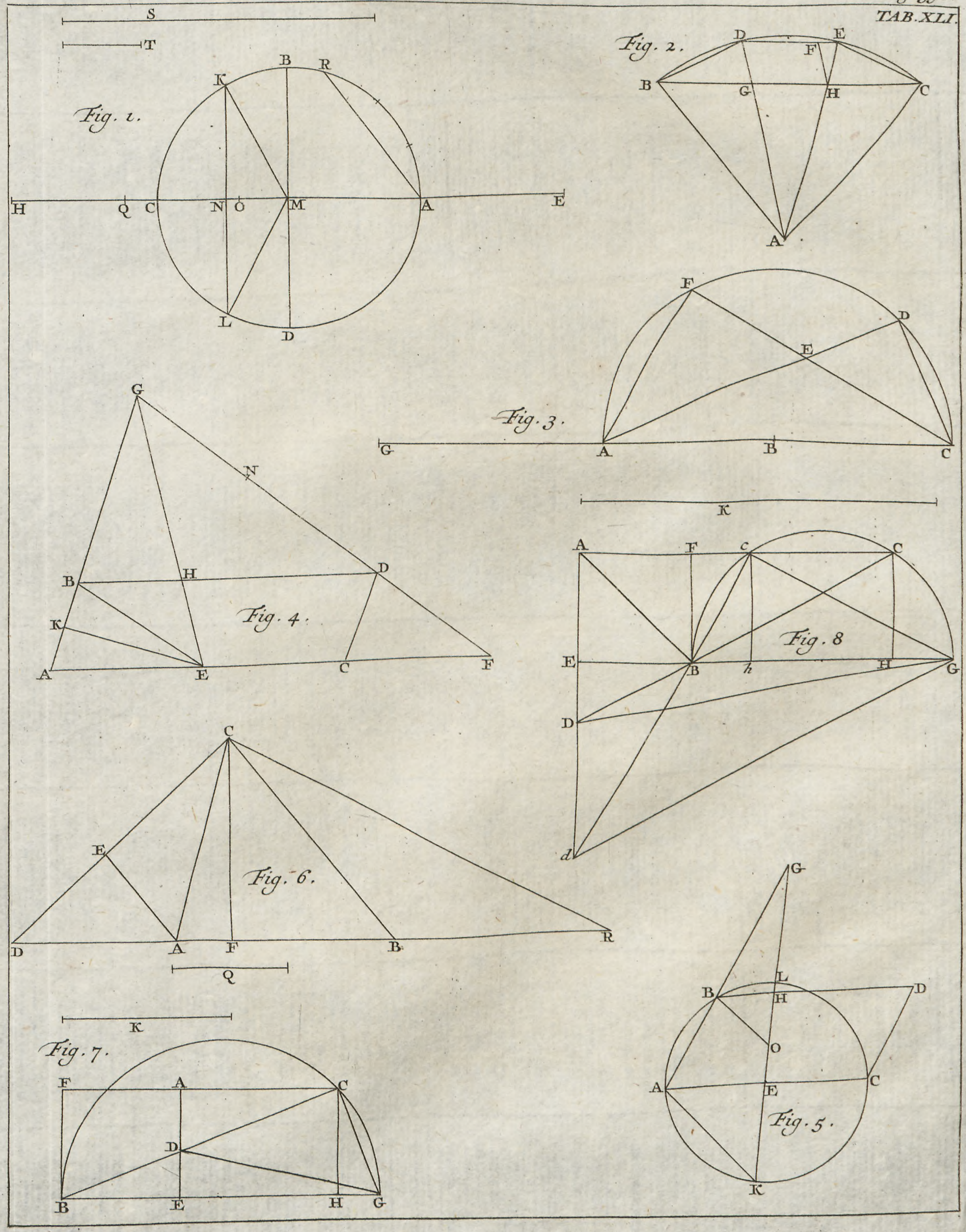
tro

tro Π P. Ducto deinde plano per A Π P, & alio huic parallelo D Φ S secundum lineam Φ S, erit jam pars ungulæ hisce duobus planis terminata, æqualis solido quod fit ex ductu plani S Φ Π P in se ipsum; & pars ungulæ E D S Φ, æqualis ei solido quod fit ex ductu plani E Φ S in se ipsum. Quare nunc demonstrandum erit duntaxat, partem E D S Φ esse ad partem Φ A P ut 53 ad 203, Sit Φ N parallela E P, & N C parallela Π A. Ergo quoniam ex proprietate Paraboles, P N est $\frac{1}{4}$ Π P, erit quoque P C $\frac{1}{4}$ A P. Verùm & S D æquatur $\frac{3}{4}$ A P, quum sit huic parallela *, sitque parabola E A F: Itaque junctâ C D, ea parallela & æqualis erit lineis P S, N Φ. Ducatur secundùm D C planum D B C parallelum basi E Π F, fietque semiparabola B D C æqualis & similis semiparabolæ Π Φ N; & erit Φ B N dimidius cylindrus parabolicus: D A C B verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur sicut antea ostendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, basin habentis D B C & altitudinem B A. Ergo quum semicylindrus Φ B N habeat altitudinem B Π triplam ipsius B A, erit ungula dimid. D A C B ad semicyl. Φ B N, ut 2 ad 15, hoc est, ut 8 ad 60.

* 11. 16. Elem.

Junctâ porro Φ Π, constat semiparabolam Π Φ N ad triangulum Π Φ N esse ut 4 ad 3; sed triangulus Π Φ N est ad rectangulum Φ P ut 1 ad 6, (est enim basis Π N tertia pars ipsius N P) hoc est, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit semiparab. Π Φ N ad rectang. Φ P ut 4 ad 18. Itaque & semicylindrus Φ B N est ad parallelepipedum ejusdem altitudinis super basi Φ P, ut 4 ad 18. Dicti autem parallelepipedi dimidium est prisma D N S; ergo semicylindrus Φ B N est ad prisma D N S, ut 4 ad 9, hoc est, ut 60 ut 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula D A C B erat 8, talium semicylindrus parab. Φ B N erat 60, (ut suprà ostensum est) taliumque prisma D N S erit 135. Ac proinde solidum A Π S D, quod ex istis tribus componitur, erit 203. Est autem ungula dimidiata A D C B ad dimidiatam ungulam E A P Π, ut 1 ad 32, sicut Cl. Vir. demonstravit in prop. 95. lib. 9. Ergo qualium partium ungula dimid.

A D C B


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8

A D C B eſt 8, talium erit dimid. ungula E A P Π 256, quoniam ut 1 ad 32, ita eſt 8 ad 256. Diximus autem partem ſol. A Π S D eſſe talium 203. Igitur dim. ungula E A P Π eſt ad partem A Π S D ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua E D S Φ ad partem A Π S D, ut 53 ad 203; quod erat demonſtr. Oſtendimus igitur illud quoque ſolidum, quod ſuprà diximus fieri ex ductu plani E Ξ S in planum E M Λ S, eam habere rationem ad ſolidum ortum ex ductu plani S Ξ Σ P in planum S Λ Π P, quam 53 ad 203.

Tandem ad alterum eorum quæ demonſtrare promiſimus accedamus, repetitâque parte mediâ ſchematis triplicis quod ſuprà deſcriptum fuit, oſtendendum ſit; ſolidum ortum ex ductu plani C Θ R in planum C K Δ R, ad ſolidum ex ductu plani R Θ Γ O in planum R Δ Z O eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus C D trianguli C D I, erigatur ad perpendiculum triangulum C K D, & jungatur K I. Erit jam pyramis C D I K illud ſolidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli C D I in triangulum C D K. Etenim ſectâ pyramide plano A Z O Γ ſecundum O Γ, quod rectum ſit ad baſin C D I, erit ſectio quadratum, id eſt, rectangul. quod fit ex lineis Γ O, O Z; eademque ſectio dividet pyramidem bifariam. Secta item plano E Δ R Θ priori parallelo, ſecundùm lineam R Θ, exiſtet inde rectangulum E R, quale continetur lineis Θ R, R Δ. Oportet itaque oſtendere, quòd ſolidum K C R E Δ eſt ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11.

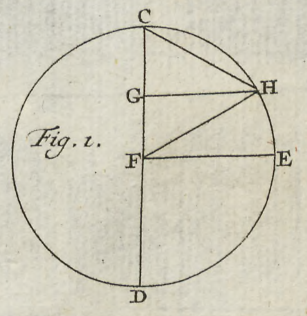
TAB. XXXVII. Fig. 2.

Fig. 5.

Ducatur ſecundùm E Δ planum Δ E B parallelum baſi C D I; abſcindet illud pyramidem B E Δ K ſimilem toti pyramidi C I D K, quæque proinde erit ad hanc in triplicata ratione laterum homologorum B Δ ad C D. Sed B Δ, cum ſit æqualis ipſi C R, quarta pars eſt lateris C D. Itaque qualium partium pyramis B E Δ K eſt unius, talium pyramis C I D K erit 64: & dimidium hujus, hoc eſt, ſolidum K A O C erit 32. Qualium autem pyramis B E Δ K eſt unius talium quoque priſma B E R eſt 9; quoniam baſin habent communem B E Δ, & priſmatis altitudo B C tri-

pla eſt ad altitudinem pyramidis B K. Ergo ſolidum K C R E Δ quod ex hiſce duobus componitur, erit partium 10, qualium ſolidum K A O C eſt 32. Apparet igitur hoc eſſe ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo ſolidum K C R E Δ eſſe ad ſolidum Δ A O Θ Δ, ut 5 ad 11: quod erat oſtendendum.

F I N I S.



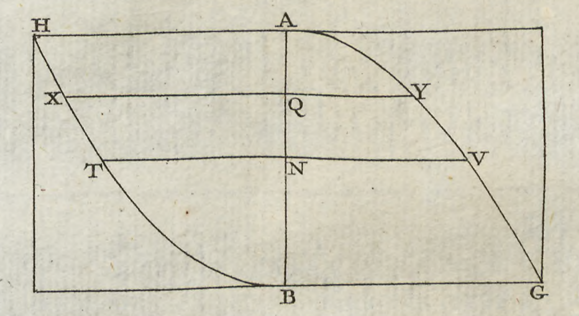


Fig. 2.

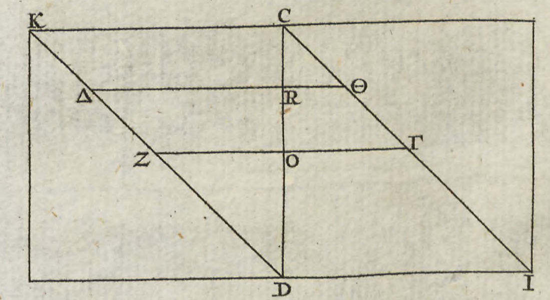
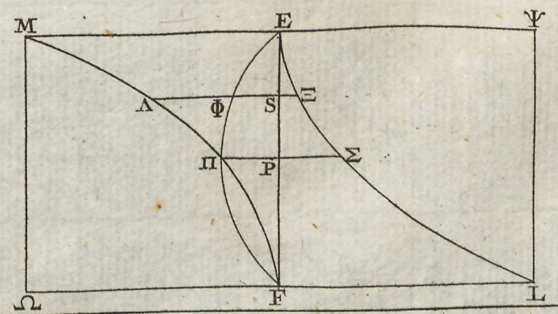


Fig. 2.



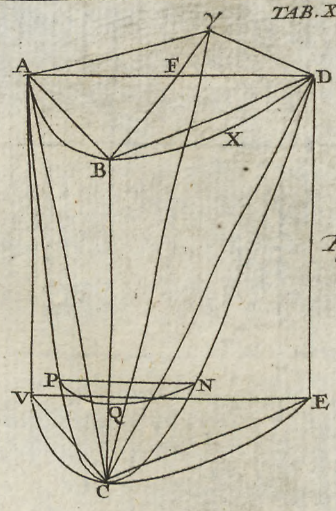


Fig. 3.

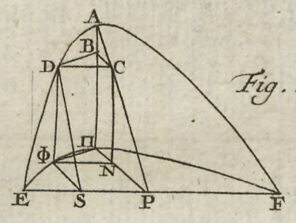


Fig. 4.

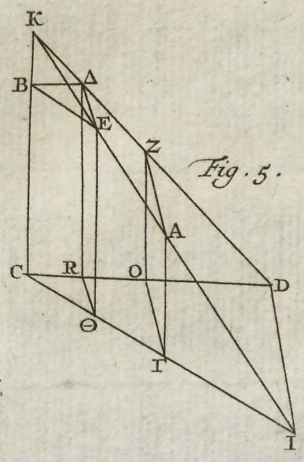


Fig. 5.

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

AD

C. V. FRAN. XAVERIUM
AINSCOM. S.I.

EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii à Sto. Vincentio* impugnata fuit.

CHRISTIANI HUGENII,
Const. F.
AD
C. V. FRAN. XAVERIUM
AINSCOM. S. I.
EPISTOLA.

Cl. Viro D°. XAVERIO AINSCOM CHRISTIANUS HUGENIUS S. D.

Liber ille quem non ita pridem tuo nomine huc misit Apelles vester Segerus, tam mihi acceptus fuit, Vir Clariss. quam solent esse ea quorum diutina expectatio desiderium auget. Jam diu enim intellexeram te Quadraturæ Vincentianæ patrocinium suscepisse, novissiméque & Lovanio & Româ significatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quædam nostræ Exetasi dicata esset. Itaque cum avide totum commentarium tuum evolvi, tum accuratius reliquis illa expendi quæ propius ad me pertinebant. De quibus quid visum fuerit breviter tibi perscribere constitui. Equidem miratus sum, cum me non ultimum inter eos recenseas qui cæteris solidius in examinanda Quadratura vestra versati sint, postea tamen adeo nihili animadversiones omnes meas, omniáque argumenta prædicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant quidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, cœlo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minime sum assecutus. Veruntamen Viri Doctissimi funditus evertisse me commenta vestra pronunciavere, quorum judiciis, etsi vos fortasse non statis, apud intelligentes tamen multo pluris futura reor quam eo-

rum qui vobis de reperta Quadratura gratulantur. E societate veſtra Vir eximius A. Tacquetus, *accurate ſibi lectam eſſe multumque probari Exetaſin noſtram reſcripſit, & recte me urgere autorem Quadraturæ, ut exhibeat, quoties ratio prima contineat ſecundam & ſecunda tertiam, idque niſi præſtet, tertiam incognitam explicaturum nunquam, ac proinde non daturum quadraturam, quæ à notitia tertiæ illius rationis dependet.* Alter item apud vos eſt Clariſſimus Gutſchovius, quem paſſim profiteri ſcio magnos P. Gregorii conatus noſtrâ operâ penitus concidiſſe. Neque aliter ſentit Vir undiquaque Doctiſſimus & in Academia Oxonienſi Mathematum Profeſſor J. Walliſius, idque publice teſtatum fecit in edito nuper ſubtiliſſimo opere de Infinitorum Arithmetica. Poſſemque & alios complures referre quorum pro me facit calculus, ni perſuaſum haberem in re Geometrica rationibus magis quam autoritate agendum. Neque enim dubito quin dicturus ſis, eodem mecum errore ductos qui mihi applaudunt, ipſos quoque nihilo rectius penetraſſe ſenſa autoris tui. Quare id agam potius, ut procul à me ſimul atque illis hanc, ſive inſcitiæ, ſive oſcitantiæ culpam amoliar. Prius autem ad alia quoque nonnulla quæ mihi objicis reſpondendum opinor. Variis allatis conjecturis veriſimile reddere conatus eram, ex quatuor quadraturis eam à vobis præferri quæ prima ponitur. Hoc ita refutas, ut, quod ego præcipuum argumentum dixeram, diſſimules prætereáſque. Verum per me licet ut quo loco vobis viſum erit primam quadraturam habeatis. Ego me abunde præſtitiſſe arbitrabor ſi hanc abſurdam eſſe evincam: cuique hoc planum fecero, eum non puto reliquarum trium confutationem expetiturum, imo, ſi offeratur, ne lecturum quidem. Etenim quod iiſdem omnes principiis innitantur, Proportionalitatum nimirum doctrinæ atque ei quæ eſt de ductibus plani in planum, tam certum eſt, ut negari nulla ratione poſſit. Negas tu tamen hoc, crebroque inculcas, in prima hac quadratura, proportionalitatum conſideratione, non uti autorem tuum. Sed miror qua fronte; cum non ignores utique propoſitionem 12. 39. & 40. libri 10. ex 8va ejuſdem libri demonſtrari, hanc vero per 114 lib

lib. 8. qui totus eſt de Proportionalitatibus.

Porro ſuperfluam me ais operam ſumpſiſſe, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, ſi credimus, multo antè quàm ego edidiſſem, imo quàm ipſe editus eſſem, perſpectas habuit aliiſque demonſtravit. Quæſo cur non explicuit igitur, noſque ea levavit moleſtia? Nam certum erat plurimum ad abſolvendam quadraturam, ſi modo abſolvi poſſet, eorum notitiam conferre debere, planéque eſſe neceſſariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quæ cognoſci poſſe aliquâ ſaltem ratione imaginamini, atque ea quæ liquido comperta fuerint. Itaque ad propoſ. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri aſſeris. Illa vero non magis ipſas expedit quam propoſitio poſtrema ejuſdem libri, rationem quæ ſit inter circulum & quadratum diametri. Prorſus huic ſimile eſt quod de Parabolica ungula reſpondes. Videlicet jam à triginta annis exploratum habuiſſe autorem tuum, quænam ſit illius ad cylindrum ſuum proportio. Equidem ex iis quæ jam tradiderat, erui illam poſſe faſſus ſum; ipſum vero adhuc cujuſmodi foret neſciviſſe, ſatis evidens argumentum videbatur, quod eam non exprometet. Neque enim credibile, cujus theorematis gratia duodeviginti propoſitiones elucubraſſet, id tanquam ſuperfluum non eſſe adſcripturum, ſi tam nullo negotio inveniri poſſe ſperaret. Parum intererat utrum propoſitione illud dignatus fuiſſet, (quod noluiſſe eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uſpiam expreſſa eſt. Nam in eo quod adducis, hoc ſolum legitur, methodum traditam eſſe qua ratio ungulæ ad cylindrum quo continetur, inveſtigari queat, eamque notam fore, ſi quorundam inter ſe corporum rationes inventæ fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quæ ſit inter ungulam cylindrumque ſuum analogia, lectoribus diſquirenda relinquuntur: idque ipſe non neſcis. Quare non ſatis ingenue hic me diſſimulationis arguis, ubi ipſe contra quam ſentias, ſcribere videaris.

Jam vero de *palmari* errore quem mihi impingis videamus,

mus. Is circa verbum *continere* commiſſus eſt, ex quo non recte percepto factum eſt ſcilicet, ut, cum Quadraturam veſtram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omnesque item, qui me labefeciſſe eam judicarunt, cæcutierint. Ego ſignificationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quæ & P. Sarraſæ eſt, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, præterii. Igitur hic *palmaris* eſt error meus, quod nec P. Sarraſæ librum, nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortaſſe ſi ſciviſſem explicationem veſtram, propterea memorandam duxiſſem, cum parum adeo ad rem faciat, ſitque monſtroſa plane atque abſona, uti ex adjecto ſpecimine liquebit: quantum vero ea promoveritis deinde exponam. Propoſitio 40. lib. 10. eſt hujuſmodi. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *toties continere rationem ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæc ipſa ratio continet rationem ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H. Quam propoſitionem *juxta mentem*, ut ais, *autoris*, (variatâ tantùm phraſi ſcilicet) ſic nobis enarras. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* R S *in* X Y *ad ſolidum ex* T V *in* Z &, *conſtitui ex iis rationibus quæ toties multiplicatæ ſunt illarum rationum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* I K *in* N O *ad ſolidum ex* L M *in* P Q, *quoties hæ ipſæ rationes multiplicatæ ſunt earum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* A B *in* E F *ad ſolidum ex* C D *in* G H.

Pulchra vero explanatio! quam quia ego pervidere non valui, ſenſum convenientem ratiociniis veſtris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longe aliud ſcribere quam intelligi poſtulet? quiſve magis adhuc intricatum ſenſum theorematibus jam nunc nimium obſcuris affingere vellet? Omnes profecto qui vobis controverſiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* accepiſſe noſti, neque ulli hoc incidiſſe, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* conſtituerentur. Ecce vero ut præter eos quorum animadverſiones ad manus veſtras pervenere, eadem plane quæ nobis,

nobis, circa has propositiones & significationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Cartesio, quem si minus insignem Geometram quam *Algebristam* fuisse arbitraris, parum ex vero judicas. Ejus ad amicum epistolæ copia mihi facta est, cum jam diu exetasis nostra prodiisset, quâ quoniam non tantum id quod dixi comprobatur, sed & tota insuper ad opus Geometricum P. à S^to^ Vincentio pertinet, integram hic adscribere visum est. Gallicè sic habet.

MONSIEUR.

J'*Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je desirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j'avois bien de la peine à me resoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque chose & assez ce me semble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne soit facile, & qu'on ne pust escrire tout en une ou deux pages. Le reste n'est qu'un paralogisme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propositions qui ne servent qu'à embroüiller la matiere, & sont tressimples & faciles pour la pluspart, bien que la façon dont il les traite, les face paroistre un peu obscures. Pour trouver son paralogisme, j'ai commencé par la* 1134e *page, ou il dit: Nota autem est proportio segmenti* LMNK *ad segmentum* EGHF, *ce qui est faux, & la preuve qu'il en donne est fondée sur la* 39e *proposition en la page* 1121. *du mesme livre, ou il y a une erreur tresmanifeste, qui consiste en ce qu'il veut appliquer à plusieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des mesmes quantitez divisées. Car par exemple, ayant les* 4. *ordres de proportionelles*

2, 4, 8,   2, 8, 32.
&
2, 6, 18,   2, 10, 50.

bien qu'il soit vray que 8. *est à* 32. *en raison duoblée de ce que* 4. *est à* 8. *Et que* 18. *est aussi à* 50. *en raison doublée de ce que* 6. *est à* 10. *il n'est pas vray pour cela que* 8 † 18. *c'est à dire* 26. *soit à* 32 † 50. *c'est à dire* 82. *en raison double de celle qui est entre* 4 † 6. *c'est à dire* 10, & 8 † 10, *c'est à dire* 18. *Tous ses raisonnements ne sont fondez que sur cette faute, & ce qu'il escrit de*

Proportionalitatibus & de Ductibus, ne sert qu' à l'embarasser, & ne me semble d'aucun usage, pour ce que frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.

Quorum latinè hæc est sententia.

Libros tuos retinui diutius, quod remittere eos nolebam quin simul opinionem meam tibi exponerem de nova ista quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipso impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnulla in iis delibavi, è quibus satis tutò mihi pronunciare posse videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile sit; unâque aut alterâ paginâ explicari potuerit. Cætera merum paralogismum de quadratura circuli continent, multis propositionibus implicitum, quæque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleræque vero simplicissimæ sunt & facili ratione constant, licet tractandi methodus obscuriores reddiderit. Paralogismum quærere institui, initio facto ad paginam 1134. *ubi hoc ait: Nota autem est proportio segmenti* L M N K *ad segmentum* E G H F; *quod falsum est, pendet enim hujus demonstratio à propositione* 39, *pag.* 1121. *ejusdem libri, ubi manifestus error occurrit, dum pluribus quantitatibus conjunctim applicatur, quod de singulis seorsim fuerat ostensum. Etenim ex. gr. positis quatuor proportionalium ordinibus* 2, 4, 8, & 2, 8, 32,
2, 6, 18, 2, 10, 50,
licet verum sit rationem 8. *ad* 32. *duplicatam esse ejus quæ* 4. *ad* 8. *itemque rationem* 18. *ad* 50. *duplicatam esse ejus quæ* 6. *ad* 10. *non tamen idcirco verum est* 8 † 18. *hoc est,* 26. *esse ad* 32 † 50. *hoc est ad* 82. *in ratione duplicata ejus quæ* 4 † 6. *hoc est,* 10. *ad* 8 † 10. *hoc est,* 18. *Unicum ei fundamentum hæc vitiosa argumentatio; quæque de Proportionalitatibus scribit & de Ductibus, tantum majoribus ipsum difficultatibus involvunt, neque alicujus usus videntur, siquidem frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora.*

Vides, Vir Egregie, neque Cartesium, vestrum illud *Hoc est juxta mentem autoris*, agniturum fuisse, sed potius, quod res est, dicturum, desperatâ causâ hoc vobis effugium quæsitum, ut quadratura vestra ad instar Protei cujusdem aliâ atque-

aliâ

aliâ aſſumptâ formâ quantumlibèt arctè ſeſe conſtringentibus elaberetur. Verum age, inſpiciamus jam quo rem deducas, poſteaquam verbi *continere* novam ſignificationem elicuiſti, eâque vetera theoremata tam ſcitè interpolaſti. In Corollario propoſitionis 40. lib. 10. quò tam ſæpe provocas, id unum egiſſe videris, unas ex aliis difficultates nectendo, ut ſi quis argumentationis tuæ tenorem conſectari cupiat, is defeſſus abſiſtat priuſquam ad finem pervenerit. Ego ad eum uſque locum te ſecutus ſum, ubi ſpatia Y & Z aſſumi jubes: Inde non ulterius procedendum putavi. Adeo enim manifeſto vitio atque ἀγεωμετρησίας ibi laborat conſtructio tua, ut tibimet ipſi exploratum id eſſe dubitare nequeam: ſed quoniam alia evadendi ratio non occurrebat, ſperaſti, credo, in tanta obſcuritate nemini illud facile animadverſum iri. *Dein*, inquis, *aſſumantur duo plana Hyperbolica* Y & Z, *rectis alteri aſymptotorum parallelis incluſa.* Nullâ aliâ præcautione aſſumuntur quam quod rectis alteri aſymptotorum parallelis includi ea neceſſe ſit. De magnitudine utriuſque aut ratione quam inter ſe ſervare debeant nihil præcipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unum quodque eorum abſcindi poterit. Mox tamen rationem ſpatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare inſtituis, quas prius ſecundum certam determinationem aſſumpſiſti, tibique hoc demonſtrandum proponis, *Rationem totalem planorum* X *ad* T *tam eſſe multiplicem rationis totalis planorum* Y *ad* Z, *quàm ratio totalis ſolidorum* G H *ad* I K *multiplicata eſt rationis totalis ſolidi* L M *ad* N O. Quidnam, quæſo, abſurdius, quam de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quæ prorſus incerta ſit ac vaga? Equidem ex hoc ſolo ſatis liquere puto, quam fruſtra primæ Quadraturæ ſuppetias ferre tentaveris, cum in eo quod præcipuè tibi explicandum erat, tam inſigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ uſus ſis, ſi me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen ſcito perpetuum adverſus vos argumentum fore, quod rationem peripheriæ ad diametrum quam ſingulis quadraturis datam eſſe profitemini, ipſi tamen exhibere non poteſtis; non autor ipſe Quadraturæ, non tot ejus diſcipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus Ilium expugnatum ſit. Datam eſſe rationem, Euclides definivit, cui

possumus æqualem invenire. Quis autem ad vestram illam hoc pertinere credet, quæ irrito labore toto decennio quæsita est? Nam quod sufficere existimatis si modo viam commonstraveritis quâ emensâ ad quæsitum perveniatur, obstacula vero, atque innumeras difficultates quibus præsepta est, non removetis, videte cui persuadere possitis, eâ ratione tetragonismi negotium à vobis confectum esse. Illud sanè vos consequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minus expositi sitis ad promiscuos omnium insultus, difficilius etiam à peritioribus oppugnemini, paratioremque habeatis receptum. Facile enim acrius instantes proportionum & proportionalitatum vestrarum tenebris involvere potestis, atque efficere ut tandem veluti nox prælium dirimat. Hoc ipsum ne mihi eveniret, cum exetasin Quadraturæ conscriberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri posset, autorem ad absurdum compellerem, nimirum ut vel nolle se vel non posse Quadraturam suam absolvere fateretur. Eo fine ignota prius atque informia corpora dimensus sum, exhibitisque prioribus duabus solidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quam cognitis illis notam dixisset. Ad quas angustias redactum non aliâ ratione defendis, quam expostulando mecum quod autori tuo modum præscribere præsumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid* & *cui* scribam. Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec præscribo; sed hoc urgeo; ut quem ille modum se invenisse contendit, eum reapse utilem & efficacem esse demonstret. Atque ita, quid scripserim & in quem finem, me non nescivisse, satis jam tibi constare arbitror. Cui vero scripserim, ne hoc quidem puto me oblitum fuisse. Vides autem quam hac in parte longe diversum sonent Cartesii literæ atque Elogia vestra: quorum utris potius subscribendum sit aliorum judicio decerni malim quam meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturæ scire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quanto maturius ab errore suo resipiscet. Vale.

Dat. Hagæ-Com. 2. Oct.
1656.

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

ACCEDUNT EJUSDEM

Problematum quorundam illustrium Constructiones.

PRÆFATIO.

CIrca antiquum Tetragonismi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil est celebrius, recens operæ pretium nos fecisse rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus consecuti, Geometris ea demonstrata impertiri volumus. Namque & studiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipsâ ad rerum abditarum investigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem summâ contentione versati sint, aliqua superfuisse haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam sibi asserere conati sunt, variaque subinde commenta protulere, falsis vera miscentes. Verum à peritioribus omnia vel eversa fuisse vel contempta scimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimensio niteretur, præter unum illud, majorem esse eum inscripto sibi polygono, circumscripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus ostendimusque, quod duobus sumptis polygonis proportione mediis inter inscriptum circumscriptumque ipsis simile, minoris eorum perimeter circumferentia circuli major existit, reliquum vero

ro polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat. *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonstraturi sumus & difficillimum & contemplatione præcipue dignum videatur, alia tamen sunt non accuratiora modò, sed quæ & usu magis probentur; quæ sane hic in antecessum non recensebimus, quippe in sequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid studiis Geometriæ conferant exposuisse proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propositi tractationem instituerimus, primum ea tradendo quorum demonstratio consuetis Geometriæ elementis contenta est, deinde centrorum gravitatis quoque considerationem adhibendo: in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti, sed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda sit; expeditâ ratione ad Mechanicas constructiones, quæque vel subtilissimas earum minime frustretur. Quomodo item numeros exercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum* 96 *eruit, per dodecagona sola comprobari queat. Ex polygonis autem laterum* 10800, *cum iis qui veterem insistunt viam vix hi peripheriæ termini existant* 62831852 *&* 62831855, *ad diametrum partium* 20000000, *nostrâ Methodo isti prodiisse cernentur,* 6283185307179584, 6283185307179589; *semperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona*

gona

gona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere perſpeximus ſicuti & quadratum cujuſque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque conſtituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas ſubminiſtrat, & propius quodammodo ad perfectionem inſuperabilis problematis per hæc acceſſiſſe videmur. Certe ad Archimedeos peripheriæ limites conſtituendos, ſolo nunc inſcripti trigoni cognito latere indigemus. E ſexagintangulo autem inter hoſce eam contineri probamus 314159265 38 *&* 314159265 33, *poſitâ diametro partium* 10000000000, *cum ſolitâ methodo vix iſti producantur* 3145, 3140. *Adeo ut triplus jam & ultra ſit verarum hîc notarum numerus, ſicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem ſucceſſu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum ſui lateris triplum eſſe animadvertitur. Ergo poſthac ſi qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numeroſa polygona non refutabuntur, ſed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris inſimulare, quod hactenus ferè ſoliti ſunt, haud facile poſſint. Ad hæc ſi quid in ſubtenſarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes ſciunt, in eo contexendo ſi quid erit admiſſum aut aliunde perverſum irrepſerit, non difficile erit horum ope reſtituere, cum aliâ nunc ratione ex inſcriptis in circulo longitudinem arcuum quibus ſubtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio deſtitutis oſten-*

ostendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum investigare queant, ut nunquam duorum secundorum scrupulorum sit à vero dissensus, sæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda visum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum Cartesium, cujus viri inventis cum Philosophia universa tum Mathesis plurimùm illustrata est, nonnulla quæ huc spectent scriptis mandasse. Ea vero defuncto ipso in commentariis reperta feruntur, neque adhuc rescire potuimus quâ industriâ aut eventu hisce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus extat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset. Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minime comprobant: ipsa vero theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus meritò inserenda putavimus, quod causæ eorum à nostris pendeant inventis.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII,
CONST. F.
DE
CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI Circuli portioni, semicirculo minori, triangulum maximum inscribatur, & portionibus reliquis triangula similiter inscribantur, erit triangulum primo descriptum duorum simul quæ in portionibus reliquis descripta sunt minus quam quadruplum.

Esto circuli portio A B C, semicirculo minor, cujus diameter B D; maximum autem inscriptum sit triangulum A B C, hoc est, quod basin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inscribantur triangula item maxima A E B, B F C. Dico triangulum A B C minus esse quam quadruplum triangulorum A E B, B F C simul sumptorum. Jungatur enim E F, quæ secet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus A B bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum E A, E B, major dimidiâ A B. Quamobrem quadratum A B minus erit quam quadruplum quadrati E B vel E A. Sicut autem quadratum A B ad quadr. E B, ita est D B ad B G longitudine; quia quadratum quidem A B æquale est rectangulo quod à D B & circuli totius diametro continetur, quadratum vero E B æquale rectangulo sub eadem diametro & recta B G. Minor igitur est B D quam quadrupla B G. Sed & A C minor est quam dupla E F, quoniam hæc ipsi A B æquatur. Ergo patet triangulum A B C minus esse quam octuplum tri-

TAB. XXXVIII. Fig. 1.

anguli E B F. Huic autem triangulo æquantur singula A E B, B F C. Ergo utriusque simul triangulum A B C minus erit quam quadruplum. Quod erat ostendendum.

Theor. II. Prop. II.

Si fuerit circuli portio, semicirculo minor, & super eadem basi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abscindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem descripti.

TAB. XXXVIII. Fig. 2.

Esto circuli portio semicirculo minor A B C, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos basis rectæ A E, C E, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio semicirculo minor est. Porro ducatur F G, quæ contingat ipsam in vertice B; & jungantur A B, B C. Ostendendum est itaque, triangulum F E G majus esse dimidio trianguli A B C. Constat triangula A E C, F E G, item A F B, B G C æquicruria esse, dividique F G ad B bifariam. Utraque autem simul F E, E G, major est quam F G; ergo E F major quam F B, vel quam F A. Tota igitur A E minor quam dupla F E. Quare triangulum F E G majus erit quarta parte trianguli A E C. Sicut autem F A ad A E, ita est altitudo trianguli A B C ad altitudinem trianguli A E C, & basis utrique eadem A C. Ergo, quum F A sit minor quam subdupla totius A E, erit triangulum A B C minus dimidio triangulo A E C. Hujus vero quarta parte majus erat triangulum F E G. Ergo triangulum F E G majus dimidio trianguli A B C. Quod ostendendum fuit.

Theor. III. Prop. III.

Omnis circuli portio, semicirculo minor, ad maximum triangulum inscriptum majorem rationem habet quam sesquitertiam.

Esto

Esto Circuli portio, semicirculo minor, cui maximum sit inscriptum triangulum A B C. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inscribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula A D B, B E C. Itaque minus est triangulum A B C quam illorum simul quadruplum *: ac proinde spatium aliquod adjungi potest triangulo A B C, quod una cum ipso minus etiam sit quam quadruplum dictorum simul triangulorum A D B, B E C. Esto itaque eâ ratione adjectum triangulum A F C, ut totum spatium A B C F minus sit quam quadruplum triangulorum A D B, B E C. Et porro in residuis portionibus maxima triangula inscribi intelligantur; itemque in residuis semper, donec portiones quibus postremùm inscribentur simul minores sint triangulo A C F, hoc enim fieri potest. Itaque & triangula postremùm inscripta simul triangulo A C F minora erunt. Quia autem spatii A B C F quarta parte majora sunt duo simul triangula A D B, B E C. Rursusque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inscribuntur. Et horum quartâ majora similiter, quæ deinceps: atque ita continue, si plura fuerint descripta. Erit propterea spatium ex quadrilatero A B C F & cæteris inscriptis triangulis, & triente eorum, quæ postremò inscripta erunt, compositum, majus quam sesquitertium ipsius quadrilateri A B C F. Hoc enim ab Archimede demonstratum est, quod si fuerint spatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia simul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt sesquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones A D B, B E C descripta cum triente postremo discriptorum majora erunt tertia parte spatii A B C F. Sed triens dictus minor est triente trianguli A C F. Igitur dempto illinc triente postremò inscriptorum; à spatio autem A B C F ablato triangulo A F C, erunt triangula omnia intra portiones A D B, B E C descripta, majora triente trianguli A B C *. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni A B C inscripta major quam sesquitertia trianguli A B C, multoque magis portio ipsa. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 3.

* per. 1. huj.

* 33. 5. Elem.

Theor. IV. Prop. IV.

Omnis circuli portio, semicirculo minor, minor est duabus tertiis trianguli eandem cum ipsa basin habentis, & latera portionem contingentia.

TAB.XXXVIII. Fig. 4.

Esto circuli portio, semicirculo minor, A B C, & contingant ipsam ad terminos basis rectæ A D, C D, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem A B C minorem esse duabus tertiis trianguli A D C. Ducatur enim E F quæ portionem contingat in vertice B, & inscribatur ipsi triangulum maximum A B C. Quum igitur triangulum E D F majus sit dimidio trianguli A B C *, manifestum est ab illo partem abscindi posse, ita ut reliquum tamen majus sit dimidio dicti A B C trianguli. Sit igitur hoc pacto abscissum triangulum E D G. Et ducantur porro rectæ H I, K L, quæ portiones reliquas A M B, B N C in verticibus suis contingant, ipsisque portionibus triangula maxima inscribantur. Idemque prorsus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones residuæ simul minores sint quam duplum trianguli E D G. Erit igitur inscripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumscripta. Et quoniam triangulum E G F majus est dimidio trianguli A B C; & rursus triangula H E I, K F L, majora quam dimidia triangulorum A M B, B N C; idque eadem semper ratione in reliquis locum habet, ut triangula super portionum verticibus constituta, eorum quæ intra portiones ipsas descripta sunt, majora sint quam subdupla: apparet triangula omnia extra portionem posita etiam absque triangulo E G D majora simul esse quam dimidia triangulorum omnium intra portionem descriptorum. Atqui segmentorum in portione reliquorum triangulum quoque E G D majus est quam subduplum. Ergo triangulum E D F simul cum reliquis triangulis, quæ sunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius A B C. Quare multo magis spatium à rectis

* per. 2.huj.

rectis A D, D C & arcu A B C comprehensum majus erit portionis A B C dimidio. Ac proinde triangulum A D C majus quam portionis A B C sesquialterum. Quod erat demonstrandum.

THEOR. V. PROP. V.

Omnis circulus major est pylogono æqualium laterum sibi inscripto & triente excessus quo id polygonum superat aliud inscriptum subduplo laterum numero.

Esto circulus centro C; sitque ipsi inscriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum sit A B. Atque alterum item polygonum sit inscriptum, cujus bina latera A D, D B, subtendat A B. Hoc igitur priore polygono majus est. Sit autem excessus trienti æquale H spatium. Dico circulum majorem esse polygono A D B una cum spatio H. Ducantur enim ex centro rectæ C A, C B. Quoniam igitur portio circuli A D B major est quam sesquitertia trianguli A D B sibi inscripti *; erunt portiones A D, D B, simul majores triente trianguli A D B. Quamobrem & sector C A B major erit utrisque simul quadrilatero C A D B & triente trianguli A D B. Sicut autem sector C A B ad circulum totum, ita est quadrilaterum C D B A ad polygonum A D B, & ita quoque triens trianguli A D B ad trientem excessus polygoni A D B supra polygonum A B. Ergo manifestum est circulum quoque totum majorem fore polygono A D B una cum triente excessus quo polygonum A D B superat polygonum A B, hoc est, unà cum spatio H. Quod erat demonstrandum.

TAB. XXXVIII. Fig. 5.

* per. 3. huj.

THEOR. VI. PROP. VI.

Omnis circulus minor est duabus tertiis polygoni æqualium laterum sibi circumscripti & triente polygoni similis inscripti.

Esto

TAB. XXXVIII. Fig. 6.

Esto circulus cujus centrum A, & inscribatur ipsi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum sit B C; & aliud simile circumscribatur F E G, cujus latera circulum contingant ad occursum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem esse duabus tertiis polygoni F E G simul cum triente polygoni B C. Ducantur namque ex centro rectæ A B, A C. Igitur quoniam super basi portionis B D C consistit triangulum B E C, cujus latera portionem contingunt, erit ipsa minor duabus tertiis trianguli B E C *. Itaque si triangulo A B C addantur duæ tertiæ trianguli B E C, hoc est, duæ tertiæ excessus quadrilateri A B E C supra triangulum A B C, ex utrisque compositum spatium majus erit sectore circuli A B C. Idem est autem, sive triangulo A B C addantur duæ tertiæ excessus dicti, sive addantur duæ tertiæ quadrilateri A B E C, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli A B C: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri A B E C cum triente trianguli A B C. Ergo apparet sectorem A B C minorem esse duabus tertiis quadrilateri A B E C & triente trianguli A B C. Quare sumptis omnibus quoties sector A B C circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumscripti F E G & triente inscripti B C. Quod erat ostendendum.

* per. 4. huj.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia major est perimetro polygoni æqualium laterum sibi inscripti, & triente excessus quo perimeter eadem superat perimetrum alterius polygoni inscripti subduplo laterum numero.

TAB. XXXVIII. Fig. 7.

Esto circulus A B, centro O, cui inscribatur polygonum æquilaterum A C D, atque alterum duplo laterum numero A E C B D F. Sitque recta G I æqualis perimetro polygoni A E C B D F, G H vero æqualis perimetro poly-

goni A C D. Excessus igitur perimetrorum est H I; cujus triens I K adjiciatur ipsi G I. Dico totâ G K majorem esse circuli A B circumferentiam. Inscribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum A L E M C, quod sit duplo numero laterum polygoni A E C B D F. Et super lineis G H, H I, I K, triangula constituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis semidiametro circuli A B. Igitur quoniam G H basis æqualis est perimetro polygoni A C D, erit triangulum G N H æquale polygono, cui bis totidem sunt latera, hoc est, polygono A E C B D F. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis O A & O E, quarum hæc secet A C in P. Nam triangulum quidem A E O æquale est triangulo basin habenti A P & altitudinem radii O E. Quanta autem pars est triangulum A E O polygoni A E C B D F, eadem est recta A P perimetri A C D. Itaque polygonum A E C B D F æquabitur triangulo cujus basis æqualis perimetro A C D, altitudo autem radio E O: hoc est, triangulo G N H. Eâdem ratione, quoniam basis G I est æqualis polygoni A E C B D F perimetro, & altitudo trianguli G N I æqualis radio circuli, erit triangulum G N I æquale polygono A L E M C. Itaque triangulum H N I æquale excessui polygoni A L E M C supra polygonum A E C B D F. Trianguli autem H N I subtriplum est ex constr. triangulum I N K. Ergo hoc æquale erit dicti excessus trienti. Quare totum triangulum G N K minus erit circulo A B *. Altitudo autem trianguli æqualis est circuli semidiametro. Ergo evidens est rectam G K totâ circuli circumferentiâ minorem esse. Quod erat ostendendum.

* per 5. huj.

Hinc manifestum est, si à sesquitertio laterum polygoni circulo inscripti auferatur triens laterum polygoni alterius inscripti subduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus esse. Idem enim est, sive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ excessus quo ipsa superat perimetrum minorem, sive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit sesquitertium majoris perimetri mi-

nus triente minoris. Quare si à sexdecim inscripti dodecagoni lateribus duo latera inscripti hexagoni, hoc est, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit, aut si ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ semisse. Hoc autem ad constructionem mechanicam utile est, quoniam exigua est differentia, sicut postea ostendetur.

Manifestum etiam, in omni arcu qui semicircumferentiâ minor sit, si ad subtensam addatur triens excessus quo subtensa sinum superat, compositam arcu minorem esse.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, si ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab opposito diametri termino quæ circumferentiam secet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab intersectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, simul arcu abscisso adjacente majores.

TAB. XXXVIII. Fig. 8.

Esto circulus centro A, diametro B C; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat C D: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta B D, quæ circumferentiam secet in E: sitque E F diametro B C ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ C D duas tertias simul cum triente ipsius E F, arcu E C majores esse. Jungantur enim A E, E C; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti C D occurrat in G. Erit igitur G E ipsi G C æqualis, itemque D G; nam si centro G circumferentia describatur quæ transeat per puncta C, E, eadem transibit quoque per D punctum, quoniam angulus C E D rectus est. Ostensum autem fuit suprà, duas tertias quadrilateri A E G C una cum triente trianguli A E C simul majores esse sectore A E C *. Estque quadrilaterum A E G C æquale triangulo basin habenti

* per 6. huj.

benti

benti duplam C G, hoc eſt, C D, & altitudinem C A: triangulum vero A E C æquale triangulo baſin ipſi E F æqualem habenti & altitudinem dictam A C. Itaque apparet duas tertias quadrilateri A E G C ſimul cum triente trianguli A E C æquari triangulo qui baſin habeat compoſitam ex duabus tertiis C D & triente E F, altitudinem vero radii A C. Quare ejuſmodi quoque triangulum majus erit ſectore A E C. Unde liquet baſin ipſius, hoc eſt, compoſitam ex duabus tertiis ipſius C D & triente ipſius E F, majorem eſſe arcu C E. Quod erat demonſtrandum.

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti.

Eſto Circulus cujus A centrum; & inſcribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus C D: ſimileque aliud circumſcribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum ſit E F. Dico circuli totius circumferentiam minorem eſſe duabus tertiis ambitus polygoni C D & triente ambitus polygoni E F. Ducatur namque diameter circuli B G, quæ ſimul inſcripti polygoni latus C D medium dividat in H, & circumſcripti latus E F in G, (conſtat autem G fore punctum contactus lateris E F,) Et ponatur H L æqualis ipſi H G, & jungantur A C, B C & producantur, occurrátque B C lateri E F in K, producta autem A C incidet in E angulum polygoni circumſcripti. Quoniam igitur H L æqualis H G, erit B L dupla ipſius A H: Ideoque ut G A ad A H, ita G B ad B L. Major autem eſt ratio H B ad B L, quam G B ad B H; quoniam hæ tres ſeſe æqualiter excedunt G B, H B, L B. Itaque major erit ratio G B ad B L, hoc eſt, G A ad A H, quam duplicata rationis G B ad B H. Sicut autem G A ad A H, ita eſt E G ad C H; & ſicut G B

TAB. XXXIX. Fig. 1.

 ad

ad B H, ita K G ad C H. Ergo major erit ratio E G ad C H, quam duplicata ejus, quam habet K G ad C H. Quare major ratio E G ad K G, quam K G ad C H. Ideoque duæ ſimul E G, C H omnino majores duplâ K G. Et ſumptis omnium trientibus, erunt trientes utriuſque E G & C H ſimul majores duabus tertiis K G. Quamobrem addito utrimque ipſius C H triente, erit triens E G cum duabus tertiis C H, major duabus tertiis K G cum triente C H. Hiſce vero minor etiam eſt arcus C G *. Igitur duæ tertiæ C H ſimul cum triente ipſius E G majores omnino ſunt eodem arcu C G. Unde ſumptis omnibus toties quoties arcus C G circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni C D, cum triente perimetri polygoni E F, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat oſtendendum.

* per præced.

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor eſt ſinus ſui beſſe & tangentis triente.

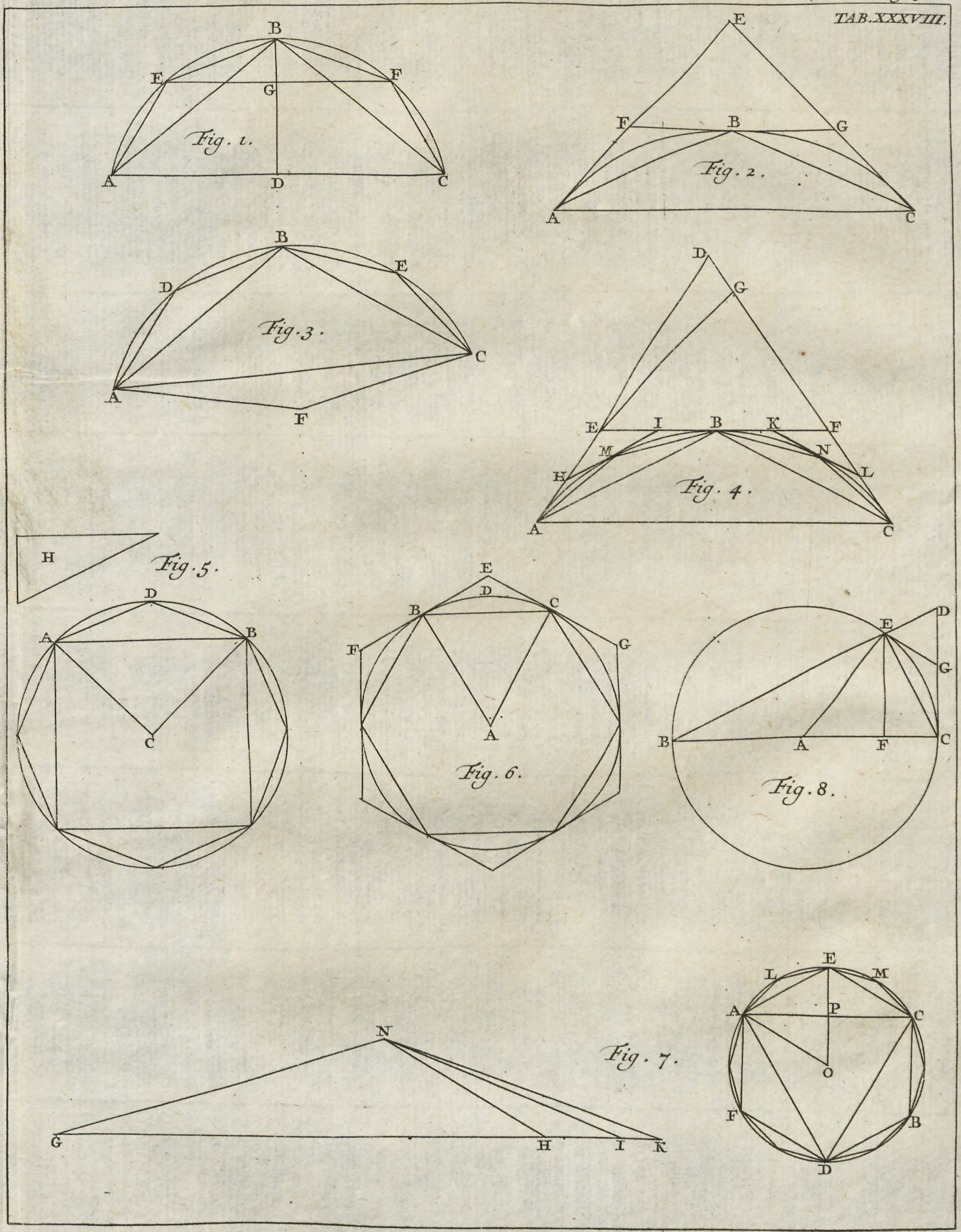
Problema I. Prop. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

MInorem eſſe peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam ſeſquiſeptimam: majorem vero quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes oſtendit inſcripto circumſcriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonſtrabimus.

Quia enim latus inſcripti circulo dodecagoni majùs eſt partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc eſt, perimeter inſcripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inſcripti eſt radii ſextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit amplius quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens exceſſus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente exceſſus, quo perimetrum hexagoni ſuperat, major erit aggregato partium

$62116\frac{1}{3}$


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

$62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc eſt, partibus 62822. Atque hiſce proinde omnino major erit circuli peripheria *. Eſt autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit.

* per 7. huj.

Rurſus quoniam latus dodecagoni inſcripti minus eſt partibus $5176\frac{2}{5}$. Erunt octo latera, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{5}$. Item quia latus dodecagoni circumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{5}$. Sed iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{5}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus. Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum.

* per 9. huj.

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693: cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ: & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies fiunt 628318250. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus

 addi-

additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & sexagecuplum ipsarum, hoc est 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod si verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inscripti quidem latus, calculo Ludolphi Coloniensis, Arithmetici nobilis, inventum est partium 58177640912684919 non unâ amplius, subtenditurque duobus scrup. primis; circumscripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni subduplo laterum numero inscripti, quod est 116355276902613523 non unâ minus. Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium 6283185307179584; minor autem quam 6283185307179589, qualium radius 10000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inscripti circumscriptique polygoni istius lateribus, invenietur tantum majorem esse peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum amplius quam duplum numerum esse à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita se habet, semperque evenire necesse est quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quæ postea trademus, triplum numerum notarum facile obtineri apparebit.

Problema II. Prop. XI.

Rectam sumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Ostensum est superius, quod octo inscripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora sunt peripheriâ dimidiâ. In constructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam si quatermillesima diametri pars accedat longitudini sic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod sic fiet manifestum. Quarum partium radius est 10000, earum latus dodecagoni inscripti circulo est amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui si addantur partes 5, hoc est, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem esse circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus au-

tem

tem dodecagoni inscripti facile invenitur, quia radius peripheriæ sextantem subtendit. Estque hæc ratio accuratior quam si triplâ sesquiseptimâ utamur. Nam secundum eam excedetur $\frac{1}{2}$ peripheriæ longitudo amplius quam $\frac{1}{100}$ diametri.

ALITER.

Esto datus circulus cujus B C diameter. Dividatur semicircumferentia B C bifariam in D. reliqua vero trifariam in E & F. Et jungantur D E, D F, quæ secent diametrum in G & H. Erit trianguli G D H latus alterum una cum basi G H quadrante B D exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri B C. Sciendum est enim fieri D G vel D H duobus inscripti dodecagoni lateribus æquales. G H autem lateri dodecagoni circumscripti. Unde quidem junctas D G & G H majores esse constat quadrante B D. Nam quia per 8. huj. octo latera dodecagoni circulo inscripti cum quatuor lateribus circumscripti majora sunt peripheriâ totâ, ideo sumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inscripti cum latere uno circumscripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inscripti dodecagoni minus est quam partium 51764 qualium B C 200000: erunt latera duo, hoc est, G D, minor quam 103528. Circumscripti autem dodecagoni latus minus est partibus 53590, ipsa nimirum G H. Itaque junctæ una D G, G H efficiunt minus quam 157118. At quadrantem B D constat ex præcedentibus majorem esse quam 157079. Ergo differentia minor est quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri B C.

TAB. XXXIX. Fig. 2.

ALITER.

Tribus semidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inscripti quadrati; composita semicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{18000}$ diametri brevior sit. Latus quadrati est majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum est facile demonstratur.

Vel

Vel potius sex semidiamestris addatur $\frac{1}{5}$ dicti lateris quadrati inscripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

Problema III. Prop. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem sumere.

TAB. XXXIX. Fig. 3.

Esto datus circumferentiæ arcus C D, primum quadrante minor, cui rectam æqualem sumere oporteat. Dividatur arcus C D bifariam in E, sitque subtensæ C D æqualis recta F G. Duabus vero C E, E D, quæ subtendunt arcus dimidios, æqualis F H. Et ipsi F H jungatur H I triens excessus G H. Erit tota F I arcui C D æqualis ferè: adeo ut unâ sui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura sit, etiamsi arcus C D quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si fuerit datus non major peripheriæ sextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{6000}$ sui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem esse arcubus rectas eo modo inventas constat ex Theoremate 7. huj. De quantitate autem differentiæ est ostendendum.

Primum itaque ponendo arcum C D quadranti peripheriæ æqualem, erit C D recta, hoc est, F G, latus quadrati circulo inscripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. C E autem vel E D latus inscripti octogoni, ideoque major quam 76536. Est autem duplæ E D æqualis F H. Ergo hæc major quam 153072. Quare excessus G H major quam 11650: Et hujus triens H I major quam 3883. Ideoque tota F I major quam 156955. Arcus autem C D cum quadranti æqualis ponitur, minor est quam 157080. Itaque minus ab hoc discrepat recta F I quam partibus 125, qualium ipsa est 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1200}$ ipsius F I.

Si vero sextans peripheriæ sit arcus C D, erit recta C D, hoc est, F G, latus hexagoni inscripti, ideoque partium 100000, & C E vel E D latus dodecagoni, ac proinde major

jor quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla F H major quam $10352\frac{3}{4}$. unde G H major quam $352\frac{3}{4}$; & H I major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur F I major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem C D, ſextans peripheriæ, minor eſt quam 10472. Ergo deficiunt lineæ F I partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{6000}$ F I. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus eſt in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimenſione uti voluerimus; ſed numero pares: Earumque partium ſubtenſis ſimul ſumptis adjungendus eſt triens exceſſus quo ipſæ ſuperant aggregatum earum quæ arcubus duplis ſubtenduntur. Ita namque componetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, ſi arcus reliqui ad ſemicircumferentiam longitudo inveniatur aut ſupra eandem exceſſus, aut reliqui ad circumferentiam totam, ſi dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

Theor. X. Prop. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inſcripti, proportione medium eſt inter latus polygoni ſimilis circumſcripti, & dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero.

IN circulo cujus centrum A, radius A B, ſit latus inſcripti polygoni æquilateri B C; & latus circumſcripti ſimilis polygoni D E ipſi B C parallelum. Ergo producta A B tranſibit per D, & A C per E. Et ſi ducatur C F ipſi A B ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo numero laterum. Itaque oſtendendum eſt, B C mediam eſſe proportione inter E D & C F. Ducatur A G, quæ dividat E D bifariam, itaque erit ipſa quoque circuli ſemidiameter & æqualis A B. Et quoniam eſt ut E D ad C B, ſic D A ad A B, hoc eſt, D A ad A G; ſicut autem D A

TAB. XXXIX. Fig. 4.

ad A G, ita B C ad C F, propter triangulos similes D A G, B C F. Erit proinde ut E D ad C B, ita quoque C B ad C F. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

TAB. XXXIX. Fig. 5.

Esto linea B C divisa æqualiter in R; & inæqualiter in F, sitque segmentum majus F C; & fiat B O æqualis utrique simul B C, C F; B M vero utrique B C, C R. Dico majorem esse rationem R B ad B F, quam triplicatam ejus, quam habet O B ad B M. Sumatur enim ipsi O M æqualis utraque harum M L, L P. Quoniam igitur M O ipsi R F æqualis est, (nam hoc ex constructione intelligitur) erit P O tripla ipsius F R. Sed & B M tripla est B R. Ergo ut B R ad B M, ita F R ad P O. Et permutando ut B R ad F R, sic B M ad P O. Major autem est B O quam B M. Ergo major erit ratio B O ad O P, quam B R ad R F: & per conversionem rationis minor O B ad B P, quam R B ad B F. Porro quoniam æquales sunt O M, M L, major erit ratio B O ad O M, quam B M ad M L: & per conversionem rationis minor O B ad B M, quam M B ad B L. Eodem modo minor adhuc ostendetur ratio M B ad B L, quam L B ad B P. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet O B ad B M minor erit quam composita ex rationibus O B ad B M, B M ad B L, & B L ad B P, hoc est, quam ratio O B ad B P. Major autem erat R B ad B F, quam O B ad B P. Ergo omnino major erit ratio R B ad B F, quam triplicata rationis O B ad B M. Quod erat propositum.

THEOR. XI. PROP. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor est minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum similium, quorum alterum ordinate circulo inscriptum sit, alterum circumscriptum.

ptum. Et circulus minor est polygono istis simili cujus ambitus majori mediarum æquetur.

Esto circulus B D, cujus centrum A. Et inscribatur ei polygonum æquilaterum B C D L, simileque circumscribatur lateribus parallelis H K M N. Sitque perimetro polygoni H K M N æqualis recta T, perimetro autem B C D L æqualis Z. Et inter Z & T duæ sint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli B D minorem esse rectâ X. Et si fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, simile autem sit polygono B C D L aut H K M N; Dico circulum B N minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli P E, quæ dividat bifariam latera parallela B C, H K, inscripti circumscriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris H K, & B C secabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta A C K, quæ utriusque polygoni angulos C & K bifariam secet, nam hoc ab eadem recta fieri constat; & jungatur C E. Ipsi autem C E ponatur æqualis C F; sitque duabus his C R, C F tertia proportionalis C G. Ergo qualis polygoni inscripti latus est C E sive C F, talis circumscripti latus erit C G*. Ideoque duæ tertiæ C F cum triente C G simul majores erunt arcu E C *. Sit autem duabus tertiis C F cum triente C G æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu E C.

TAB. XXXIX. Fig. 6.

* per 13. huj.

* per 9. huj.

Et quoniam se habet C R ad C F, ut C F ad C G; erit quoque dupla C R una cum C F ad triplam C R, hoc est, utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R, ut dupla C F una cum C G ad triplam C F: vel sumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ C F una cum $\frac{1}{3}$ C G ad C F, hoc est, ut S ad C F. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R eadem erit triplicatæ rationi S ad C F. Major autem est ratio R B ad B F quam triplicata ejus, quam habet utraque simul B C, C F ad utramque B C, C R *. Ergo major eadem ratio R B ad B F quam triplicata ejus quam habet S ad

* per lemma præc.

 C F,

C F, hoc eſt, quam cubi S ad cubum C F. Sicut autem R B ad B F, ita eſt cubus R B ad id quod fit ex quadrato R B in B F. Ergo major quoque ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F. Quadrato autem R B in B F minus eſt rectangulum ſub R B, B G, in F C; quod ſic oſtenditur. Quia enim proportionales ſunt R C, C F, C G, Erit id quo major mediam excedit, hoc eſt F G, major quam quo media minimam, hoc eſt, quam F R. Major autem eſt F C quam F B. Ergo omnino major erit ratio C F ad F R, quam B F ad F G. Et per converſionem rationis, minor ratio F C ad C R, quam F B ad B G. Et permutando minor F C ad F B, quam C R ſeu R B ad B G: hoc eſt, (ſumptâ communi altitudine B R) quam quadrati R B ad rectangulum R B G. Unde quod fit ex rectangulo R B G in F C minus erit quam quod ex quadrato R B in F B, uti dictum fuit. Quum itaque major oſtenſa fuerit ratio cubi R B ad quadratum R B in B F, quam cubi S ad cubum C F; omnino quoque major erit ratio cubi R B ad ſolidum ſub rectangulo R B G in F C, quam cubi S ad cubum C F. Et permutando major ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G in F C ad cubum C F; hoc eſt, quam rectanguli R B G ad quadratum C F. Eſt autem quadrato C F æquale rectangulum G C R, hoc eſt rectangulum ſub G C, R B, quia proportionales ſunt C R, C F, C G. Itaque major erit ratio cubi R B ad cubum S, quam rectanguli R B G ad rectangulum ſub G C, R B, hoc eſt, quam B G ad G C. Sicut autem B G ad G C, ita R C ad E K. Quia enim eſt C R ad C G, ut quadratum C R ad quadratum C F ſeu quadratum C E: ut autem quadratum C R ad quadratum C E, ita eſt P R ad P E diametrum: Erit idcirco C R ad C G, ut P R ad P E. Unde dupla C R, hoc eſt, C B ad C G, ut dupla P R ad P E, hoc eſt, ut P R ad P A. Et dividendo, B G ad G C, ut R A ad A P, ſeu A E, hoc eſt, ut R C ad E K, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi R B ad cubum S, hoc eſt, ratio triplicata

R B

R B ad S, quam R C ad E K. Eſt autem S major oſtenſa arcu E C. Ergo omnino major erit ratio triplicata R B ſeu R C ad æqualem arcui E C, quam R C ad E K. Sicut autem R C ad arcum E C, ita eſt perimeter polygoni B C D L, hoc eſt, linea Z ad circumferentiam circuli B D; Et ſicut R C ad E K, ita perimeter polygoni B C D L ad perimetrum polygoni H K M N, hoc eſt, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam B D, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem eſt rationi Z ad T. Itaque major eſt ratio ipſius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonſtrandum.

Sciendum eſt autem ipſam X minorem eſſe duabus tertiis Z & triente T: hoc eſt, duabus tertiis perimetri polygoni inſcripti & triente circumſcripti, quibus alioqui minorem eſſe circuli circumferentiam conſtat ex præcedentibus. Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum ſecundum Arithmeticam proportionem, quæ major eſt minore mediarum ſecundum proportionem Geometricam.

Jam vero & de polygono Y demonſtrabimus, ipſum videlicet circulo B D majus eſſe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum ſimile H K M N rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. H K M N ipſi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. H K M N rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eſt, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum H K M N ad circulum B D, ita eſt perimeter ipſius polygoni, hoc eſt, linea T ad circuli B D circumferentiam; quoniam polygonum æquale eſt triangulo baſin habenti perimetro ſuæ æqualem & altitudinem radii A E, circulus autem æqualis ejuſdem altitudinis triangulo cujus baſis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum B D ſicut X ad circumferentiam B D. Eſt autem X major oſtenſa quam B D circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo B D. Quod erat demonſtrandum.

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

Theor. XII. Prop. XV.

SI inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem.

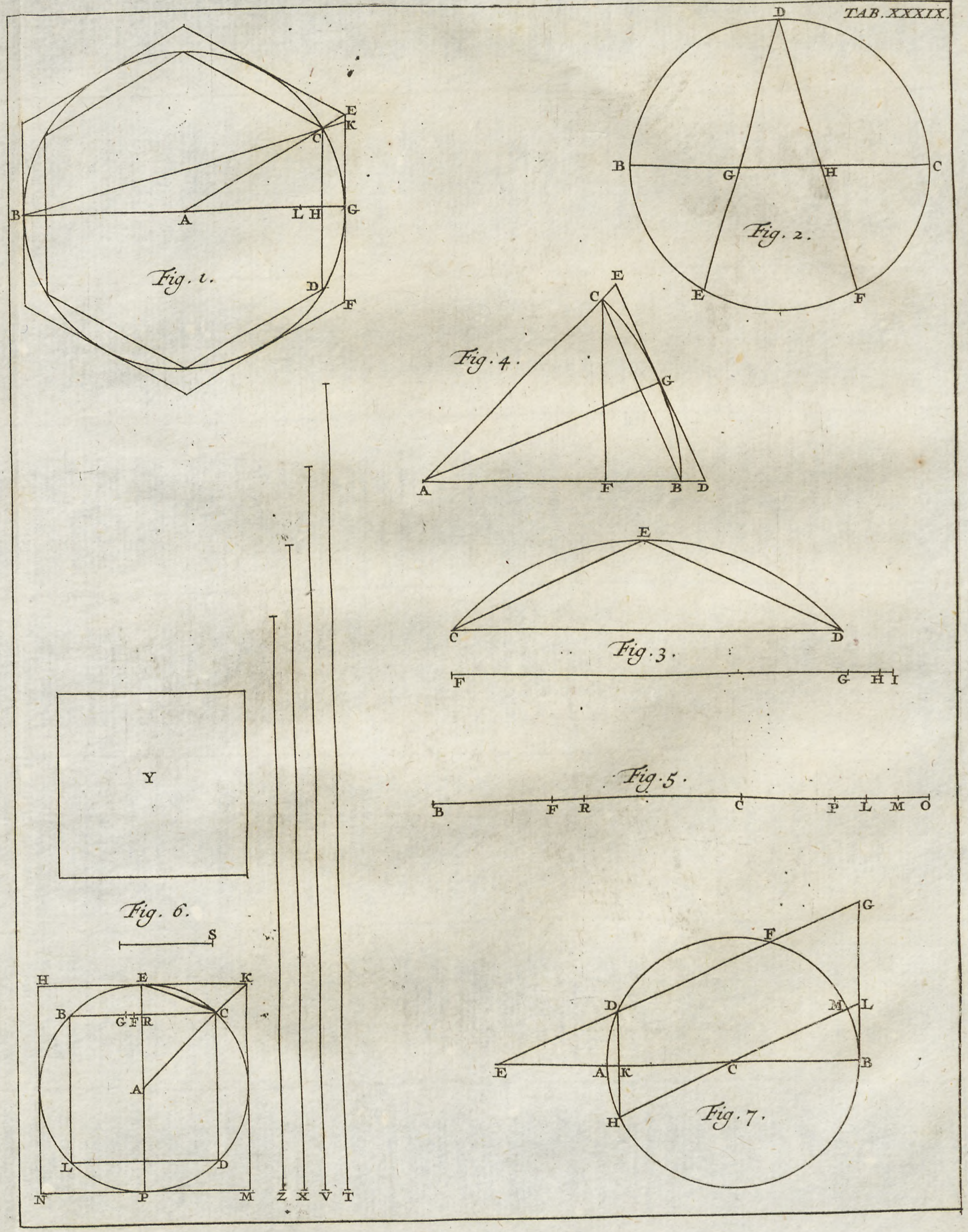
TAB. XXXIX. Fig. 7.

ESto deſcriptus circulus centro C, cujus diameter A B. Hæc autem producatur verſus A, interque ipſam & circumferentiam ponatur E D recta radio A C æqualis. Quæ producta ſecet circumferentiam in F, occurratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem B G majorem eſſe arcu B F. Ducatur enim per centrum recta H L parallela E G, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti vero B G in L. Et jungatur D H, quæ diametrum ſecet in K. Similes itaque ſunt trianguli E D K, C H K, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus E D æquale eſt lateri H C, ſuntque hæc latera æqualibus angulis ſubtenſa. Ergo æquale etiam latus D K lateri K H. Itaque C A ſecat bifariam ipſam D H, itemque arcum D A H. Arcus igitur D H ſive huic æqualis F M duplus eſt ad arcum A H. Ipſi autem A H æqualis eſt arcus M B. Igitur arcus F B triplus erit ad arcum A H. Porro quoniam H K ſinus eſt arcus H A, ejuſdemque tangenti æquatur L B, erunt duæ tertiæ H K & triens L B ſimul majores arcu A H *. Quare ſumptis omnium triplis erit dupla H K, hoc eſt, H D ſive G L una cum L B major arcu A H triplo, hoc eſt, arcu F B. Apparet igitur totam G B arcu F B majorem eſſe.

* per 9. huj.

Hoc

TAB. XXXIX.



Hoc Theorema alterum eſt ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonſtraſſe ipſe videri voluit, argumentatione uſus quæ meram quæſiti petitionem continet. Sed & alterum ſubjungemus, quod utile eſt imprimis & contemplatione digniſſimum.

THEOR. XIII. PROP. XVI.

SI diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad terminum diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem.

Eſto circulus, cujus diameter A B; quæ producatur, & ſit A C ſemidiametro æqualis. Et ducatur recta C L, quæ circumferentiam ſecundò ſecet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam B L arcu B E minorem eſſe. Jungantur enim A E, E B, poſitâque A H ipſi A E æquali ducatur H E & producatur, occurratque tangenti in K. Denique ſit E G diametro A B ad angulos rectos, E D vero tangenti B L. Quoniam igitur iſoſceles eſt triangulus H A E, erunt anguli inter ſe æquales H & H E A. Quia autem angulus A E B rectus eſt, etiam recto æquales erunt duo ſimul H E A, K E B. Verùm duo quoque iſti H & H K B uni recto æquantur, quoniam in triangulo H K B rectus eſt angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo H E A, relinquentur inter ſe æquales anguli K E B, H K B. Triangulus igitur iſoſceles eſt K B E, ejuſque latera æqualia E B, B K. Eſt autem B D æqualis E G. Ergo D K differentia eſt quâ B E excedit E G. Porro quoniam eſt A G ad A E, ut A E ad A B, erunt duæ ſimul A G, A B majores duplâ A E *. Ideoque A E, hoc eſt, A H minor quam dimidia utriuſque ſimul

TAB. XL. Fig. 1.

* 25. 5. Elem.

ſimul A G, A B; hoc eſt, minor quam C A cum dimidia A G. Quare ablatâ utrimque C A, erit C H minor dimidiâ A G. C A vero dimidiâ A G major eſt. Ergo ſi addatur A C ad A G, erit tota C G major quam tripla ipſius C H. Quia autem ut H G ad G E, ita eſt E D ad D K; ut autem G E ad G C, ita L D ad D E: Erit ex æquo in proportione turbata ut H G ad G C, ita L D ad D K. Et per converſionem rationis & dividendo, ut G C ad C H, ita D K ad K L. Ergo etiam D K major quam tripla K L. Erat autem D K exceſſus ipſius E B ſupra E G. Ergo K L minor eſt triente dicti exceſſus. K B autem æqualis eſt ipſi E B ſubtenſæ. Ergo K B unà cum K L, hoc eſt, tota L B omnino minor erit arcu B E*. Quod erat demonſtrandum.

* *per 7. huj.*

Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta B A diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ C L fiat tangens intercepta B L ſemper minor arcu abſciſſo B E.

Porro uſus hujus Theorematis multiplex eſt, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita ſint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui ſubtenſa aſſignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata ſunt.

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera.

TAB. XL. Fig. 2.

Eſto circuli portio A B C, (ponatur autem ſemicirculo minor, quoniam cæteræ ad propoſitum non faciunt) & diameter portionis ſit B D, quæ bifariam ſecetur in E. Itaque oſten-

oſtendendum eſt primò centrum gravitatis portionis A B diſtare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro ſitum ſit, alibi oſtendimus. Ducatur per E recta baſi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur K I, H L baſi A C ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, conſtituant rectangulum K L. Quoniam igitur portio ſemicirculo minor eſt, conſtat rectanguli dicti dimidium F L contineri intra ſegmentum A F G C, atque inſuper ſpatia quædam A F I, L G C. Alterum vero rectanguli K L ſemiſſem K G complecti ſegmentum F B G unà cum ſpatiis F B K, B G H. Quæ ſpatia quum ſint tota ſupra rectam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum ſupra eandem ſitum erit. Eſt autem E punctum in ipſa F G centrum grav. totius rectanguli K L. Igitur ſpatii reliqui B F I L G B centrum grav. erit infra rectam F G. Sed & ſpatiorum A F I, L G C commune gravitatis centrum eſt infra eandem F G. Ergo magnitudinis ex ſpatiis hiſce & dicto ſpatio B F I L G B compoſitæ, quæ eſt portio ipſa A B C, centrum gravitatis infra lineam F G reperiri neceſſe eſt, ideoque infra E punctum.

TAB. XL. Fig. 3.

Eadem verò diameter B D ſecetur nunc in S, ita ut B S ſit ſeſquialtera reliquæ S D. Dico centrum grav. portionis A B C minus diſtare à vertice B quam punctum S. Sit enim B D P totius circuli diameter. & ducatur per S recta baſi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis B D, rectum vero latus æquale S P. Et occurat baſi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum F S æquale eſt rectangulo B S P, hoc eſt, ei quod ſub B S & latere recto parabolæ continetur, tranſibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ B F, B G intra circumferentiam cadent, ſed reliquæ F H, G K erunt exteriores. Hoc enim oſtenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ N L, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum N L æquale eſt rectangulo B L P, quadratum vero

M L rectangulo contento lineis B L, S P: rectangulum autem B L P majus eo quod sub B L, S P continetur: erit quadratum N L majus quadrato M L, & N L linea major quam M L. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ B F totam extra parabolam ferri necesse est, eâdemque ratione partem B G. Rursus quia rectangulum B D P æquale est quadrato D A; rectangulum verò sub B D, S P contentum quadrato D H; erit H D major quam A D potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ F A, itemque G C intra parabolam cadent. Fiunt igitur spatia quædam F N B M, & B Q G, itemque alia H F A, G C K. Quorum hæc cum tota sint infra lineam F G, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis H B K centrum grav est in ipsa F G, nimirum S punctum *. Ergo partis reliquæ A F M B Q G C centrum grav. erit supra rectam F G. Sed supra hanc situm quoque apparet centrum grav. spatiorum F M B N, B Q G, quum tota sint supra ipsam F G. Ergo & spatii ex hisce duobus & A F M B Q G C compositi, hoc est, portionis circuli A B C centrum grav. supra lineam F G reperietur: quumque sit in B D diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat ostendendum.

* 8. lib. 2. Archim. de Æquipond.

Theor. XV. Propos. XVIII.

Circuli portio semicirculo minor ad inscriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam sesquitertiam, minorem vero quam diameter portionis reliquæ tripla sesquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis basin.

Sit

SIt portio ſemicirculo minor, cui inſcriptum triangulum maximum A B C. Diameter autem portionis ſit B D; & diameter circuli à quo portio reſecta eſt, B F, centrum E. Oſtendendum eſt primo, portionis A B C ad triangulum inſcriptum majorem eſſe rationem quam ſeſquitertiam. Eſto portionis A B C centrum grav. punctum G, & ſecetur D F in H, ut ſit H D dupla reliquæ H F.

TAB. XL. Fig. 4.

Quoniam igitur F B eſt dupla E B; D B autem minor quam dupla G B. Erit major ratio F B ad B D, quam E B ad B G. Et per converſionem rationis, minor B F ad F D, quam B E ad E G. Et permutando minor B F ad B E, (quæ proportio dupla eſt) quam F D ad E G. Igitur F D major eſt quam dupla E G. Ipſius autem F D duas tertias continet H D. Ergo H D major eſt quam ſeſquitertia E G. Sicut autem H D ad E G, ita eſt portio A B C ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperboles Ellipſis & Circuli quadratura *. Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum A B C quam ſeſquitertia.

* Vide ſupra p. 324.

Quod autem ad triangulum A B C portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius D F ad diametrum circuli B F unà cum tripla E D, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut B R ſit ſeſquialtera reliquæ R D. Ergo cadit R punctum inter G & D * quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis in portione A B C. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ H D ad E G, ut modo dictum fuit; minor autem ſit ratio H D ad E G, quam H D ad E R: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum ratio quam H D ad E R, ſive quam H D quinquies ſumpta ad quintuplam E R. Atqui H D, (cum ſit æqualis duabus tertiis D F) quinquies ſumpta æquabitur decem tertiis, hoc eſt, triplæ ſeſquitertiæ D F. E R verò quæ continet E D & duas quintas ipſius D B, ſi quinquies ſumatur, æquabitur duplæ B D & quintuplæ E D; hoc eſt, duplæ totius E B atque inſuper triplæ E D. Igitur appa-

* per præced.

ret portionem A B C ad inſcriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam ſeſquitertiam D F ad duplam E B, hoc eſt, diametrum B F, unà cum tripla E D. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. XVI. PROPOS. XIX.

Arcus quilibet ſemicircumferentiâ minor, major eſt ſuâ ſubtenſâ ſimul & triente differentiæ quâ ſubtenſa ſinum excedit. Idem verò minor quam ſubtenſa ſimul cum ea quæ ad dictum trientem ſeſe habeat, ut quadrupla ſubtenſa juncta ſinui ad ſubtenſam duplam cum ſinu triplo.

TAB. XL. Fig. 5.

Eſto circulus cujus D centrum, diameter F B. Et ſit arcus B A ſemicircumferentiâ minor, cui ſubtenſa ducatur B A, ſinus autem A M: quæ nimirum diametro F B ſit ad angulos rectos. Porro ipſi A M ſit æqualis recta G H, & G I æqualis ſubtenſæ A B. Exceſſus igitur eſt H I; cujus triens I K ipſi G I adjiciatur. Oſtendendum eſt primo, arcum A B totâ G K majorem eſſe. Hoc autem ex Theoremate 7. eſt manifeſtum. At cum ipſi G I additur IO quæ ad I K trientem ipſius H I rationem habeat, quam quadrupla G I una cum G H ad duplam G I cum tripla G H. Dico totam G O arcu A B majorem eſſe. Conſtituantur enim ſuper lineis G H, H I, IO, triangula quorum communis vertex ſit L, altitudo autem æqualis radio D B. Et jungatur D A, ducaturque diameter circuli C E quæ rectam A B bifariam dividat in N, arcum vero A B in E. Et jungantur A E, E B.

Quoniam igitur O I eſt ad I K ut quadrupla G I unà cum G H ad duplam G I cum tripla G H; ſumptis conſequentium triplis erit O I ad I H (hæc enim tripla eſt I K,) ut quadrupla G I unà cum G H ad ſexcuplam G I cum noncupla G H. Et componendo, O H ad H I, ut decupla utriuſ-

utriusque I G, G H ad sexcuplam I G cum noncupla G H: vel sumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum simul G I, G H ad duplam G I cum tripla G H. Est autem eadem ratio linearum G I ad G H, hoc est, B A ad A M, quæ B D ad D N, propter similes triangulos B A M, B D N. Ergo etiam O H ad H I, ut $\frac{10}{3}$ utriusque simul B D, D N ad duplam B D cum tripla D N; hoc est, ut $\frac{10}{3}$ N C ad diametrum E C cum tripla D N. Hac autem ratione minor est ratio portionis A E B ad A E B triangulum *. Ergo dictæ portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam O H ad H I, hoc est, quam trianguli O H L ad triangulum I H L. Triangulum autem I H L æquale est triangulo A E B. Quod sic ostenditur. Triangulum enim G H L æquale est triangulo D A B, quoniam bases & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam G I æqualis est rectæ A B, erit triangulum G I L æquale duobus simul triangulis D A E, D B E, hoc est, quadrilatero D A E B. Itaque triangulum H I L triangulo A E B æquari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio A E B ad triangulum sibi inscriptum A E B minorem quoque rationem quam triangulum O H L ad idem triangulum A E B. Quamobrem triangulum O H L portione A E B majus erit. Et totum proinde triangulum O G L majus sectore D A E B. Altitudo autem trianguli G L O æqualis est radio D B. Ergo basis G O major erit arcu A B. Quod erat ostendendum.

* per præced.

Ex his autem manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, *Si circulo inscribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, composita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem vero majori perimetro si linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, composita circumferentiam circuli excedet.*

Problema IV. Propos. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem investigare; & ex datis inscriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illæ subtenduntur.

TAB. XL. Fig. 6.

Esto circulus centro D, cujus diameter C B, & sit arcus B A sextans circumferentiæ, cui subtensa ducatur A B, itemque sinus A M. Posità igitur D B semidiametro partium 100000, totidem quoque erit subtensa B A. A M verò partium 86603 non unâ minus, hoc est, si una pars sive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito. quippe semissis lateris trianguli æquilateri circulo inscripti.

Hinc excessus A B supra A M fit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipsi A B 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu A B. Et hic primus est minor terminus, quo postea alium vero propiorem inveniemus. Prius autem major quoque terminus secundum Theorema præcedens inquirendus est.

Tres nimirum sunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus est partium duplæ A B & triplæ A M qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque observandum ut minor sit, idemque in cæteris prout dicetur) secundus quadruplæ A B & simplæ A M qui 486603 vero maj. Et tertius triens excessus A B supra A M, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad A B 100000 fit 104727, major numero partium, quas continet arcus A B, peripheriæ sextans. * Jam igitur invenimus longitudinem arcus A B secundum minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longe propior vero est, cum vero proximus sit 104719.

* per præced.

Sed ex utroque istorum alius minor terminus habebitur priore accuratior si utamur præcepto sequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inspectione dependet.

In-

Inventorum terminorum differentia ſeſquitertia jungatur duplæ ſubtenſæ & ſinui triplo, & quam rationem habet ex his compoſita ad triplam ſeſquitertiam ſeu $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul, ſinus, ſubtenſæque, eandem habeat ſubtenſæ ſupra ſinum exceſſus ad aliam quandam; Hæc ad ſinum addita rectam conſtituet arcu minorem.

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum eſt $261\frac{1}{3}$. Eſtque rurſus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus eſt partium duplæ A B & triplæ A M & ſeſquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul A B, A M, 622008 vero minor. Tertius denique exceſſus A B ſupra A M, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis eſt 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium A M $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu A B. Quare ſexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ ſunt arcu A B, earum ſexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor eſt quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde conſtat minorem utique eſſe quam triplam ſeſquiſeptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani error per hæc refutatur, qui ſcripſit peripheriam majorem eſſe partibus 314185 qualium rad. 100000.

Eſto nunc arcus A B $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit A M, ſemiſſis lateris quadrati circulo inſcripti, partium 7071068, non unâ minus, qualium radius D B 10000000. A B vero latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad ſimilitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus A B 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rurſus terminus minor accuratior 7853885. Unde conſtat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus A B longitu-

gitudine minus diſtet quam partibus 85; (Eſt enim arcus A B, per ea quæ ſupra oſtendimus, major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos ſcrupulos ſecundos, hoc eſt, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifeſtum eſt, ſi trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem iſtum terminum paulò antè, nunquam duobus ſcrupulis ſecundis aberraturos; etiamſi æqualia inter ſe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo D A M.

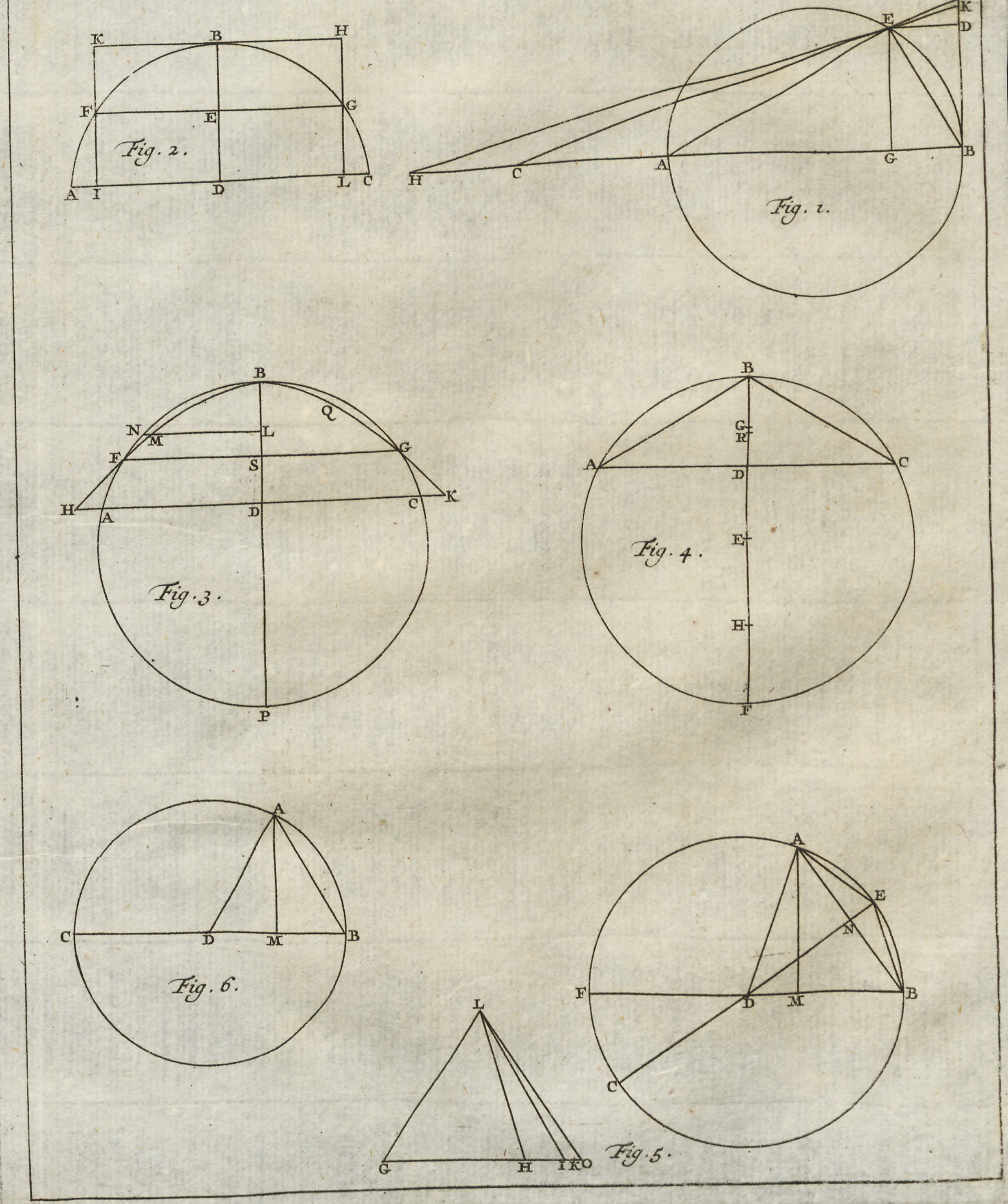
Si vero ea ſit ratio lateris D M ad M A, ut angulus A D M non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii ſcrupuli error erit. Poſito enim arcu A B $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit A M ſemiſſis lateris octanguli æquilateri circulo inſcripti partium 382683433, non unâ minus. A B vero latus ſexdecanguli 390180644 non unâ amplius, qualium radius D B 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus A B invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rurſus 392699010. Conſtat autem ex ſupra demonſtratis arcum A B $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem eſſe quam 392699081, quas terminus major ſuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno ſcrupulo tertio, hoc eſt, $\frac{1}{7776000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eſt utique quam 6000000000.

Porro ex noviſſimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam $3141593\frac{1}{5}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod ſi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus A B, ſeu partium 6 qualium tota 360: Erit A M ſemiſſis lateris trigintanguli inſcripti partium 10452846326766, non unâ minus, qualium radius 100000000000000. Et A B latus ſexagintanguli inſcripti 10467191248588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus A B ſecundum primum minorem terminum 10471972889195. Secundum majorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam

31415926538,

TAB. XL.



31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos si ex additis inscriptorum & circumscriptorum polygonorum lateribus inquirendum esset ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum. Nam ex sexagintangulo inscripto circumscriptoque hoc tantum probatur, minorem esse rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & amplius verarum notarum numerum nostro ratiocinio productum appareat. Idem vero in ulterioribus polygonis si quis experiatur semper evenire cernet: non ignota nobis ratione, sed quæ longiori explicatione indigeret.

Porro autem quomodo, datis quibuscunque aliis inscriptis, arcuum quibus subtenduntur longitudo per hæc inveniri queat satis puto manifestum. Si enim quadrati inscripti latere majores sunt, longitudo arcus ad semicircumferentiam reliqui inquirenda est, cujus tum quoque subtensa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum subtensas inveniri cum totius arcus subtensa data est. Atque hâc ratione si bisectionibus uti placebit, poterimus ad omnem subtensam, arcus ipsius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoscere. Utile hoc ad sinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus subtensâ, etiam ejus qui paulò major minorve sit satis accuratè definiri potest.

CHRISTIANI HUGENII C. F.

ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.

PROBL. I.

Datam sphæram plano secare, ut portiones inter se rationem habeant datam.

Hoc Archimedes problema resolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. Compositionem autem promissam non videtur explicuisse, nisi ipsius est illa quam Eutocius in vetusto quodam libro repertam commentariis suis inseruit. Ea vero paraboles & hyperboles intersectione perficitur, uti & illa cujus Dionysidorus autor est, quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipsis descriptionem requirit. Nostra autem quam hic conscribemus anguli trisectionem postulat; Et hæc construendi ratio in solidis problematibus quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maxime accommodata.

TAB. XLI. Fig. 1.

Esto igitur data sphæra cujus centrum M, diameter C A. Et data sit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur secari sphæra plano secundum A C diametrum, sitque maximus in ea circulus C B A D. Et producatur utrimque diameter C A, & ponatur semidiametro æqualis utraque harum C H, A E. Et dividatur tota H E in Q, ut sit E Q ad Q H sicut S ad T. Ipsi autem M Q æqualis ponatur ad circumferentiam recta A R. Et ei quæ tertiam partem subtendit arcus A R, æqualis sumatur M N. Et

Et per N punctum ducatur planum K L quod diametro C A sit ad angulos rectos. Dico hoc sphæram sic secare, ut portio cujus A vertex est ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T.

Secetur enim sphæra per centrum M plano B D ipsi K L parallelo, & jungantur K M, M L; & intelligatur conus basin habens circulum factum sectione K L, verticem vero M. Et sicut quadratum C M ad quadratum M N, ita sit M N ad N O longitudine. Erit igitur per conversionem rationis ut quadratum C M sive quadr. K M ad quadratum K N (est enim quadr. K N excessus quadrati K M supra quadr. M N) ita linea N M ad M O. Sicut autem quadr. K M, hoc est, quadr. B M ad quadr. K N, ita est circulus circa diametrum B D ad eum qui circa diametrum K L. Ergo quoque ille circulus ad hunc sese habebit ut N M ad M O. Ac proinde conus K M L æqualis erit cono cujus basis circulus circa diametrum B D, altitudo M O *. Hic autem conus ad hemisphæram B C D, hoc est, ad conum qui basin habeat eundem circulum circa B D diametrum, & altitudinem M H *, eam habet rationem quam M O ad M H. Itaque & conus K M L erit ad hemisphæram B C D sicut M O ad M H. Et invertendo.

* 15. 12. Elem.

* 32. 1. Archim. de Sphær. & Cylin.

Porro autem quoniam hemisphæra B C D est ad sectorem solidum M K C L sicut superficies illius sphærica ad sphæricam hujus superficiem *, hoc est, ut M C ad C N †. Erit per conversionem rationis hemisphæra B C D ad partem sui quæ remanet dempto sectore M K C L, sicut C M ad M N: vel sumptis horum duplis ut H M ad O Q. Quod enim O Q dupla sit ipsius M N postea ostendemus. Fuit autem ostensum, quod hemisphæra B C D ad conum K M L sicut H M ad M O. Ergo jam hemisphæra B C D ad totam portionem inter plana B D, K L contentam erit ut H M ad utramque simul Q O, O M *, hoc est, ad M Q. Quare & per conversionem rationis, erit hemisphæra B C D ad portionem K C L, ut M H ad H Q. Et sumptis antecedentium duplis, sphæra tota ad portionem K C L ut E H ad

* 42. 1. Archim. de Sphær. & Cyl.

† 3. 2. Archim. de Sphær. & Cyl.

* 24. 5 Elem.

ad H Q. Et dividendo, portio K A L ad portionem K C L ut E Q ad Q H, hoc eſt ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit O Q duplam eſſe ipſius M N, ſic fiet manifeſtum. Quia enim ut quadratum C M ad quadr. M N, ita eſt M N ad N O longitudine: Eſt autem Q M æqualis ſubtenſæ arcus A R cujus trienti ſubtenditur M N. Erunt propterea duæ ſimul Q M & N O æquales triplæ M N, uti ſequenti lemmate demonſtratur. Quamobrem ablata communi O N, erit ſola Q M æqualis duplæ N M & ipſi M O. Sed eadem Q M æqualis eſt duabus ſimul his Q O, O M, ergo apparet duplam M N æquari ipſi O Q.

L E M M A.

TAB. XLI. Fig. 2.

SI Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris A B C in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ B D, D E, E C; & toti arcui linea B C. Porro jungantur D A, E A, atque interſecent ſubtenſam B C in punctis G & H. Sitque H F parallela G D.

Quoniam igitur circumferentia B D E dupla eſt circumferentiæ E C, angulus autem huic inſiſtens E A C ad centrum conſtitutus, qui vero illi inſiſtit angulus B C E ad circumferentiam. Erit propterea angulus B C E, hoc eſt, angulus H C E in triangulo H C E æqualis angulo C A E in triangulo C A E. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut A E ad E C ita E C ad E H. Ratio igitur A E ad E H hoc eſt D E ad E F, duplicata eſt rationis A E ad E C, ac proinde eadem quæ quadrati A E ad quadr. E C ſeu quadr. E D. Erit igitur invertendo F E ad E D ſicut quadr. E D ad quadr. E A. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul B D, D E, E C æquari ſubtenſæ B C atque

atque ipſi E F. quod ſane manifeſtum eſt; nam C E eſt æqualis C H; B D æqualis B G; D E vero utriſque ſimul G H, & F E. Ergo conſtat propoſitum.

Sumpſimus autem arcum B C ſemicircumferentiâ minorem quoniam in conſtructione problematis ejuſmodi ſemper invenitur. Nam lemma ad quoſvis arcus pertinet, eſtque in ſemicircumferentiâ majoribus demonſtratio parum diverſa.

PROBL. II.

Cubum invenire dati cubi duplum.

AD hoc imperfectam primò conſtructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam ſubjiciemus, quæ tamen non niſi ſæpius tentando perficiatur. Etenim ſolida problemata omnia vel hoc exigunt vel ſectionum conicarum deſcriptionem.

Sit itaque datus cubus cujus latus A B, oporteatque invenire latus cubi dupli. TAB. XLI. Fig. 3.

Radio B A ſemicirculus deſcribatur A F C. Sitque arcus A F ſemicircumferentiæ triens, C D vero quadrans; & ducantur C F, A D, quarum interſectio ad E punctum. Erit A E latus cubi quæſiti; exiguo tamen excedens, quodque minus ſit $\frac{1}{2000}$ ſui parte, ut facile numeris explorari poteſt. Fit enim A E ſecans anguli p. 37. ſcr. 30. quæ proinde major eſt partibus 12600 qualium A F vel A B 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 ſit major quam duplus ejus qui ex A B 10000, erit & cubus A E major duplo cubo ex A B. Rurſus quia A E major eſt partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ A E major part. 6. Tota vero A E minor eſt quam 12605. Ergo auferendo ab A E partem bismilleſimam ſui ipſius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim ſuperſunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor eſt duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque A E diminuta parte ſui biſmilleſima cubum minorem producet quam ſit duplus cubus à latere A B.

Porro ad perfectam conſtructionem, C F quidem uti pri-

us ducenda eſt: A D vero ſic, ut ſubtenſa C D æqualis ſit abſciſſæ E F. Etenim his poſitis dico cubum A E ejus qui ex A B duplum exiſtere.

Producatur enim C A, & ſit ipſi A E æqualis A G. Propter triangulos ſimiles igitur eſt E C ad C D, hoc eſt, E F ut E A ad A F, hoc eſt, ut G A ad A B. Et componendo C F ad F E ut G B ad B A ſive A F. Et permutando C F ad G B ut E F ad F A. Quare ut C F quadratum ad quadr. G B, ita quadr. E F ad quadr. F A. Et componendo ut quadr. C F & G B ad quadr. G B, ita quadr. E F & F A ſimul, hoc eſt, quadr. E A ad quadr. A F. Quadr. autem C F & G B ſimul æquantur rectangulo G C A cum quadr. A G, quod ſic oſtenditur. Quadratum enim G B æquale eſt rectangulo C G A & quadrato A B ſeu A F *. Quare addito utrimque quadrato F C, erunt quadrata G B, F C ſimul æqualia rectangulo C G A & quadrato A C. Rectangulum autem C G A cum quadrato A C æquatur rectangulo G C A cum quadrato G A. Itaque & quadrata C F, G B ſimul æqualia ſunt rectangulo G C A cum quadrato A G, ſicut diximus. Sicut igitur rectangulum G C A cum quadrato A G ad quadr. G B, ita eſt quadr. E A ad quadr. A F, hoc eſt, ita quadratum G A ad quadr. A B. Et permutando, ut rectangulum G C A cum quadrato G A ad quadratum G A ita quadr. G B ad quadr. A B. Dividendo igitur, erit ut rectang. G C A ad quadr. G A, ita quadr. G B dempto quadrato A B, hoc eſt, rectangulum C G A ad quadr. A B. Et permutando rurſus, ut rectang. G C A ad rectang. C G A, hoc eſt, ut C A ad A G ita quadratum G A ad quadr. A B. Quamobrem quod fit ex quadrato G A in ipſam G A, hoc eſt, cubus G A æquabitur ei quod fit ex quadrato A B in A C, hoc eſt, duplo cubo ex A B. Quod erat demonſtrandum.

* 6.2. Elem.

PROBL.

Probl. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire.

VEterum Geometrarum ad hoc Problema constructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro, at non omnes inventione diversas, uti recte quoque ipse animadvertit. Heronis enim inventionem secuti videntur Apollonius & Philo Byzantius: quanquam Heronem Apollonio ætate posteriorem nonnulli existiment. Dioclis modum Pappus & Sporus. Nicomedea autem constructio præ cæteris subtilis ibidem extat, quam Fr. Viëta paulò aliter concinnatam suo Geometriæ supplemento inseruit. R. Cartesii egregia est & nova per paraboles & circumferentiæ intersectionem, cujus demonstratio legitur in libris Harmonicôn M. Mersenni. Nostræ autem sequentes.

Sit datarum linearum major A C, quæ bifariam secetur in E. Minor autem sit A B, quæ sic constituatur ut triangulus E A B habeat crura æqualia A E, E B. Et perficiatur parallelogrammum C A B D. Et producantur A C, A B. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quousque positionem habeat G F, abscindens nimirum E F æqualem rectæ E G; (Hoc autem vel sæpius tentando assequemur, vel descriptâ hyperbole, uti postea ostendetur) Dico inter A C, A B medias duas inventas esse B G, C F.

TAB. XLI. Fig. 4.

Sit enim E K ipsi A B ad angulos rectos. Quia igitur B E æqualis E A, dividetur A B in K bifariam: adjecta autem est linea B G. Ergo rectangulum A G B cum quadrato ex K B, æquabitur quadrato K G. Et addito utrimque quadrato K E, erit rectangulum A G B unà cum quadratis B K, K E, hoc est unà cum quadrato B E, æquale quadrato E G. Similiter quia A C bifariam dividitur in E, & adjecta

jecta est linea C F, erit rectangulum A F C cum quadrato E C æquale quadrato E F. Quadratum autem E F æquale est quadrato E G. Erit igitur rectangulum A F C cum quadrato C E, æquale rectangulo A G B cum quadrato B E. Atqui quadratum C E seu E A æquale est quadrato E B. Ergo & reliquum rectangulum A F C æquale rectangulo A G B. Quare sicut F A ad A G ita B G ad C F. Ut autem F A ad A G ita est D B ad B G, & ita quoque F C ad C D. Igitur ut D B, hoc est, A C ad B G ita B G ad F C, & F C ad C D, hoc est, A B. Quod erat dem. Quod autem dictum est, etiam descriptâ hyperbole inveniri quomodo linea F D G ducenda sit, hinc constabit: Factum enim sit, ut E F, E G sint æquales, & sumatur G N æqualis D F. Itaque punctum N est ad hyperbolem quæ describetur per D punctum circa asymptotos F A, A G *. Sed idem punctum N est quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius E D: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus F E G est æquicruris, & N G æqualis D F) Itaque datum est punctum N ad intersectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum est. Datur igitur positione linea F G ducenda per puncta N, D. Et compositio manifesta est.

* 8. 2. Conic.

A L I T E R.

TAB. XLI. Fig. 5.

Circa diametrum A C majori datarum linearum æqualem circulus describatur & ponatur A B minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum A D: productâque A B, ducatur ex centro E recta E H G eâ ratione ut H D, H G sint inter se æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus A C, A B duas medias inventas esse B G, G L.

Producatur enim G E usque ad circumferentiam in K, & jungatur A K, eique parrallela ducatur B O. Similes itaque sunt trianguli A E K, B H O; & quia A E æqualis E K, etiam B H, H O æquales erunt. Sed & H G, H D inter se æquales sunt. Igitur tota O G æqualis B D, hoc est,

est, diametro A C vel L K; & ablatâ communi L O, relinquentur æquales L G, O K. Est autem rectangulum K G L æquale rectangulo A G B. Ergo ut K G ad G A ita B G ad G L. Sed ut K G ad G A ita est O G ad G B & ita reliqua O K, hoc est, L G ad B A. Ergo ut O G, hoc est, A C ad G B ita B G ad G L & G L ad A B. Quod erat demonstr. Hujus autem constructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet.

A L I T E R.

Sint datæ A B & Q quibus duas medias proportionales invenire opus sit; A B autem quam Q major. TAB. XLI. Fig. 6.

Dimidiæ Q sumatur æqualis A F, & productâ A B utrimque, sit ipsi æqualis B R. Erigatur autem ad A B perpendicularis F C, & ipsi R A æqualis ponatur R C: & jungatur B C, & huic parallela ducatur A E. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quousque positionem habeat C D, faciens C E æqualem A D. Dico inter A B & Q duas medias esse C E, E D.

Jungatur enim C A. Igitur quia æquales sunt R A, R C & angulus C F A rectus, erit R A ad A C ut A C ad duplam A F, hoc est, Q: ac proinde quadratum A C æquale rectangulo sub R A & Q. Quadratum autem A C cum quadrato A D & duplo rectangulo D A F, hoc est, sub D A & Q contento, æquatur quadrato D C *. Igitur quadratum D C æquabitur quadrato D A unà cum rectangulis sub D A, Q, & sub R A, Q, hoc est, unà cum rectangulo sub D R & Q. Quadratum autem D B æquale rectangulo R D A & quadrato A B *. Igitur ut quadratum D B ad quadratum D C, hoc est, ut quadr. A B ad quadr. A D, (est enim ut D B ad D C sic A B ad E C sive A D) ita erit rectangulum R D A cum quadrato A B ad rectangulum sub R D, Q, cum quadrato A D. Quamobrem & rectangulum R D A ad rectangulum sub R D, Q, sicut quadr. A B ad quadr. A D *. Est autem ut quadratum A B ad quadr. A D, ita A B ad E D longitudine: nam ut B A ad A D

* 12. 2. Elem.

* 6. 2. Elem.

* 19. 5. Elem.

sic C E, hoc est, ipsa A D ad E D. Ergo rectangulum R D A ad rectangulum sub R D, Q, hoc est, A D ad Q sicut A B ad E D. Et permutando & invertendo, B A ad A D ut E D ad Q. Atqui ut B A ad A D, hoc est, C E ita C E ad E D. Ergo ut A B ad C E ita C E ad E D, & E D ad Q. Itaque inter A B & Q mediæ proportionales sunt C E, E D. Quod erat ostendendum.

PROBL. IV.

QUadrato dato & uno latere producto, aptare sub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppositum pertineat.

TAB. XLI. Fig. 7. Esto quadratum B A cujus productum sit latus F A. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C sit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & E B sit æquale quadratum E G; & super B G diametro describatur semicirculus B C G secans rectam F A productam in C, & ducatur B D C. Dico D C æqualem esse ipsi K. Jungantur enim C G, G D; sitque C H ipsi B G ad angulos rectos.

Quia igitur similes sunt trianguli B E D, C H G, & latera B E, C H circa angulos rectos inter se æqualia, erit & latus D B æquale lateri G C, & D E ipsi G H. Sunt autem quadrata D C, C G, hoc est, quadrata D C, C H, & H G æqualia quadrato D G *, hoc est, quadratis G E, E D. Ergo dempto hinc quadrato E D, inde vero quadrato H G; erunt duo quadrata D C & C H æqualia quadrato E G, hoc est, quadratis ex K & E B *. Quadratum autem E B æquale est quadrato C H. Ergo & reliquum quadratum D C æquabitur K quadrato; & recta D C ipsi K. Quod erat ostendendum.

* 47. 1. Elem.

* Ex construct.

Demonstratio hæc ab ea diversa est quæ apud Pappum Alex. legitur lib 7. prop. 72. Constructio verò non differt. Cæterum eandem ad casum quoque sequentem pertinere invenimus.

PROBL.

PROBL. V.

DAto quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppositum transeat. Oportet autem non minorem esse datam quam sit quadrati diameter dupla.

Datum sit quadratum A B, productaque latera A F, A E. Data verò linea K, non minor duplâ A B diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam D C ipsi K æqualem.

TAB. XLI. Fig. 8.

Si K æqualis fuerit duplæ A B, constructio manifesta est; tunc enim per B ducenda est quæ sit ipsi A B ad angulos rectos, eaque propositum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla A B, constructio iisdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonstratio quoque est eadem.

Quod autem circumferentia B C G secabit productam A F hinc manifestum est. Etenim quia K major est duplâ diametro A B, erit K quadratum majus octo quadratis E B. Itaque quadratum E G majus quam quadrata novem ex E B; ac proinde E G major quam tripla E B. Dimidia igitur B G, hoc est, radius descripti semicirculi major quam E B vel B F; unde necesse est rectam A C secari à circumferentia B C G.

PROBL. VI.

RHombo dato, & uno latere producto, aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppositum angulum pertineat.

Sit datus rhombus A B, cujus productum latus F A. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam B D C, ita ut pars intercepta D C sit ipsi K æqualis.

TAB. XLII. Fig. 1.

Ducatur diameter A B, & latus B E producatur; & quadratis ex K & A B sit æquale quadratum A G. Et super B G

 cir-

circumferentiæ portio deſcribatur quæ capiat angulum ipſi B F A æqualem. Secabit ea productum latus F A, ut modo oſtendetur. Itaque ad interſectionis punctum C ducatur B C. Dico hujus partem interceptam D C lineæ datæ K æqualem eſſe. Quod autem circumferentia deſcripta latus F A productum ſecabit, ſic primùm oſtenditur. Ducatur A N ita ut ſit angulus B A N angulo B F A vel B E A æqualis. Itaque triangulus B A N triangulo B E A ſimilis eſt, ac proinde iſoſceles quoque. Quare ſi ſuper B N circumferentia deſcribatur quæ capiat angulum B F A, ea continget latus F A in A puncto. Sed B G major eſt quam B N: nam quadratum A G majus eſt quadrato A N vel A B, cum ſit æquale quadratis ex K & A B. Quare A G cadet extra triangulum iſoſcelem B A N. Itaque manifeſtum eſt circumferentiam ſuper B G deſcriptam capientemque angulum ipſi B F A vel B A N æqualem ſecare lineam F A C. Eſto alterum interſectionis punctum M & jungantur B M, G C, & cadat in B E ex A perpendicularis A L.

Quia igitur quadratum A G æquale eſt quadratis ex K & A B: atque idem quadratum A G æquale quadratis A B & B G minus duplo rectangulo G B L, hoc eſt, minus rectangulo G B N; erit K quadratum æquale quadrato B G minùs rectangulo G B N, hoc eſt, rectangulo B G N. Eſt autem ut rectangulum B G N ad rectang. B E, G N, ita B G ad B E. Ergo ut B G ad B E ita quoque quadratum K ad rectangulum G N, B E, hoc eſt, rectangulum G B E minùs rectangulo N B E. Eſt autem rectangulo G B E æquale rectang. C B D, quoniam G B ad B C ut D B ad B E propter triangulos ſimiles G B C, D B E; habent enim angulum ad B communem, & angulus B C G ipſi B E D eſt æqualis. Item rectangulo N B E æquale eſt quadratum A B quia propter triangulos ſimiles eſt N B ad B A ut A B ad B E. Ergo erit G B ad B E ut quadratum K ad rectangulum C B D minùs quadrato A B. Eſt autem rectangulo C B D minùs quadr. A B æquale rectangulum D A, A C; quod ſic oſtenditur. Etenim quia quadrilaterum C G B M

eſt

est in circulo, sunt anguli C G B & B M C simul duobus rectis æquales. Sed & anguli E D B, A D B. Quorum E D B æqualis angulo C G B propter similitudinem triangulorum G B C, D B E. Ergo & angulus B M C æqualis erit angulo A D B. Trianguli igitur A B M, A B D angulos M & D inter se æquales habent. Verum & angulos ad A, & latus A B commune. Itaque dicti trianguli similes sunt & æquales. Quare A M æqualis A D, & M B æqualis B D, & angulus M B A æqualis A B D. In triangulo igitur M B C angulus B in duo æqualia dividitur à recta B A, ideoque rectang. M B C minus quadrato B A æquatur rectangulo M A C. Sed rectangulo C B M æquale est rectangulum C B D; & rectangulo M A C æquale rectang. D A C. Igitur rectang. C B D minus quadrato B A æquale rectangulo C A D, uti dictum fuit. Est itaque G B ad B E ut quadr. K ad rectangulum D A C. Sicut autem G B ad B E ita est rectang. G B E, hoc est, rectang. C B D ad quadratum B E. Ergo ut quadratum K ad rectang. D A C ita rectang. C B D ad quadratum B E. Ratio autem rectanguli C B D ad quadr. B E composita est ex ratione D B ad B E, hoc est, D C ad C A, & ex ratione C B ad B E sive B F, hoc est, C D ad D A. Ergo & quadr. K ad rectang. D A C eam habet rationem quæ componitur ex ratione D C ad C A & D C ad D A, hoc est, eam quam quadratum D C ad rectang. D A C. Quamobrem quadr. K. quadrato D C æquale est; Et D C ipsi K longitudine. Quod erat demonstrandum.

PROBL. VII.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit.

 Sit

TAB. XLII. Fig. 2.

Sit datus rhombus A B cujus producantur latera A F, A E; data autem sit recta K cui æqualem ponere oporteat C D, per angulum B transeuntem. Ducatur diameter A B, eique ad angulos rectos linea S B R, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro F E. Igitur K non minor debet esse quam S R. Si vero æqualis, factum est quod proponebatur. Sed ponatur K major data esse quam S R. Erit jam in schemate hoc prout propositum est constructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonstratio autem nonnihil diversa. Etenim hoc primò aliter ostenditur quod circumferentia super B G descripta secat productam A F. Sit A L ad E B perpendicularis & ducatur S T ut sit angulus B S T æqualis angulo E A F vel B F S. Est itaque triangulus B S T triangulo B F S similis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus B S T. Apparet igitur lineam A S æquari ipsi L B cum dimidia B T. Quare dupla A S æquabitur duplæ L B & toti B T. Sed dupla A S est quadrupla A F vel E B. Ergo quadrupla E B æqualis duplæ L B & B T. Sumptâque communî altitudine B T, erit rectangulum sub quadrupla E B & B T contentum, æquale duplo rectangulo L B T & quadrato B T. Et addito utrimque quadrato B L, erit rectangulum E B T quater cum quadrato L B æquale rectangulo L B T bis cum quadratis B T, B L, hoc est quadrato L T. Quia vero propter triangulos similes est T B ad B S ut B S ad B F sive B E, æquale erit rectang. E B T quadrato B S; & quater sumptum quadrato R S. Itaque quadr. S R cum quadrato L B æquale quadrato L T. Quadratum vero K (quod majus est quam R S quadr.) unà cum eodem quadrato L B æquale est quadrato L G, uti ex constructione manifestum est, quia scilicet quadr. A G æquale positum fuit quadratis ex K & A B. Itaque majus est quadr. L G quam L T, & L G major quam L T, & B G quam B T. Quamobrem circumferentia super B G descripta capax anguli E A F secabit rectam A S; nam similis circumferentia, si super B T describatur, ea continget ipsam in S puncto, quoniam angulus

gulus B S T ipsi E A F æqualis est triangulusque B S T æquicruris.

Porrò quod C D ipsi K æqualis est, sic demonstrabitur. Quia quadratum A G æquale est quadratis ex K & A B: idemque quadratum A G æquale quadratis A B, B G cum duplo rectangulo G B L. Erit propterea quadratum K æquale quadrato B G cum duplo rectangulo G B L. Sicut autem B G ad B E ita est quadratum B G cum duplo rectangulo G B L ad rectangulum G B E cum duplo rectanctulo E B L; singula enim ad singula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum G B E cum duplo rectangulo E B L ut B G ad B E. Est autem rectangulo G B E æquale rectangulum C B D, quoniam C B ad B G ut E B ad B D, propter triangulos similes C B G, E B D; habent enim angulos ad B æquales & angulum B C G angulo B E D. Item duplo rectangulo E B L æquale est quadratum A B, quia propter triangulos similes ut S A, hoc est, dupla B E ad A B ita A B ad B L. Igitur ut B G ad B E ita erit quadratum K ad rectangulum C B D cum quadrato A B. Sed hisce duobus æquale est rectangulum C A D; quoniam in triangulo C A D angulus A bifariam dividitur à linea A B. Ergo ut B G ad B E ita est quadr. K ad rectangulum C A D. Atque hinc porrò eodem modo ut in casu præcedenti concludemus lineam D C ipsi K æqualem esse, repetendo ista: Sicut autem G B ad B E, &c.

Utrumque præcedentium Aliter.

Sit datus rhombus A D B C cujus productum latus D B. Et data sit linea G. Oportet ducere rectam A N F, ut pars intercepta N F sit datæ G æqualis. TAB. XLII. Fig. 3.

Ducatur diameter A B, & quadratis ex G & A B sit æquale quadratum A H, & ducatur H E ipsi B A parallela. Et A E ipsi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico N F ipsi G æqualem esse.

Quod autem ad H E poni potest A E ipsi G æqualis, hinc

hinc manifestum est. Etenim quadratum A H majus est quadratis A X & X H, quum sit angulus A X H obtusus. Sed idem quadratum A H æquale ponitur quadratis A B seu H X & G. Itaque quadratum G seu A E majus est quadrato A X. Unde apparet intersectionem E accidere inter puncta H & X.

Producatur B D & ponatur ipsi æqualis D R. & sit R K parallela D A vel B C, eique occurrant productæ F A, B A, H E, in punctis M, Q, K: & jungatur R A, & producatur ad P.

Quoniam igitur D R æqualis est D B, & R Q K parallela D A, erit & M A æqualis A N, & Q A æqualis A B; angulus autem B A R rectus, quum sit in semicirculo, nam tres hæ æquales sunt D B, D A, D R. Parallelæ autem sunt B Q, H E K, ergo & anguli ad P recti, & erit H P æqualis P K. Est itaque quadratum A H æquale quadrato A E unà cum rectangulo H E K *. Sed idem quadratum A H æquale est etiam quadratis ex G seu A E, & ex A B. Itaque quadr. A B æquale erit rectangulo K E H. Ac propterea K E ad A B ut A B ad E H. Verum ut K E ad A B seu Q A ita est E M ad M A: & ut A B ad E H ita A F ad F E. Igitur E M ad M A ut A F ad F E: Et proinde E A ad A M ut E A ad E F. Æqualis est igitur E F ipsi A M; quare & ipsi A N. Ideoque & F N ipsi A E, hoc est, datæ G. Quod erat demonstrandum.

* 12.2 *Elem.*

TAB. XLII. Fig. 4.

Sit denuo datus rhomdus A D B C, cujus producta latera B D, B C; & data sit linea G. Oportet ducere rectam N F transeuntem per angulum A, quæque æqualis sit ipsi G.

Ducatur diameter B A, eique ad angulos rectos R A L. Si igitur G minor detur quam R L, problema construi nequit, uti supra quoque dictum fuit. Si vero æqualis, jam factum est quod quærebatur. Sit igitur G major quam R L. Erit in schemate adjecto, sicut propositum est, constructio & demonstratio eadem quæ in casu præcedenti.

Illud

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam H E poni poteſt A E ipſi G æqualis. Sit R S æqualis R B, & jungatur A S. Quoniam igitur in triangulo B A S à vertice ad mediam baſin ducta eſt A R, erunt quadrata B R & R A ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum B A cum duplo quadrato A R, ſubdupla quadratorum B A, A S *. Itaque quadratum A B duplum cum quadruplo quadrato A R, hoc eſt, cum quadrato R L, æquabitur quadratis B A, A S. Quare ablato utrimque quadrato B A, erit quadratum A S æquale quadratis B A & R L, ac proinde minus quam quadr. A H; nam hoc æquale eſt quadratis A B & G. Eſt igitur A S minor quam A H. Sed major eſt quam A R. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim A R H obtuſus eſt. Major itaque eſt R H quam R S vel R B. Et quum propter triangulos ſimiles ſit R H ad H P ut R B ad B A, erit quoque H P major quam B A; & quadratum H P majus quadrato A B. At quadratum H P cum quadrato P A æquatur quadrato A H, hoc eſt, quadratis B A & G. Ergo cum quadratum H P ſit majus quadrato A B, erit invicem quadr. P A minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio A E ipſi G æquali, ea lineam H E ſecabit.

* per 122. lib. 7. Pappi.

Probl. VIII.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii.

TAB. XLII. Fig. 5.

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam, & duas medias invenit proportionales: Eſto ea C Q D, polus G, regula autem A B cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet G Q ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam A B intercepta ſit ipſi A Q æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto C Q D verſus polum G cavam eſſe, lineam

verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diversum curvari; quæsitum est qua ratione puncta ea determinari possent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc sequentem invenimus constructionem.

Sit duabus A G, A Q tertia proportionalis A E, sumenda versus G. Et ponatur G F æqualis G E. Porro sit G R ipsi G Q ad angulos rectos, & æqualis duplæ G A. Et describatur parabole R O, cujus vertex sit R axis R G, latus rectum ipsi A G æquale. Centro autem F radio F R circumferentia describatur, quæ parabolen secet in O; & ducatur O C parallela A B occurratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæsita in confinio flexionis contrariæ.

TAB. XLII. Fig. 6.

Ista autem Universalis est constructio. At quando quadratum ex A Q non majus est quam duplum quadrati A G, arcus trisectione propositum quoque efficiemus. Et diversè quidem prout A Q major vel minor erit quam A G. Etenim si minor, describenda est circumferentia centro A radio A G, in eaque ponenda G K æqualis duplæ G E, inventæ ut priùs. Et rectæ G H quæ subtendit trientem circumferentiæ K H G æqualis sumenda G M, & per M ducenda ut ante D C ipsi A B parallela. Cum verò A Q major est quam A G, cæteris ad eundem modum compositis, hæc tantum differentia erit quod arcum K P, qui unà cum arcu G K semicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam constituere P H, & subtensæ G H æqualem sumere G M.

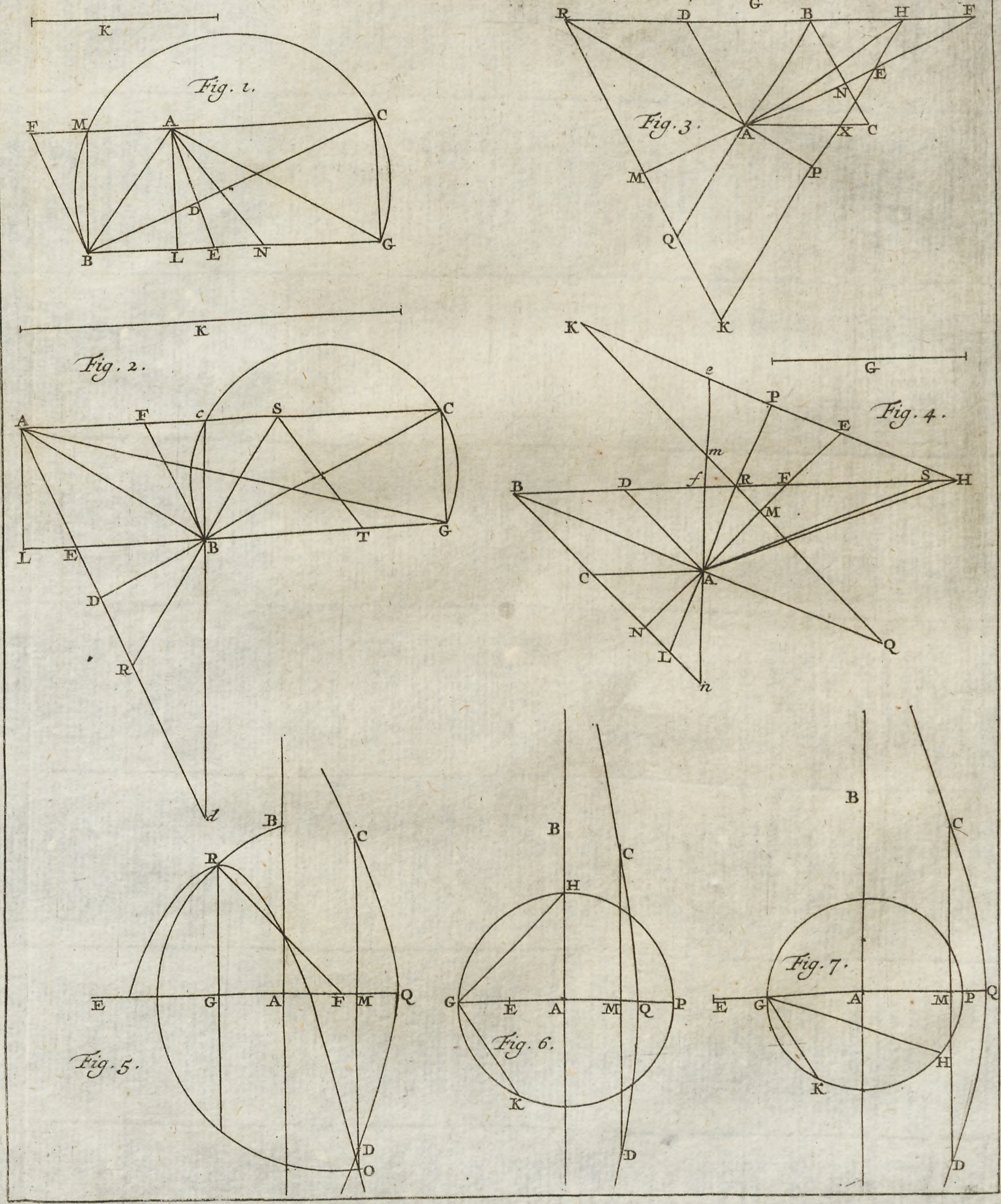
TAB. XLII. Fig. 7.

Porro planum est Problema cum A G æqualis A Q. Tunc enim G M fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inscripti. Item cum quadratum A Q duplum est quadrati A G: fit enim G M dupla ipsius G A.

Sed & aliis casibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè discerni poterunt, qui ad anguli trisectionem reducuntur.

F I N I S.

TAB. XLII.



DE
CIRCULI
ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA
CONTROVERSIA.

VERA
CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA
AUTHORE
JACOBO GREGORIO.

LECTORI GEOMETRÆ
SALUTEM.

MEcum aliquando cogitabam, amice Lector, num Analytica cum suis quinque operationibus esset sufficiens, & generalis methodus investigandi omnes quantitatum proportiones, ut in initio suæ Geometriæ affirmare videtur Cartesius; si enim ita esset, possibile foret ejus ope toties decantatam circuli quadraturam exhibere: cumque hæc mente revolverem, facile percepi ex hactenus repertis circuli proprietatibus nullam posse analysin institui tali structuræ inservientem: deinde mihi alias quærenti incidit in mentem hujus secunda, prima enim in circulo vulgo est cognita: ex hisce percepi seriem polygonorum convergentem, cujus terminatio est circuli sector; ubi statim vidi

aliquod analysios vestigium. deinde serierum convergentium naturis non solum in facilioribus quibusdam casibus, sed etiam in genere consideratis, & prædictis circuli proprietatibus ad ellipsim & hyperbolam nullo negotio reductis, infallibilis mihi videbatur omnium sectionum conicarum quadratura: dum autem me illuc converti ut polygonorum seriem convergentem terminarem, insuperabilem difficultatem in ejus terminatione invenienda post omnes artis & aleæ conatus deprehendi: Sed animo revolvens analysios officium esse sicut algebræ communis, non solum problemata resolvere, sed etiam eorum impossibilitatem (si opus sit) demonstrare; cumque in primo difficultatem indicibilem expertus essem, ad secundum me converti, quod certe supra votum successit; non enim solius circuli (quam mihi ab initio proposueram) sed omnium sectionum conicarum veram & legitimam in sua proportionum specie quadraturam, & integram proportionis speciem ante incognitam orbi Geometrico patefacio, quam etiam proportionem saltem in relatione ad dimensionem sectionum conicarum ad commensurabilem veræ quam proximam reduco, praxi facili, demonstrabili, & extractione radicis surde solidæ (ni fallor) multo breviore; in omni enim proportione incommensurabili ad tales approximationes recurrunt Mathematici: ut autem melius concipiamus hujus proportionis naturam, loquamur de proportione quatenus ortum habet à quinque

ope-

operationibus analyticis, seu arithmeticæ vulgaris, proportio enim nobis notior est in numeris seu in quantitate discreta, quam in continua, neque vereor post Cartesium has operationes in geometriam adducere. Primo itaque sciendum est nos semper nobis proponere quantitates commensurabiles, seu quæ inter se sunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incommensurabilem nisi relativè ad commensurabilem nullo modo percipimus, habet enim in se nescio quid infiniti, mentem nostram obtundens & simplicem perceptionem impediens: deinde ex illis quinque operationibus arithmeticis, duæ sunt tantum simplices, additio & substractio; multiplicatio enim est composita ex additione, & divisio ex substractione; & extractio radicum, quæ in genere nihil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, quæ quam proximè accedit ad proportionem analyticam incommensurabilem, componitur ex præcedentibus quatuor; & nostra sexta operatio quæ in genere nihil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, quam proximè accedentis ad nostram proportionem non analyticam, componitur ex prioribus quinque. Advertendum quoque est sicut numeri fracti nunquam procedunt ex integrorum additione, subductione, multiplicatione, sed tantum ex divisione; & numeri incommensurabiles nunquam procedunt ex commensurabilium additione, subductione, multiplicatione, divisione, sed tantum ex radicum extractione;

ita

ita numeros, vel quantitates non analyticas nunquam provenire ex analyticarum additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, radicum extractione, ſed ex ſexta hac operatione; ita ut hæc noſtra inventio addat arithmeticæ aliam operationem, & geometriæ aliam rationis ſpeciem, idem enim eſt (ſicut in hoc tractatulo demonſtro) rationem circuli ad diametri quadratum in analytica ſeu illa rationis ſpecie hactenus cognita exhibere, ac rationem inter quadrati latus & ejuſdem diametrum in commenſurabilibus: verum certè eſt me hanc demonſtrationem integram ad phraſem geometricam non reduxiſſe, nam ut hoc perficiatur, opus eſt non parvo volumine de quantitatum analyticarum mutuo inter ſe relatione & incommenſurabilitate in genere, quod miror nullum unquam ſcripſiſſe, cum in his tam latè pateant inventionum campi; nam ex his petenda eſt demonſtratio, quod meſolabium non poſſit perfici ope regulæ & circini, item quod non ſemper & quando æquationes affectæ poſſunt reduci ad puras, item quod neceſſaria ſit ad minimum talis generis curva ad mechanicam talium æquationum reſolutionem, cum talibus innumeris, quæ à præſtantioribus geometris impoſſibilia eſſe deprehenduntur ex analyſi, & à rudioribus quotidie & fruſtra quæruntur. Scripſit Euclides decimum ſuum librum ſolummodo (niſi in paucis quibuſdam propoſitionibus generalibus) de incommenſurabilitate facta ab extractione radicis quadratæ;

tæ; neque quantum ſcio ab ullo alio tractata eſt hæc materia, etiamſi geometriæ ſpeculativæ non ſolum utiliſſima ſit, ſed etiam maxime admirabilis; in ipſo enim limine admiranda occurrunt theoremata; e.g. Si fuerit progreſſio geometrica cujus unus terminus fuerit propoſitæ quantitati commenſurabilis longitudine vel poteſtate quacunque, & alius quilibet, binomium, trinomium, &c. quodcunque, impoſsibile eſt duos totius progreſſionis terminos in infinitum continuatæ eſſe inter ſe commenſurabiles longitudine vel poteſtate quacunque: alia multa poſſem afferre, ſed pro commodiore fortaſſis tempore hæc reſervo, ſatis exiſtimans pro præſenti hæc analyticè demonſtraſſe; etſi enim analyſis aſſenſum adeo violenter non cogat ac geometria, nunquam tamen reſpuit nec reſpuere poteſt geometria, quod probavit ſemel analyſis geometrica. Ex hac inventione deduco quoque novam ſectionem angularium & logorithmorum doctrinam, facilem quidem, in praxi expeditiſsimam & geometrica demonſtratione munitam; hactenus enim logorithmorum conſtructio prolixiſſima, conjectura potius quam ſcientia videbatur, & diviſio anguli in partes æquales ultra quinque numero primo numeratas in praxim vix admitti poterat. hæc omnia ſumma (qua poſſum) brevitate & perſpicuitate demonſtro; neque ſcrupuloſus ſum in citationibus, utpote peregrinus, & libris ad tale opus deſtitutus, te enim ſuppono in geometricis non mediocriter verſatum, alioquin nul-

lum hinc fructum colliges.

DEFINITIONES.

1 Si in circulo, ellipse vel hyperbola ducantur è centro in ejus perimetrum duæ rectæ, appellamus planum ab illis rectis & perimetri segmento comprehensum, sectorem.

2 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcumque subtendatur, ita ut triangula rectilinea (quorum communis vertex est sectionis centrum & bases rectæ subtendentes) sint æqualia; vocamus rectilineum illud ab istis triangulis conflatum, polygonum regulare inscriptum, si sectio conica fuerit circulus vel ellipsis; quod si fuerit hyperbola, vocamus illud rectilineum polygonum regulare circumscriptum.

3 Si perimetri segmentum inter illas rectas comprehensum à rectis quotcunque tangatur & à tactibus ad sectionis centrum ducantur rectæ; si inquam omnia trapezia, a tangentibus proximis & rectis ad centrum comprehensa, fuerint æqualia; appello rectilineum ab illis conflatum, polygonum regulare circumscriptum, si sectio conica sit ellipsis vel circulus, & polygonum regulare inscriptum si fuerit hyperbola.

4 Si omnes anguli (excepto illo ad sectionis centrum) polygoni regularis à subtendentibus comprehensi insistant omni-

omnibus contactum punctis polygoni regularis à tangentibus comprehensi, appello hæc polygona complicata.

5 Quantitatem dicimus à quantitatibus esse compositam; cum à quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, vel quacunque alia imaginabili operatione, fit alia quantitas.

6 Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione; dicimus illam componi analyticè.

7 Quando quantitates à quantitatibus inter se commensurabilibus analyticè componi possunt, dicimus illas esse inter se analyticas.

8 Si à quantitatibus quotcunque A, B, C, D, E, componatur quantitas X, & à quantitatibus F, G, C, D, E, componatur quantitas Z, eâdem omnino methodo & iisdem omnino operationibus quibus antè componebatur X, positis quantitatibus F, G, loco quantitatum A, B, si inquam hoc fiat. dicimus quantitatem X eodem modo componi à quantitatibus A, B, quo Z componitur à quantitatibus F, G.

9 Sint duæ quantitates A, B, à quibus componantur duæ aliæ quantitates C, D, quarum differentia sit minor differentia quantitatum A, B, & eodem modo quo C, componitur à quantitatibus A, B, componatur E à quantitatibus C, D; & eodem modo quo D componitur à quantitatibus A, B, componatur F, à quantitatibus C, D; & eo-

A	B
C	D
E	F
G	H

eodem modo quo E componitur à quantitatibus C, D, vel C à quantitaiibus A, B, componatur G à quantitatibus E, F; & eodem modo quo F componitur à quantitatibus C, D, vel D à quantitatibus A, B, componatur H à quantitatibus E, F; atque ita continuetur ſeries: appello hanc ſeriem, ſeriem convergentem.

10 Ejus termini juxta ſe poſiti nempe A, B, vel C, D, vel E, F, vel G, H, dicuntur termini convergentes.

PETITIONES.

1 Petimus quantitates, à quantitatibus datis inter ſe analyticis analyticè compoſitas, eſſe inter ſe & cum quantitatibus datis analyticas.

2 Item quantitates, quæ à quantitatibus datis inter ſe analyticis non poſſunt analyticè componi, non eſſe cum quantitatibus datis analyticas.

Præcedentes petitiones quibusdam fortaſſis obſcuræ videbuntur, ſed tamen ex analyſeos elementis ſunt ſatis manifeſtæ.

VERA

VERA
CIRCULI ET HYPERBOLÆ
QUADRATURA.

Sit circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſegmentum B I P cujus centrum A: compleatur triangulum A B P, & ſegmentum in punctis, B, P, tangentes ducantur rectæ B F, P F, ſe invicem ſecantes in puncto F; producatur (ſi opus ſit) recta A F ſegmentum interſecans in puncto I & rectam B P in puncto Q; deinde jungantur rectæ B I, P I.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

PROP. I. THEOREMA.

Dico trapezium B A P I *eſſe medium proportionale inter trapezium* B A P F, *&* *triangulum* B A P.

Quoniam recta A Q ducitur per F concurſum duarum rectarum F B, F P, ſegmentum in punctis B, P, tangentium; igitur recta A Q rectam B P contactuum puncta jungentem bifariam ſecabit in puncto Q; & proinde triangulum A B Q eſt æquale triangulo A Q P, & triangulum F B Q triangulo F Q P; & igitur triangulum A B F æquale eſt triangulo A P F; eſt ergo triangulum A B F dimidium trapezii A B F P: eodem modo probatur triangulum A B I eſſe dimidium trapezii A B I P; & triangulum A B Q eſt dimidium trianguli A B P: cumque triangula A B F, A B I, A B Q, eandem habeant altitudinem, inter ſe ſunt ut baſes, ſed eorum baſes nempe A F, A I, A Q, ſunt continuè proportionales; & igitur ipſa quoque triangula ſunt continuè proportionalia; & proinde eorum dupla nimirum trapezia A B F P, A B I P, & triangulum A B P ſunt continuè proportionalia in ratione A F ad A I, quod demonſtrare oportuit.

 Du-

Ducatur recta D L segmentum tangens in puncto I, & rectis B F, F P, occurrens in punctis D, L, ita ut compleatur polygonum A B D L P.

PROP. II. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Dico trapezia A B F P, A B I P *simul, esse ad duplum trapezii* A B I P, *sicut trapezium* A B F P *ad polygonum* A B D L P.

Quoniam recta A F, ducta per contactum rectæ D L cum segmento, ducitur etiam per concursum duarum rectarum F B, F P, rectam D L terminantium & segmentum in duobus punctis tangentium; igitur recta D L bifariam secatur in puncto I; & proinde triangulum F D I æquale est triangulo F I L, at triangulum A B F æquale est triangulo A P F; & igitur trapezium A B D I æquale est trapezio A P L I; trapezium ergo A P L I dimidium est polygoni A B D L P. ducatur recta A L: manifestum est ex præcedentis demonstratione triangulum A I L esse æquale triangulo A L P; sed ut triangulum A L F ad triangulum A L I ita F A ad A I, & ut F A ad A I ita trapezium A B F P ad trapezium A B I P; & igitur ut trapezium A B F P ad trapezium A B I P; ita triangulum A L F ad triangulum A L I; & componendo, ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad trapezium A B I P, ita triangulum A F L & triangulum A I L simul, hoc est triangulum A F P, ad triangulum A I L: & consequentes duplicando, ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad duplum trapezii A B I P, ita triangulum A F P, ad trapezium A I L P: at triangulum A F P est dimidium trapezii A B F P, & trapezium A I L P est dimidium polygoni A B D L P; & igitur ut trapezia A B F P, A B I P simul, ad duplum trapezii A B I P, ita trapezium A B F P ad polygonum A B D L P, quod demonstrare oportuit.

PROP. III. THEOREMA.

Dico triangulum B A P, *& trapezium* A B I P *simul, esse ad trapezium* A B I P, *ut duplum trapezii* A B I P *ad polygonum* A B D L P.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

In antecedente demonstratum est trapezia A B F P, A B I P simul, esse ad duplum trapezii A B I P, sicut trapezium A B F P ad polygonum A B D L P: & permutando trapezia A B F P, A B I P simul, sunt ad trapezium A B F P, ut duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P. & quoniam trapezium A B F P, trapezium A B I P & triangulum A B P, sunt continuè proportionalia; erit trapezium A B I P ad trapezium A B F P, ut triangulum A B P ad trapezium A B I P; & componendo, ut trapezia A B I P, A B F P simul, ad trapezium A B F P, ita triangulum A B P & trapezium A B I P simul, ad trapezium A B I P: erat autem, ut trapezia A B I P, A B F P, simul, ad trapezium A B F P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P; & igitur ut triangulum A B P & trapezium A B I P simul, ad trapezium A B I P, ita duplum trapezii A B I P ad polygonum A B D L P, quod demonstrare oportuit.

Producantur (si opus sit) rectæ A D, A L, segmentum secantes in punctis E & O, & rectas B I, I P, in H & M: deinde jungantur rectæ B E, E I, I O, O P, ut compleatur polygonum A B E I O P.

PROP. IV. THEOREMA.

Dico polygonum A B E I O P *esse medium proportionale inter polygonum* A B D L P *& trapezium* A B I P.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ex hujus prima manifestum est trapezium A I L P, trapezium A I O P & triangulum A I P esse continuè pro-

proportionalia, & ex prædictis satis facile colligi potest trapezium A I L P esse dimidium polygoni A B D L P & trapezium A I O P esse dimidium polygoni A B E I O P & triangulum A I P esse dimidium trapezii A B I P: & proinde terminos duplicando, polygonum A B D L P, polygonum A B E I O P & trapezium A B I P sunt continuè proportionalia, quod demonstrare oportuit.

Ducantur rectæ C G, K N, segmentum tangentes in punctis E, O, & rectis D L, D B, L P, occurrentes in punctis C, G, K, N, ut compleatur polygonum A B C G K N P.

PROP. V. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Dico trapezium A B I P *& polygonum* A B E I O P *simul, esse ad polygonum* A B E I O P, *ut duplum polygoni* A B E I O P *ad polygonum* A B C G K N P.

Ex hujus tertia manifestum est triangulum A B I & trapezium A B E I simul, esse ad trapezium A B E I, ut duplum trapezii A B E I ad polygonum A B C G I: & ex prædictis facile concludi potest triangulum A B I esse dimidium trapezii A B I P, & trapezium A B E I esse dimidium polygoni A B E I O P, & polygonum A B C G I esse dimidium polygoni A B C G K N P; & proinde terminos duplicando, trapezium A B I P & polygonum A B E I O P simul, erunt ad polygonum A B E I O P ut duplum polygoni A B E I O P ad polygonum A B C G K N P, quod demonstrandum erat.

Hinc facile colligi potest polygonum A B C G K N P esse medium harmonicum inter polygona A B E I O P, A B D L P, quod hic admonuisse sufficiat, in sequentibus enim demonstrabitur.

SCHO-

S C H O L I U M.

Duæ præcedentes propoſitiones eodem modo demonſtrari poſſunt de duobus quibuſcunque polygonis complicatis loco polygonorum complicatorum ABIP, ABDLP; polygonum enim à tangentibus comprehenſum tot continet æqualia trapezia, quot continet polygonum à ſubtendentibus comprehenſum æqualia triangula: atque hinc evidens eſt has polygonorum analogias ita ſe habere in infinitum, ducendo nimirum rectas AN, AK, AG, AC, per puncta R, T, S, V, & adhuc alia & alia polygona intra & extra ſemper ſcribendo: notandum nos appellare hanc polygonorum inſcriptionem & circumſcriptionem, inſcriptionem & circumſcriptionem ſubduplam, ex prædictis patet (ſi ponatur triangulum A B P $\sqsupset a$, & trapezium A B F P $\sqsupset b$) trapezium A B I P eſſe $vq\,ab$ & polygonum A B D L P $\frac{2ab}{a + vq\,ab}$: eodem modo poſito trapezio A B I P $\sqsupset c$, & polygono A B D L P $\sqsupset d$, erit polygonum A B E I O P $\sqsupset vq\,cd$ & polygonum A B C G K N P $\sqsupset \frac{2cd}{c + vq\,cd}$, ita ut evidens ſit hanc polygonorum ſeriem eſſe convergentem; atque in infinitum illam continuando, manifeſtum eſt tandem exhiberi quantitatem ſectori circulari, elliptico vel hyperbolico A B E I O P æqualem; differentia enim polygonorum complicatorum in ſeriei continuatione ſemper diminuitur, ita ut omni exhibita quantitate fieri poſſit minor, ut in ſequentis theorematis Scholio demonſtrabimus: ſi igitur prædicta polygonorum ſeries terminari poſſet, hoc eſt, ſi inveniretur ultimum illud polygonum inſcriptum (ſi ita loqui liceat) æquale ultimo illi polygono circumſcripto, daretur infallibiliter circuli & hyperbolæ quadratura: ſed quoniam difficile eſt, & in geometria omnino fortaſſe inauditum tales ſeries terminare; præmittendæ ſunt quædam propoſitiones è quibus inveniri poſſint hujuſmodi aliquot ſerierum terminationes, & tandem (ſi

fieri possit) generalis methodus inveniendi omnium serierum convergentium terminationes.

PROP. VI. THEOREMATA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Dico differentiam inter triangulum ABP *& trapezium* ABFP *majorem esse duplo differentiæ inter trapezium* ABIP *& polygonum* ABDLP.

Sit triangulum A B P, A; trapezium A B F P, B; trapezium ABIP, C, & polygonum A B D L P, D: quoniam A est ad C ut C ad B, igitur ut differentia inter A & C ad A, ita differentia inter C & B ad C; & permutando, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & B ita A ad C; & componendo, ut differentia inter A & C & differentia inter C & B simul, hoc est differentia inter A & B, ad differentiam inter C & B, ita A † C ad C; sed ut A † C ad C ita 2 C ad D, & ideo differentia inter A & B est ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D. quoniam A † C est ad C ut 2 C ad D, erit permutando ut A † C ad 2 C ita C ad D; & dividendo, ut differentia inter A & C ad 2 C ita differentia inter C & D ad D; & permutando, differentia inter A & C est ad differentiam inter C & D ut 2 C ad D; sed demonstratum est differentiam inter A & B esse ad differentiam inter C & B ut 2 C ad D; & proinde differentia inter A & B est ad differentiam inter C & B, ut differentia inter A & C ad differentiam inter C & D; sed differentia inter A & B est major differentia inter C & B, & ideo differentia inter A & C est major differentia inter C & D: & prædictam analogiam permutando, differentia inter A & B est ad differentiam inter A & C, ut differentia inter C & B ad differentiam inter C & D; at differentia inter A & B est major differentia inter A & C, & ideo differentia inter C & B est major differentia inter C & D; atque differentia inter A & B æqualis est differentiis, inter A & C, inter C & B; cumque earum utravis sit major differentia inter

ter C & D, manifeſtum eſt differentiam inter A & B majorem eſſe duplo differentiæ inter C & D, hoc eſt differentiam inter triangulum A B P & trapezium A B F P majorem eſſe duplo differentiæ inter trapezium A B I P, & polygonum A B D L P, quod demonſtrare oportuit.

SCHOLIUM.

Eodem prorſus modo demonſtratur differentiam inter trapezium A B I P & polygonum A B D L P majorem eſſe duplo differentiæ inter polygonum A B E I O P & polygonum A B C G K N P. denique eodem modo demonſtrari poteſt hic differentiarum exceſſus in ſubdupla noſtra polygonorum complicatorum deſcriptione in infinitum; differentia enim priorum nempe inſcripti & circumſcripti major ſemper erit duplo differentiæ immediatè ſequentium nimirum inſcripti quoque & circumſcripti, & proinde aufertur majus quam dimidium a priorum differentia ut fiat differentia immediatè ſequentium; & igitur continuando ſubduplam polygonorum deſcriptionem, inveniri poſſunt duo polygona complicata, quorum differentia ſit minor qualibet exhibita quantitate, ut in præcedentis Scholio aſſumpſimus.

Sint duæ quantitates indefinitæ a minor b major, ſintque datæ duæ rationes majoris inæqualitatis c ad d, & c ad e; deinde ſit ut c ad d ita $b-a$ ad $\frac{bd-ad}{c}$ cui addatur quantitas a ut fiat $\frac{ca+bd-ad}{c}$, quæ quantitas ponatur immediate ſub a: fiatque ut c ad e ita $b-a$ ad $\frac{be-ae}{c}$, quæ quantitas ſubſtrahatur ex b & relictum nempe $\frac{bc-be+ae}{c}$ ponatur ſub b. continuetur deinde ſeries convergens cujus primi termini convergentes ſunt a, b, & ſecundi termini convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$.

$$c \quad \begin{matrix} d \\ e \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a \\ \frac{ca+bd-ad}{c} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} b \\ \frac{bc-be+ae}{c} \end{matrix}$$

manifeſtum eſt terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ majorem

 eſſe

esse termino a, quoniam termino a additur $\frac{bd-ad}{c}$ ut fiat terminus $\frac{ca+bd-ad}{c}$: manifestum quoque est terminum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ minorem esse termino b, quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter a & $\frac{ca+bd-ad}{c}$ in ratione majoris inæqualitatis: evidens quoque est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ minorem esse termino b. quoniam ex b substrahitur $\frac{be-ae}{c}$ ut fiat $\frac{bc-be+ae}{c}$; manifestum etiam est terminum $\frac{bc-be+ae}{c}$ majorem esse termino a, quoniam differentia inter a & b est ad differentiam inter $\frac{bc-be+ae}{c}$ & b in ratione majoris inæqualitatis: evidens igitur est differentiam inter terminos convergentes a & b majorem esse differentiâ inter terminos convergentes $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$. sed quoniam termini convergentes a & b ponuntur indefiniti, possunt a & b sumi loco quorumlibet terminorum convergentium totius hujus seriei; & positis a & b pro terminis hujus seriei convergentibus quibuscunque, sequitur necessario ex seriei compositione $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$ esse terminos convergentes immediatè sequentes: cumque differentia terminorum a & b major sit differentia terminorum $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, evidens est differentiam terminorum convergentium priorum semper esse majorem differentia terminorum convergentium immediatè sequentium; & igitur quò magis continuatur hæc series convergens eò minor fit differentia terminorum convergentium: & quoniam hæc differentiarum diminutio semper fit proportionaliter nempe in ratione $b-a$ ad $\frac{bc-be+ae-ca-bd+ad}{c}$; igitur possunt inveniri hujus seriei termini convergentes quorum differentia sit omni exhibita quantitate minor; & igitur imaginando hanc seriem in infinitum continuari, possumus imaginari ultimos terminos convergentes esse æquales, quos

quos terminos æquales appellamus ſeriei terminationem.

PROP. VII. PROBLEMA.

Oportet prædictæ ſeriei terminationem invenire.

Ut huic problemati ſatisfiat, oportet primò invenire quantitatem quæ eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$, hoc autem facile fit hoc modo: inveniatur quantitas quæ multiplicata in a & addita b multiplicata in quantitatem datam m, eandem quantitatem facit ac ſi multiplicaretur in $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & adderetur $\frac{bc-be+ae}{c}$ multiplicata etiam in eandem quantitatem datam m. ſit quantitas illa z, & proinde $za+bm$ æquatur $\frac{zca+zbd-zad+mbc-mbe+mae}{c}$, & æquatione reducta invenitur $z=\frac{mae-mbe}{ad-bd}$; quæ quantitas ſive multiplicata in a & addita m, ſive multiplicata in $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & addita $\frac{mbc-mbe+mae}{c}$ efficit eandem in utroque caſu quantitatem nempe $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{cd-bd}$: & proinde prædicta quantitas eodem modo componitur ex terminis convergentibus a, b, quo componitur ex terminis convergentibus $\frac{ca+bd-ad}{c}$, $\frac{bc-be+ae}{c}$. atque a & b quoniam ſunt quantitates indefinitæ poſſunt eſſe quilibet totius ſeriei termini convergentes, modò termini convergentes immediatè ſequentes ſint $\frac{ca+bd-ad}{c}$ & $\frac{bc-be+ae}{c}$, & proinde quantitas $\frac{maae-mbae+mbad-mbbd}{cd-bd}$ eodem modo componitur ex quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus quo componitur ex terminis convergentibus a, b; & igitur prædicta

dicta quantitas eodem etiam modo componitur ex ultimis ejus terminis convergentibus, qui æquales sunt: sit ultimus ille terminus x qui multiplicatus in $\frac{mac - mbe}{ad - bd}$ & in m efficit xm & $\frac{xmac - xmbe}{ad - bd}$, quorum factorum summa nempe $\frac{xmac - xmbe + xmad - xmbd}{ad - bd}$ æquatur $\frac{maae - mbae + mbad - mbbd}{ad - bd}$ & æquatione reducta invenitur x seu seriei terminatio $\frac{aae - bae + bad - bbd}{ae - be + ad - bd}$, quam invenire oportuit.

Ne minus exercitatis obscurum videatur hoc problema, illud in numeris illustrabimus: sit $c\ 7$, $d\ 2$, $e\ 3$, $a\ 28$, $b\ 42$, erunt secundi termini convergentes 32, 36, tertii $33\frac{1}{7}$, $34\frac{2}{7}$, & ejus terminatio $33\frac{3}{5}$.

Neminem moveat, quod (etiamsi a sit minor quam b) $\frac{ca + bd - ad}{c}$ possit esse major quam $\frac{bc - be + ae}{c}$, analyticè enim major à minore potest substrahi, cujus tamen exemplum non gravabimus exhibere, sit $c\ 7$, $d\ 5$, $e\ 4$, $a\ 28$, $b\ 42$; erunt secundi termini convergentes 38, 34, & tertii $35\frac{1}{7}$, $36\frac{2}{7}$, ejusque terminatio $35\frac{7}{9}$.

Animadvertendum est hujus problematis solutionem eodem modo se habere, etiamsi loco a ponatur cyphra seu merum nihil, Ex. Gr; sit $c\ 8$, $d\ 3$, $e\ 4$, $a\ 0$, $b\ 24$; erunt secundi termini convergentes 9, 12, & tertii $10\frac{1}{8}$, $10\frac{1}{2}$, & seriei terminatio $10\frac{2}{7}$,

Harum etiam serierum terminationes possunt inveniri ex Gregorii à S. Vincentio lib. de progress. geometrica, etiamsi methodo longe ab hac diversa.

PROP.

PROP. VIII. PROBLEMA.

Sint duæ quantitates datæ A, B, & ratio quælibet data C ad D: oportet invenire aliam quantitatem, ut ratio ejus ad A sit multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D.

EDC AFBG

Sit primò ratio C ad D commensurabilis, sitque inter C & D communis mensura E; & quoties E continetur in D toties sit ratio F ad A submultiplicata rationis B ad A; & quoties E continetur in C toties sit ratio G ad A multiplicata rationis F ad A: dico G esse quantitatem illam quæsitam. ratio G ad A est multiplicata rationis F ad A in ratione C ad E, & ratio F ad A est multiplicata rationis B ad A in ratione E ad D; & igitur ex æqualitate, ratio G ad A est multiplicata rationis B ad A in ratione C ad D, quod demonstrare oportuit.

Quod si ratio C ad D sit incommensurabilis, geometricam hujus problematis praxim esse impossibilem mihi persuadeo; approximatione tamen fieri potest, assumendo rationem commensurabilem ejus loco, quæ quàm proximè ad illam accedat.

		G H	A B
	N	I K	C D
M		R S	E F
O		T V	X Y
		L	Z

Sit series convergens, cujus primi termini convergentes sint A, B, secundi C, D, tertii E, F; sintque secundi termini ita facti à primis, ut ratio B majoris ad A minorem sit multiplicata rationis C ad A in ratione data mojoris inæqualitatis M ad N, & ut ratio B ad A sit multiplicata rationis D ad A in ratione data majoris inæqualitatis M ad O: sintque tertii termini eodem modo facti ex secundis quo secundi facti sunt ex primis; atque ita continuetur series.

PROP.

PROP. IX. PROBLEMA.

Oportet prædictæ seriei terminationem invenire.

Ponatur G cyphra seu nihil hoc est exponens rationis æqualitatis, seu rationis A ad A; sitque H ad libitum exponens rationis B ad A: sit ut M ad N ita differentia inter G & H, hoc est ipsa H vel exponens rationis B ad A ad excessum quo I superat G hoc est ipsam I, sed ut M ad N ita ratio B ad A est multiplicata rationis C ad A; & igitur Excessus quo I superat G hoc est ipsa I est exponens rationis C ad A. sit ut M ad O ita differentia inter G & H hoc est H ad excessum quo K superat G hoc est ipsam K, sed ut M ad O ita ratio B ad A est multiplicata rationis D ad A, cumque H sit exponens rationis B ad A, erit K exponens rationis D ad A: si igitur I sit exponens rationis C ad A & K exponens rationis D ad A; erit excessus quo K superat I exponens rationis D ad C. deinde sit ut M ad N ita excessus quo K superat I seu exponens rationis D ad C ad excessum quo R superat I, sed ut M ad N ita ex seriei compositione ratio D ad C est multiplicata rationis E ad C, atque excessus quo K superat I est exponens rationis D ad C; & proinde excessus quo R superat I est exponens rationis E ad C, atque I est exponens rationis C ad A, & proinde R est exponens rationis E ad A. deinde sit ut M ad O ita excessus quo K superat I ad excessum quo S superat I, sed ut M ad O ita ex seriei compositione ratio D ad C est multiplicata rationis F ad C, cumque excessus quo K superat I sit exponens rationis D ad C; erit excessus quo S superat I exponens rationis F ad C, atque I est exponens rationis C ad A, & proinde S est exponens rationis F ad A: cum igitur R sit exponens E ad A & S exponens rationis F ad A; erit excessus quo S superat R exponens rationis F ad E: & utramque seriem continuando, demonstratur ut antè T esse exponentem rationis X ad A, & V esse expo-

exponentem rationis Y ad A; denique ſemper demonſtrabitur terminos convergentes ſeriei exponentium eſſe exponentes rationum, terminorum convergentium ſeriei propoſitæ ad primam ſeriei quantitatem A, modò utriuſque ſeriei termini convergentes ſint in eodem ab initio ordine: & proinde terminatio ſeriei exponentium per hujus 7 inventa, quæ Ex: Gr: ſit L, erit exponens rationis, terminationis ſeriei propoſitæ ad primum terminum A: inveniatur igitur ratio Z ad A quæ ſit multiplicata rationis datæ B ad A in ratione data L ad H; eritque Z terminatio quæſita, quam invenire oportuit.

Ad hoc problema in numeris illuſtrandum ſit M 4, N 2, O 1, A 6, B 10; erunt ſecundi termini convergentes √q60, √qq2160, tertii termini convergentes √qqq7776000, √qqqq10077696000000, & ſeriei terminatio √c360.

Aliud exemplum, ſit M 6, N 2, O 3, A 5, B 10; erunt ſecundi termini convergentes √c250, √q50, tertii termini convergentes √qcc4882812500000000, √qqc7812500000, & ſeriei terminatio √ſ12500. hactenus terminavimus omnes ſeries convergentes quæ fieri poſſunt vel à ſola proportione arithmetica vel a ſola proportione geometrica, nunc vero methodum aggredimur, cujus ope omnium ſerierum convergentium terminationes (ſi modò ſint in rerum natura) inveniri poſſunt.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate, eodem modo compoſita à duobus terminis convergentibus cujuſcunque ſeriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejuſdem ſeriei immediatè ſequentibus; ſeriei propoſitæ terminationem invenire.

Sit ſeries convergens, cujus duo termini convergentes quicunque ſint a, b, & termini convergentes immediatè

ſequentes $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ ſumma terminorum convergentium $a + b$ multiplicata in terminum convergentem primum a efficit $aa + ab$: & ſumma terminorum convergentium immediate ſequentium nempe $\sqrt{ab} + \frac{aa}{\sqrt{ab}}$ multiplicata in primum terminum convergentem $\sqrt{ab}$ efficit etiam $aa + ab$; ex his invenienda ſit ſeriei propoſitæ terminatio. manifeſtum eſt quantitatem $aa + ab$ eodem modo fieri à terminis convergentibus $a, b,$ quo à terminis convergentibus immediatè ſequentibus $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$: & quoniam quantitates $a, b,$ indefinitæ ponuntur pro quibuslibet totius ſeriei terminis convergentibus, evidens eſt ſummam quorumcunque terminorum convergentium propoſitæ ſeriei multiplicatam in primum terminum convergentem efficere quantitatem æqualem illi, quæ fit à ſumma terminorum convergentium immediatè ſequentium multiplicata etiam in primum ſuum terminum convergentem; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes ſemper immediatè ſequuntur, manifeſtum eſt ſummam duorum quorumlibet terminorum convergentium multiplicatam in primum ſemper efficere eandem quantitatem nempe $aa + ab$, atque ultimi termini convergentes ſunt æquales, & proinde ſit ultimus ille terminus ſeu ſeriei terminatio z, quæ ſibi addita & in ſummam multiplicata efficit $2zz$, quæ quantitas debet eſſe æqualis quantitati $aa + ab$, & æquatione reſoluta dabitur z ſeu ſeriei terminatio $\sqrt{\frac{aa + ab}{2}}$ quam invenire oportuit.

Et proinde ad inveniendam cujuscunque ſeriei convergentis terminationem; opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in problemate ſive termini convergentes $a, b,$ ſint primi, ſecundi, vel tertii &c; manifeſtum eſt omnes

omnes ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis quo ex terminis convergentibus ſecundis, tertiis, vel quartis, &c.

PROP. XI. THEOREMA.

Dico ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ A B I P *non eſſe compoſitum analyticè à triangulo* A B P *&* *trapezio* A B F P.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Ponatur triangulum A B P a & trapezium A B F P b: manifeſtum eſt ex prædictis trapezium A B I P eſſe $\sqrt{qab}$ & polygonum A B D L P $\frac{2ab}{a + \sqrt{qab}}$, item ſectorem A B I P eſſe hujus ſeriei convergentis terminationem. ut ex ſeriei terminis auferantur ſigna radicis & fractionis, pro a & b primis ſeriei terminis convergentibus, hoc eſt pro triangulo A B P & trapezio A B F P ponantur $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$; eruntque ſecundi ſeriei termini convergentes, hoc eſt trapezium A B I P & polygonum A B D L P, $ba^2 + b^2a$ & $2b^2a$, dico ſeriei convergentis (cujus primi termini convergentes ſunt $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b_3$ & ſecundi ſunt $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$) terminationem non eſſe compoſitam analyticè a terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$: ſi enim componatur prædicta terminatio analyticè a terminis convergentibus $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$; componetur etiam eadem terminatio analyticè & eodem omnino modo à terminis convergentibus $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; & proinde eadem quantitas, nempe prædicta terminatio, eodem modo componitur analyticè ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$,

ſed nulla quantitas poteſt eodem modo analyticè componi ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quo componitur ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, quod ſic demonſtro. ſi analyticè componeretur quantitas ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$,

$$\begin{array}{ll} a^3 + a^2b & ab^2 + b^3. \\ ba^2 + b^2a & 2b^2a \end{array}$$

eodem modo, quo analyticè componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; addendo, subtrahendo, multiplicando & dividendo terminos $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex factis extrahendo, eadem fieret quantitas ac si eodem modo adderentur, subducerentur, multiplicarentur & dividerentur termini $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$, & radices eædem ex factis extraherentur, sed posterius fieri non potest, ergo nec prius; minorem sic probo, si eadem fieret quantitas ex additione, subductione, multiplicatione, divisione & radicum extractione terminorum $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, quæ fieret ex eadem additione, subductione, multiplicatione, divisione & radicum extractione terminorum $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; tunc addendo æquales quantitates terminis $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, vel ab illis sive ipsorum factis æquales quantitates subducendo, vel illos sive ipsorum factos æqualibus quantitatibus multiplicando vel dividendo, vel denique illos sive ipsorum factos eodem modo in se multiplicando, vel ex iisdem easdem radices extrahendo, hasce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo, fieri possent duo ultima producta, nempe unum à termino $ab^2 + b^3$ & alterum à termino $2b^2a$; ita ut ultimum productum ex termino $a^3 + a^2b$ cum ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ additum, subductum, multiplicatum, divisum, & ex facto radice aliqua extracta (hasce analyticas operationes aliquo modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo) eandem efficiat quantitatem quam efficit ultimum productum ex termino $ba^2 + b^2a$ cum ultimo producto ex termino $2b^2a$ eodem omnino modo additum, subductum, multiplicatum, divisum, & ex facto eadem etiam radice extracta, hasce analyticas operationes eodem omnino modo mutando, reiterando vel utrumque vel neutrum faciendo; sed posterius est absurdum ergò & prius: sequela majoris patet ex octava definitione hujus, minorem sic probo, in termino $a^3 + a^2b$ reperitur potestas ipsius a nempe a^3, quæ est altior ulla potestate ejusdem a in termino $ba^2 + b^2a$; & proinde terminos $a^3 + a^2b$, $ba^2 + b^2a$, cum æqua-

æqualibus quantitatibus addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, &c: ſicut ſuperius dictum eſt, ſemper manet poteſtas ipſius a in ultimo producto ex termino $a^3 + a^2b$ altior poteſtate ulla ipſius a in ultimo producto termini $ba^2 + b^2a$, quoniam illos cum æqualibus quantitatibus addendo, ſubſtrahendo, &c, ſemper manent in factis eædem poteſtates, & illos in ſe eodem modo multiplicando ſemper magis elevatur altior poteſtas in termino $a^3 + a^2b$ quam elevatur depreſſior poteſtas in termino $ba^2 + b^2a$, & ex illis eaſdem radices extrahendo, ubi a fuerat elevatior in poteſtate erit etiam elevatior in radice: & quoniam eadem reperitur altiſſima poteſtas ipſius a in termino $ab^2 + b^3$ quæ reperitur in termino $2b^2a$, demonſtratur ut antè altiſſimam poteſtatem ipſius a in ultimo producto ex termino $ab^2 + b^3$ eandem eſſe cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto ex termino $2b^2a$: in ultimo igitur producto termini $a^3 + a^2b$ reperitur altior poteſtas ipſius a quam in ultimo producto termini $ba^2 + b^2a$, & in ultimo producto termini $ab^2 + b^3$ altiſſima poteſtas ipſius a eadem eſt cum altiſſima poteſtate ipſius a in ultimo producto termini $2b^2a$; & igitur ultima producta ex terminis $a^3 + a^2b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo inter ſe addita, ſubducta, multiplicata, diviſa, &c. ſemper efficient quantitatem, in qua reperitur altior poteſtas ipſius a quam ulla quæ reperiri poteſt in quantitate facta ex eadem prorſus additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione, &c, productorum à terminis $ba^2 + b^2a$, $2b^2a$; quoniam altior poteſtas cum altera poteſtate ſemper altiorem facit poteſtatem quam depreſſior poteſtas cum eadem altera poteſtate; & igitur iſtæ duæ quantitates non poſſunt eſſe indefinitè æquales, cum reperiatur altior poteſtas ipſius a in una quam in altera: atque hinc evidens eſt quod ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ABIP non poſſit componi analyticè à triangulo ABP & trapezio ABFP, quod demonſtrandum erat.

Ut autem evidentius fiat propoſitum, aliam demonſtrationem breviorem faciliorem & ex alio medio petitam hic ſubjun-

jungo: quantitas non poteſt componi analyticè ex terminis $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, eodem modo quo componitur eadem quantitas ex terminis $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$; quoniam addendo, ſubſtrahendo, multiplicando, dividendo duo binomia $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$ & radices ex ultimo facto extrahendo, plura fiunt nomina in ultimo producto, quam ſi eodem modo adderentur, ſubducerentur, multiplicarentur, dividerentur, binomium $ba^2 + b^2 a$ & ſimplex quantitas $2b^2 a$, & eædem quoque radices ex facto extraherentur; & ſi plura ſint nomina in uno producto quam in altero, impoſſibile eſt ut ſint indefinitè æqualia, quod eſt propoſitum, reliqua enim ex priore demonſtratione haberi poſſunt.

SCHOLIUM.

Obſcurum fortaſſis videbitur hoc theorema ob multas inuſitatas in geometria voces quas hic adhibere oportet, & ob multa ſuppoſita lemmata, quæ demonſtrare pigebat, quoniam cuivis analyſtæ vel prima lectione ſunt obvia, ex natura enim operationum analyticarum omnino dependent.

Locus hic requirit ut aliquid dicam de proportione inter triangulum A B P & ſectorem A B I P; quod ut fiat, advertendum eſt veriſſimum philoſophorum axioma, nempe omnem noſtram cognitionem à ſenſu ortum habere: inter proportiones enim, ſola commenſurabilis ſenſu attingitur & perfectè ab humana mente intelligitur; incommenſurabilis enim à mathematicis ſolummodo adhuc contemplatur, quatenus commenſurabilis cujuſdam rationis eſt ſubduplicata, ſubtriplicata, &c. vel ex talium additione, ſubductione, &c. genita: hoc eſt, quantitas quæ quantitati propoſitæ eſt incommenſurabilis ex eo ſolummodo ab humana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum cognitarum & propoſitæ quantitati commenſurabilium additione, ſubductione, multiplicatione, diviſione & radicum extractione componi poſſit: at ex hactenus demonſtratis manifeſtum eſt ſectorem A B I P non poſſe componi ex additione, ſubductione, multiplicatione,

tione, divisione, & radicum extractione trianguli A B P & trapezii A B F P: triangulum autem A B P & trapezium A B F P supponimus esse quantitates inter se analyticas; & proinde sector A B I P illis analytica esse non potest, hoc est ex quantitatum ipsis A B P, A B F P analyticarum additione, subductione, multiplicatione, divisione & radicum extractione componi non potest; & proinde ex hoc capite nulla potest exhiberi ratio inter triangulum A B P & sectorem A B I P, cum evidens sit illam non esse analyticam. sed dicet fortè aliquis rationem inter triangulum A B P & sectorem A B I P omnifariam variari posse; & proinde posse esse inter se in ratione qualibet data sive analytica sive etiam commensurabili: respondeo hoc esse verissimum, sed in hoc casu ratio inter triangulum A B P & trapezium A B F P non erit analytica; & proinde ex dato circulo ellipse vel hyperbola nunquam dabitur in analyticis triangulum A B P, quod ex prædictis clarissimè patet. etiamsi ex prædicto capite non possimus comprehendere rationem inter triangulum A B P & sectorem ABIP, possumus tamen ejus aliquam habere cognitionem, ex eo quod sector A B I P sit terminatio seriei convergentis datæ; & ex hac consideratione possibile est invenire quantitatem datæ commensurabilem cujus differentia à sectore A B I P minor fuerit quacunque quantitate proposita, ad hoc enim semper recurrendum est, cum de quantitatibus quibuscunque incommensurabilibus tractant practici, & in hac nostra approximatione praxis non erit operosior quam in multis aliis etiam quantitatum analyticarum approximationibus, immo multo brevior, facilior & paratior erit illis Vietæ sectionibus angularibus, quæ tamen summæ matheseos utilitati in praxem reducuntur. non video ergo quare circuli quadratura diutius æstimetur ignorari: cum enim demonstratum sit rationem circuli ad diametri quadratum non esse analyticam, vanum certè erit & ineptum illam sicut talem imposterum quærere: at rejectis quantitatibus analyticis, vix credo ullam posse esse notiorem hisce nostrarum serierum convergentium terminationibus, sicut ex sequentibus plenissimè apparebit.

PROP.

PROP. XII. THEOREMA.

TAB. XLIII. Fig. 1. 2. 3.

Sit trapezium ABIP, A; polygonum ABEIOP, C; polygonum ABCG KNP, D; & polygonum ABDLP, B. dico D esse medium harmonicum inter C & B. ex hujus 4, A: C: : C: B, & componendo A † C: C: : C † B: B, sed ex hujus 5, A † C: C: : 2 C: D; & ideo C † B: B: : 2 C: D, & permutando B † C: 2 C: : B: D, & dividendo, differentia inter B & C est ad 2 C, ut differentia inter B & D ad D, & permutando differentia inter B & C est ad differentiam inter B & D ut 2 C ad D, hoc est, ut C † B ad B, & dividendo, differentia inter D & C est ad differentiam inter B & D ut C ad B; & proinde D est medium harmonicum inter C & B, quod demonstrare oportuit.

A C D B

Hæc propositio eodem modo locum habet in omnibus polygonis complicatis, ut patet ex scholio 5 hujus.

PROP. XIII. THEOREMA.

Inter duas quantitates A, B, sit media arithmetica C, media geometrica D & media harmonica E. dico C, D, E, esse continuè proportionales. quoniam A, E, B, sunt in ratione harmonica; erit differentia inter A & E ad differentiam inter E & B ut A ad B; & componendo erit differentia inter A & B ad differentiam inter E & B, ut A † B ad B; deinde permutando & componendo 2 A: A † B: : E: B, sed 2 A est duplum ipsius A & A † B duplum ipsius C; & ideo A: C: : E: B; & proinde CE = AB, & AB = DD, ideoque CE = DD; & igitur C: D: : D: E, quod demonstrare oportuit.

A B
C D E

PROP.

PROP. XIV. THEOREMA.

A	B
C	D
E	F

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem & B extra: continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum noſtram methodum ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, &c, & extra circulum B, D, F, &c; dico $A + E$ minorem eſſe quam $2\,C$: ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes analogiæ; prima quoniam A, C, B, ſunt continue proportionales; & ſecunda quoniam C, D, B, ſunt harmonice proportionales: & proinde exceſſus

$$C - A : B - C :: A : C$$
$$B - C : D - C :: A + C : A$$

C ſupra A, hoc eſt $C - A$, eſt ad exceſſum D ſupra C ſeu $D - C$ in ratione compoſita ex proportione A ad C & ex proportione $A + C$ ad A, hoc eſt in ratione $A + C$ ad C; at $A + C$ eſt major quam C, & ideo exceſſus C ſupra A eſt major quam exceſſus D ſupra C, eſt autem D major quam E, & proinde exceſſus C ſupra A multò major eſt quam exceſſus E ſupra C; eſt igitur $A + E$ minor quam $2\,C$; quod demonſtrare oportuit.

PROP. XV. THEOREMA.

Iiſdem poſitis: dico exceſſum C ſupra A minorem eſſe quadruplo exceſſus E ſupra C. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ, prima quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus C ſupra A (hoc eſt) $C - A$ eſt ad exceſſum E ſupra C ſeu $E - C$, ut $AC + EC + AE + CC$ ad CC; at B ma-

$$C - A : B - C :: A : C$$
$$B - C : D - C :: A + C : A$$
$$D - C : E - C :: E + C : C$$

jor est quam E, & ideo A B seu C C major est quam A E, & igitur A E † C C minor est quam 2 CC: atque A C † E C est ad 2 CC ut A † E ad 2 C, sed A † E minor est quam 2 C; & ideo A C † E C minor est quam 2 CC; proinde A C † E C † A E † CC minor est quam 4 CC; & igitur C — A minor est quadruplo ipsius E — C, quod demonstrare oportuit.

PROP. XVI. THEOREMA.

Sint duo Polygona complicata A, B; nempe A extra hyperbolæ sectorem & B intra: Continuetur series convergens horum polygonorum complicatorum secundum nostram methodum subduplam descriptorum, ita ut polygona extra hyperbolem sint A, C, E, &c. & intra hyperbolem B, D, F &c; Dico A † E majorem esse quam 2 C.

A	B
C	D
E	F

ex prædictis manifestæ sunt sequentes duæ Analogiæ, prima quoniam A, C, B, sunt continue proportionales; & secunda, quoniam C, D, B, sunt harmonicè proportionales; &

A — C: C — B: : A: C

C — B: C — D: : A † C: A

proinde excessus A supra C, hoc est A — C, est ad excessum C supra D seu C — D, in ratione composita ex proportione A ad C & ex proportione A † C ad A hoc est in ratione A † C ad C, at A † C est major quam C & ideo excessus A supra C est major excessu C supra D, est autem E major quam D; & proinde excessus A supra C multo major est excessu C supra E; manifestum est igitur A † E majorem esse quam 2 C, quod demonstrare oportuit.

PROP.

PROP. XVII. THEOREMA.

Iſdem poſitis: dico exceſſum A ſupra C majorem eſſe quadruplo exceſſus C ſupra E. ex prædictis manifeſtæ ſunt ſequentes tres analogiæ; prima, quoniam A, C, B, ſunt continuè proportionales; ſecunda, quoniam C, D, B, ſunt harmonicè proportionales; & tertia, quoniam C, E, D, ſunt continuè proportionales; & ideo exceſſus A ſupra C, hoc eſt A – C, eſt ad exceſſum C ſupra E, hoc eſt C – E in ratione compoſita ex proportionibus A ad C, A † C ad A & E † C ad C; & ideo A – C eſt ad C – E, ut A C † E C † A E † CC ad CC; at B minor eſt quam E, & ideo A B, ſeu CC minor eſt quam A E; & igitur A E † CC major eſt quam 2 CC. atque A C † E C eſt ad 2 CC ut A † E ad 2 C; ſed A † E major eſt quam duo C, & ideo A C † E C major eſt quam 2 CC; & proinde A C † E C † A E † C C major eſt quam 4 CC; & igitur A – C major eſt quadruplo ipſius C – E, quod demonſtrare oportuit.

A – C : C – B : : A : C
C – B : C – D : : A † : CA
C – D : C – E : : E † C : C

PROP. XVIII. THEOREMA.

Sint duæ quantitates inæquales; A minor, B major, C media geometrica, D media arithmetica. dico D majorem eſſe quam C, quoniam B, C, A, ſunt continuè proportionales; erit dividendo, permutando, & componendo; ut exceſſus B ſupra A ad exceſſum C ſupra A, ita A † C ad A, atque A † C major eſt duplo ipſius A; & proinde exceſſus B ſupra A major eſt duplo exceſſus C ſupra; ſed exceſſus B ſupra A duplus eſt exceſſus D ſupra A, & ideo exceſſus D ſupra A major eſt exceſſu C ſu-

E
A C B
D

ſupra A; eſt igitur D major quam C, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XIX. THEOREMA.

IIsdem poſitis; ſit inter A & B media harmonica E. dico C majorem eſſe quam E. ex hujus 13, D eſt ad C ut C ad E, ſed D major eſt quam C; & ideo C major eſt quam E, quod demonſtrare oportuit.

CONSECTARIUM.

Ex duabus præcedentibus manifeſtum eſt D majorem eſſe quam E, hoc eſt mediam arithmeticam inter duas quantitates inæquales majorem eſſe media harmonica inter eaſdem.

PROP. XX. THEOREMA.

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

SInt duo polygona complicata A, B, nempe A intra circuli vel ellipſeos ſectorem, B extra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum; ita ut polygona intra circulum ſint A, C, E, K, &c, & extra circulum B, D, F, L, &c; ſitque ſeriei convergentis terminatio ſeu circuli vel ellipſeos ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C una cum triente exceſſus C ſupra A. ſit exceſſus G ſupra C quarta pars exceſſus C ſupra A, & exceſſus H ſupra G quarta pars exceſſus G ſupra C; continueturque hæc ſeries in infinitum, ut ejus terminatio ſit X. Exceſſus C ſupra A minor eſt quadruplo exceſſus E ſupra C; & ideo exceſſus E ſupra C major eſt exceſſu G ſupra C, eſt ergo E major quam G. deinde exceſſus E ſupra C minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, & ideo exceſſus G ſupra C multo minor eſt quadruplo exceſſus K ſupra E, eſt igitur exceſ-

ceſſus K ſupra E major exceſſu H ſupra G; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E; A, C, G, continuatione, terminum quemcunque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempe X, at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C una cum triente exceſſus C ſupra A, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXI. THEOREMA.

Iisdem poſitis quæ ſupra; dico Z ſeu ſectorem circuli vel ellipſeos minorem eſſe quam major duarum mediarum continuè proportionalium arithmeticè inter A & B. inter A & B ſit media Arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H; item

A	B		A	B
C	D		G	H
E	F		M	N
K	L		O	P
Z			X	

inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſed media Arithmetica N; continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C, atque H media Arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G, B; media autem harmonica inter G & B major eſt quam D media harmonica inter C & B, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B, hoc eſt H, major eſt quam D media harmonica inter C & B. eodem modo M media arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H: & quoniam G eſt major quam C, & H quam D; media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. deinde N media arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem, & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N

eadem F major est. eadem modo utramque seriem in infinitum continuando, semper demonstratur terminum quemlibet seriei A B, C D, minorem esse quam idem numero terminus seriei. A B, G H; & igitur terminatio seriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione seriei A B, G H, nempe X; atque ex hujus 7, terminatio seriei A B, G H, seu X æqualis est majori duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor est, quod demonstrandum erat.

PROP. XXII. THEOREMA.

Isdem positis quæ supra; dico Z seu sectorem circuli vel ellipseos minorem esse quam major duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. inter A & B sit media geometrica G, & inter G & B sit media geometrica H; Item inter G & H media Geometrica M, & inter M & H media Geometrica N; continuetúrque hæc series convergens A B, G H, M N, O P, &c, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. satis patet ex prædictis C & G esse inter se æquales, item H majorem esse quam D; atque ob hanc rationem M media Geometrica inter G & H major est quam E media geometrica inter G & D. deinde N media Geometrica inter M & H major est media harmonica inter easdem; & quoniam M major est quam E & H major quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; & ideo N media Geometrica inter M & H major erit quam F. eadem methodo utramque seriem in infinitum continuando semper demonstratur terminum quemlibet seriei A B, C D, minorem esse quam idem numero terminus seriei A B, G H; & igitur terminatio seriei A B, C D, nempe Z minor erit terminatione seriei A B, G H, nempè X; atque ex hujus 9 terminatio seriei A B, G H, seu X, æqualis est majori duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

SCHOLIUM.

NOn opus eſt ut hic demonſtrem majorem duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter duas inæquales quantitates majorem eſſe quam major duarum mediarum Geometricè continuè proportionalium inter eaſdem, & igitur hujus propoſitionis approximationem præcedentis eſſe exactiorem, quod etſi fiat; præcedente tamen ob facilitatem potius utimur.

PROP. XXIII. THEOREMA.

Sint duo polygona complicata A, B, nempè A extra hyperbolæ ſectorem, B intra. continuetur ſeries convergens horum polygonorum complicatorum ſecundum methodum noſtram ſubduplam deſcriptorum, ita ut polygona extra hyperbolam ſint A, C, E, K, &c, & intra hyperbolam B, D, F, L, &c; Sitque ſeriei convergentis terminatio ſeu hyperbolæ ſector Z. dico Z majorem eſſe quam C dempto triente exceſſus A ſupra C. ſit exceſſus C ſupra G quarta pars exceſſus A ſupra C, & exceſſus G ſupra H quarta pars exceſſus C ſupra G, continueturque hæc ſeries in infinitum ut ejus terminatio ſit X. exceſſus A ſupra C major eſt quadruplo exceſſus C ſupra E, & ideo exceſſus C ſupra E minor eſt exceſſu C ſupra G, eſt ergo E major quam G. Deinde exceſſus C ſupra E major eſt quadruplo exceſſus E ſupra K, & ideo exceſſus C ſupra G multò major eſt quadruplo exceſſu E ſupra K, & igitur exceſſus G ſupra H major eſt exceſſu E ſupra K; cumque E major ſit quam G, manifeſtum eſt K etiam majorem eſſe quam H: eodem prorſus modo demonſtratur in omni ſerierum A, C, E, K; A, C, G, H, continuatione, terminum quemcumque ſeriei A, C, E, majorem eſſe quam idem numero terminus ſeriei A, C,

A	B	A
C	D	C
E	F	G
K	L	H
Z		X

C, G; & ideo terminatio ſeriei A, C, E, nempe Z, major erit terminatione ſeriei A, C, G, nempè X; at ex Archimedis quadratura parabolæ conſtat X æqualem eſſe ipſi C dempto triente exceſſus A ſupra C, & proinde Z eadem major eſt, quod demonſtrare oportuit.

PROP. XXIV. THEOREMA.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

Isdem poſitis; dico Z ſeu ſectorem hyperbolæ minorem eſſe quam minor duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B ſit media arithmetica G, & inter G & B ſit media Arithmetica H, Item inter G & H ſit media Arithmetica M, & inter M & H ſit media Arithmetica N: continueturque hæc ſeries convergens A B, G H, M N, O P, in infinitum, ut fiat ejus terminatio X. ſatis patet ex prædictis G majorem eſſe quam C; atque H media arithmetica inter G & B major eſt media harmonica inter eaſdem G & B; media autem harmonica inter G & B; major eſt media harmonica inter C & B, nempe D, quoniam G major eſt quam C; & ideo media Arithmetica inter G & B nempe H major eſt quam D media harmonica inter C & B eodem modo M media Arithmetica inter G & H major eſt media geometrica inter eaſdem G & H; & quoniam G eſt major quam C & H quam D, media geometrica inter G & H major eſt quam E media geometrica inter C & D; & proinde M major eſt quam E. Deinde N media Arithmetica inter M & H major eſt media harmonica inter eaſdem; & quoniam H major eſt quam D & M quam E, media harmonica inter M & H major eſt quam F media harmonica inter E & D; & ideo N eadem F major eſt. eodem modo utramque ſeriem in infinitum continuando, ſemper demonſtratur terminum quemlibet ſeriei A B, C D, minorem eſſe quam idem numero terminum ſeriei A B, G H; & igitur terminatio ſeriei A B, C D, nempe Z, minor erit terminatione ſeriei A B,

GH,

GH, nempe X; atque ex hujus 7 terminatio seriei AB, GH, nempe X, æqualis est minori duarum mediarum arithmetice continuè proportionalium inter A & B, & ideo Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXV. THEOREMA.

A	B	A	B
C	D	G	H
E	F	M	N
K	L	O	P
Z		X	

Iisdem positis; dico Z seu sectorem hyperbolæ minorem esse quam minor duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B. Inter A & B sit media geometrica G, & inter G & B media geometrica H; Item inter G & H media geometrica M, & inter M & H media geometriea N; continueturque hæc series convergens AB, GH, MN, OP, &c. in infinitum ut fiat ejus terminatio X. satis patet ex prædictis C & G esse inter se æquales, & H majorem esse quam D; atque ob hanc rationem M media geometrica inter G & H major est quam E media geometrica inter C & D. Deinde N media geometrica inter M & H major est media harmonica inter easdem; & quoniam M major est quam E & H quam D, erit media harmonica inter M & H major quam F media harmonica inter E & D; proinde N media geometrica inter M & H major eritquam F. eadem methodo utramque seriem in infinitum continuando, semper demonstratur terminum quemlibet seriei AB, CD, minorem esse quam idem numero terminus seriei AB, GH; & igitur terminatio seriei AB, CD, nempe Z minor erit quam terminatio seriei AB, GH, nempe X; atque ex hujus 9 terminatio seriei AB, GH, seu X, æqualis est minori duarum mediarum geometricè continuè proportionalium inter A & B; & ideo Z eadem minor est, quod demonstrare oportuit.

Ex dictis manifestum est hanc approximationem exactiorem esse illa, in antecedenti propositione, demonstrata, etiamsi hæc sit paulò laboriosior. sed non dissimulandum est duas posse esse series æquales terminationes habentes, ita

ut ſemper quilibet terminus unius ſeriei ſit major quam idem numero terminus alterius ſeriei; ſed in talibus ſeriebus quò longius producuntur, eò minor eſt eorundem numero terminorum differentia: ſed è contra noſtræ ſeries quò longius producuntur, eò magis differunt iidem numero termini, ſicut facillimè demonſtrari poteſt.

Experientia obſervo differentiam inter ſecundam duarum mediarum arithmetice proportionalium & ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium ſemper eſſe multò majorem differentia inter ſecundam duarum mediarum geometricè proportionalium & ſectorem circuli, ellipſeos vel hyperbolæ; quod notatu dignum exiſtimo, hinc enim colligitur ſectorem differre vix ultra unitatem à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium, quando medium arithmeticum non excedit medium geometricum ultra unitatem, quod ſummopere notandum, nam ex hoc evidens eſt approximationem audacter eſſe adhibendam, quando ita continuatur ſeries ut medietas prima notarum ſit eadem in utroque termino convergente, quod experientia etiam evincit; nunquam enim in hoc caſu differt ſector unitate à ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium.

Eſt etiam alia approximatio omnium breviſſima & maximè admiranda, etiamſi mihi non contingat illam demonſtratione geometrica munire; nempe ſi primus notarum triens in utroque termino convergente ſit eadem, ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ ſemper differt infra unitatem à maximo quatuor arithmeticè continuè proportionalium inter terminos noſtræ approximationis.

PROP. XXVI. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4.

Sit hyperbola quæcunque C F N cujus centrum A, aſymptota A B, A O; ſitque ejus ſector A F G L cum triangulo circumſcripto A F L: aſymptotorum uni A B parallellæ ducantur rectæ F D, I M; & compleantur parallelogramma

F D M K,

FDMK, PLMD. dico triangulum AFL esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD. Gregorius à S. Vincentio in Lib. de Hyperbola demonstrat triangulum AFL esse æquale trapezio DFLM, sed manifestum est trapezium DFLM esse medium arithmeticum inter parallelogramma FDMK, PLMD; & ideo patet propositum.

PROP. XXVII. THEOREMA.

Iisdem positis: ducatur AI rectam FL bifariam dividens in I & hyperbolam intersecans in puncto G, fiatque trapezium sectori circumscriptum AFGL, quod dico esse medium geometricum inter parallellogramma FDMK, PLMD. ex demonstratis Gregorii à S. Vincentio evidens est trapezium AFGL æquale esse rectilineo DFGLM. & quoniam AGI recta secat rectam FL bifariam in I, ex ejusdem Gregorii à S. Vincentio Lib. de hyperbola, manifestum est rectas LM, GH, FD, esse continuè proportionales in eadem ratione cum tribus continuè proportionalibus AD, AH, AM. asymptoto AO per punctum G ducatur parallela recta RGS rectis FD, MK, occurrens in punctis R, S. quoniam rectæ FD, GH, LM, sunt continuè proportionales, erit dividendo & permutando FR ad SL ut GH ad LM: & quoniam rectæ MA, HA, DA, sunt continuè proportionales, erit etiam dividendo & permutando MH ad HD hoc est SG ad GR ut HA ad DA, vel ut GH ad LM; & proinde FR est ad SL ut SG ad GR, cumque anguli FRG, GSL, sint æquales ob parallelas FR, SL, erunt triangula FRG, GLS, æqualia; & proinde parallelogrammum RDMS æquale est rectilineo DFGLM seu trapezio AFGL; sed parallelogrammum RDMS est medium geometricum inter paralelogramma PDML, FDMK, quoniam eandem habentia altitudinem eorum bases nempe LM, SM, KM, sunt continuè proportionales; & ideo trapezium AFGL est medium geo-

TAB. XLVIII. fig. 4.

metricum inter parallelogramma P D M L, F D M K, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXVIII. THEOREMA.

TAB. XLIII. fig. 4.

Iisdem positis ducantur rectæ F E, L E, hyperbolam tangentes in punctis F, L, ut compleatur trapezium A F E L, quod dico esse medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K. triangulum A F L, trapezium A F G L, & medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K, sunt continuè proportionalia, quoniam triangulum A F L est medium arithmeticum & trapezium A F G L medium geometricum inter eadem parallelogramma, ut patet ex hujus 13; sed triangulum A F L, trapezium A F G L, & trapezium A F E L sunt continuè proportionalia ex hujus 1; & proinde trapezium A F E L est medium harmonicum inter parallelogramma P D M L, F D M K, quod demonstrare oportuit.

PROP. XXIX. PROBLEMA.

Dato circulo æquale invenire quadratum.

Sit quadratum circulo circumscriptum 4000000000000000; erit ergo eidem inscriptum 2000000000000000, inter quæ quadrata sit medium geometricum 2828427124746190 octagonum nempe intra circulum: deinde inter octagonum intra circulum & quadratum extra sit medium harmonicum, quod levi labore invenitur dividendoduplum quadrati octagoni intra circulum seu duplum rectanguli à quadratis intra & extra circulum per summam quadrati & octagoni intra; eritque inventum medium harmonicum, octagonum circumscriptum, nempe 3313708498984760. continuetur hæc series convergens polygonorum complicatorum donec prima medietas notarum sit eadem in utroque termino con-

convergente, nimirum uſque ad polygona laterum 16384; inſcriptum enim eſt 3141592576586860 & circumſcriptum 3141592692091258; non conſideratur nota ultima, quoniam in diviſionibus & radicum extractionibus ſemper à vera quantitate paululum aberramus, quod ultimam notam imperfectam plerumque reddit. adhibeatur deinde approximatio in hujus 20 & 21 demonſtrata, & invenientur termini intra quos eſt vera circuli menſura, poſito diametri quadrato 4000000000000000, 3141592653589789 minor circulo & 3141592653589792 eodem major, & proinde non latet circuli menſura, quam invenire oportuit. polygonorum ſeriem hic appono.

	Intra circulum	extra circulum
4	2000000000000000	4000000000000000
8	2828427124746190	3313708498984760
16	3061467458920718	3182597878074527
32	3121445152258051	3151724907429255
64	3136548490545938	3144118385245904
128	3140331156954752	3142223629942456
256	3141277250932772	3141750369168965
512	3141513801144299	3141632080703181
1024	3141572940367090	3141602510256808
2048	3141587725277158	3141595117749588
4096	3141591421543029	3141593269613390
8192	3141592345578073	3141592807595664
16384	3141592576586860	3141592692091258

Circulus intra ſequentes terminos conſiſtit.

3141592653589789 3141592653589792.

eodem omnino modo reperitur rectilineum æquale cuicunque ſectori circulari vel elliptico ex cognito triangulo inſcripto & trapezio circumſcripto.

PROP. XXX. PROBLEMA.

Ex dato sinu invenire arcum.

TAB. XLIII. fig. 5.

Sit arcus circuli A E descriptus ex centro B. hujus arcus datur radius nempe A B & sinus nempe A D: oportet invenire quam proportionem habet ipse arcus ad integram circuli circunferentiam. sit arcus chorda A E & ejus semissis tangens A C vel C E. ex quadrato radii A B auferatur quadratum sinus A D & relinquetur quadratum sinus complementi B D, datur igitur B D; & ideo datur area trianguli rectanguli A B D; datur quoque area trianguli A B E nempe rectangulum sinus dati A D in semissem radii B E. deinde fiat ut summa triangulorum A B D, A B E, ad triangulum A B E ita duplum trianguli A B E ad trapezium A B E C, ut constat ex hujus 5. & ex dato triangulo inscripto A B E & trapezio circumscripto A B E C, inveniatur per præcedentem sector ipse A B E, qui ad circulum integrum datum quæsitam habet proportionem arcus A E ad totam circumferentiam, quam invenire oportuit.

PROP. XXXI. PROBLEMA.

Ex dato arcu invenire sinum.

TAB. XLIII. fig. 5.

Ex dato arcu manifestum est dari sectoris aream; hoc igitur sectore dato consideretur ex quot notis arithmeticis constet sinus totus: deinde sumatur sectoris dati talis pars aliquota nempe sector A B E, ut trianguli inscripti A B E & trapezii circumscripti A B E C toties multiplicia, quoties sector datus multiplex est sectoris A B E, concordent in tot notis arithmeticis quot continet radix quadrata sinus totius; hoc enim facile fieri potest ex speculatione tabellæ hujus 29: non enim requiritur in hoc praxis præcisa, nam nihil refert etiamsi in magnis radiis discrepantia sit notarum aliquot. Sectoris cogni-

cogniti A B E, cujus arcus A E etiam innotescit, datur radius B A: sit ejus sinus A D, z; & proinde è dato sinu & radio, dabitur ut in antecedente triangulum sectori inscriptum A B E & eidem trapezium circumscriptum A B E C; atque ipse sector datus, est secunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium inter triangulum sibi inscriptum & trapezium circumscriptum; & proinde datur æquatio inter duplum trapezii A B E C unà cum triangulo A B E & triplum sectoris cogniti A B E, cujus resolutio manifestat valorem quantitatis ignotæ z, hoc est sinum A D: at dato arcu A E & ejus sinu, dantur etiam ex vulgata sectionum angularium doctrina sinus omnium multiplicium ejusdem arcus A E; & proinde non latet sinus arcus in initio propositi, cum sit ad arcum A E in data ratione multiplici, quem invenire oportuit.

PROP. XXXII. PROBLEMA.

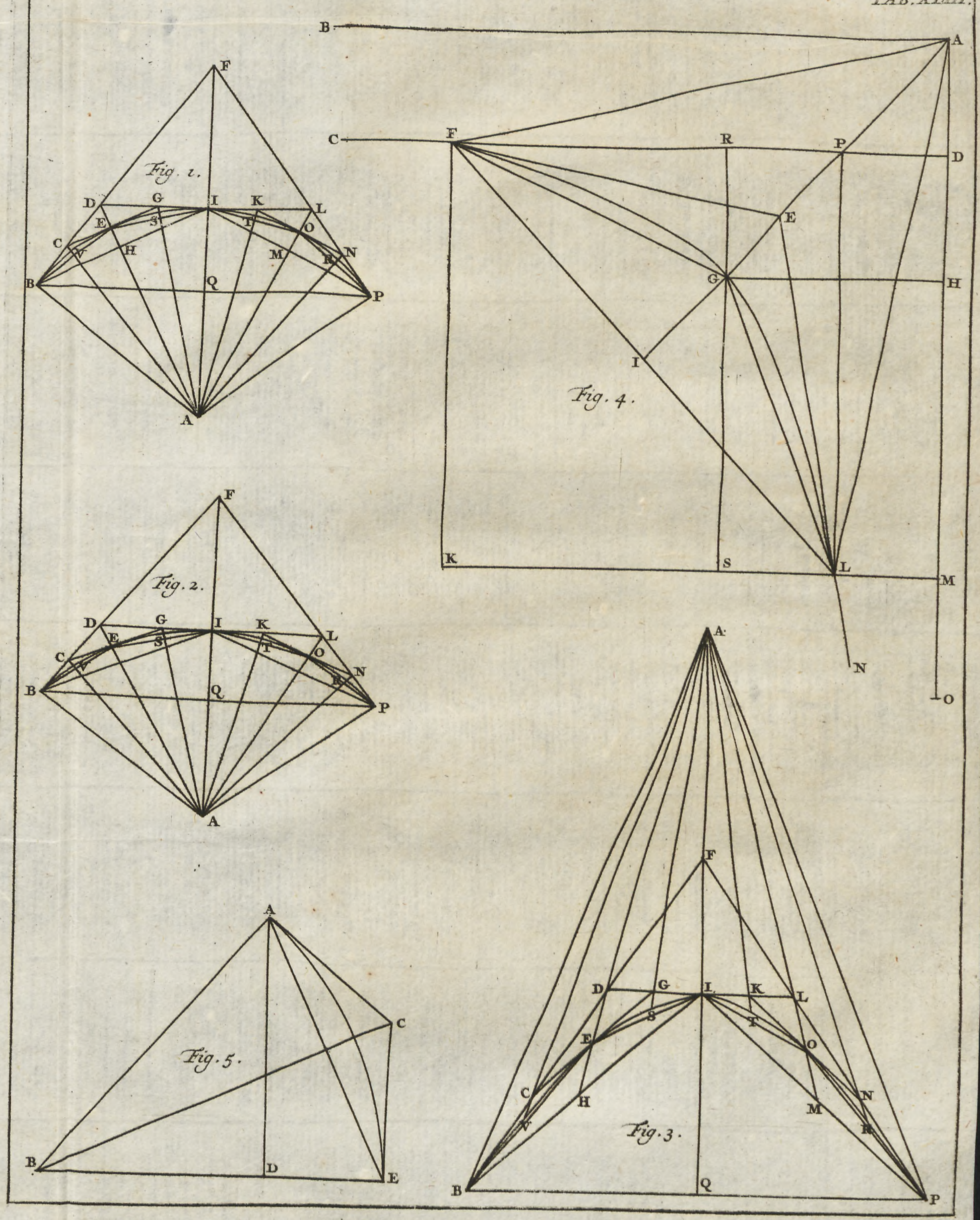
Invenire quadratum æquale spatio hyperbolico contento à curva hyperbolica, uno asymptoto & duabus rectis alteri asymptoto parallelis; quod spatium æquale est sectori hyperbolico cujus basis est eadem curva.

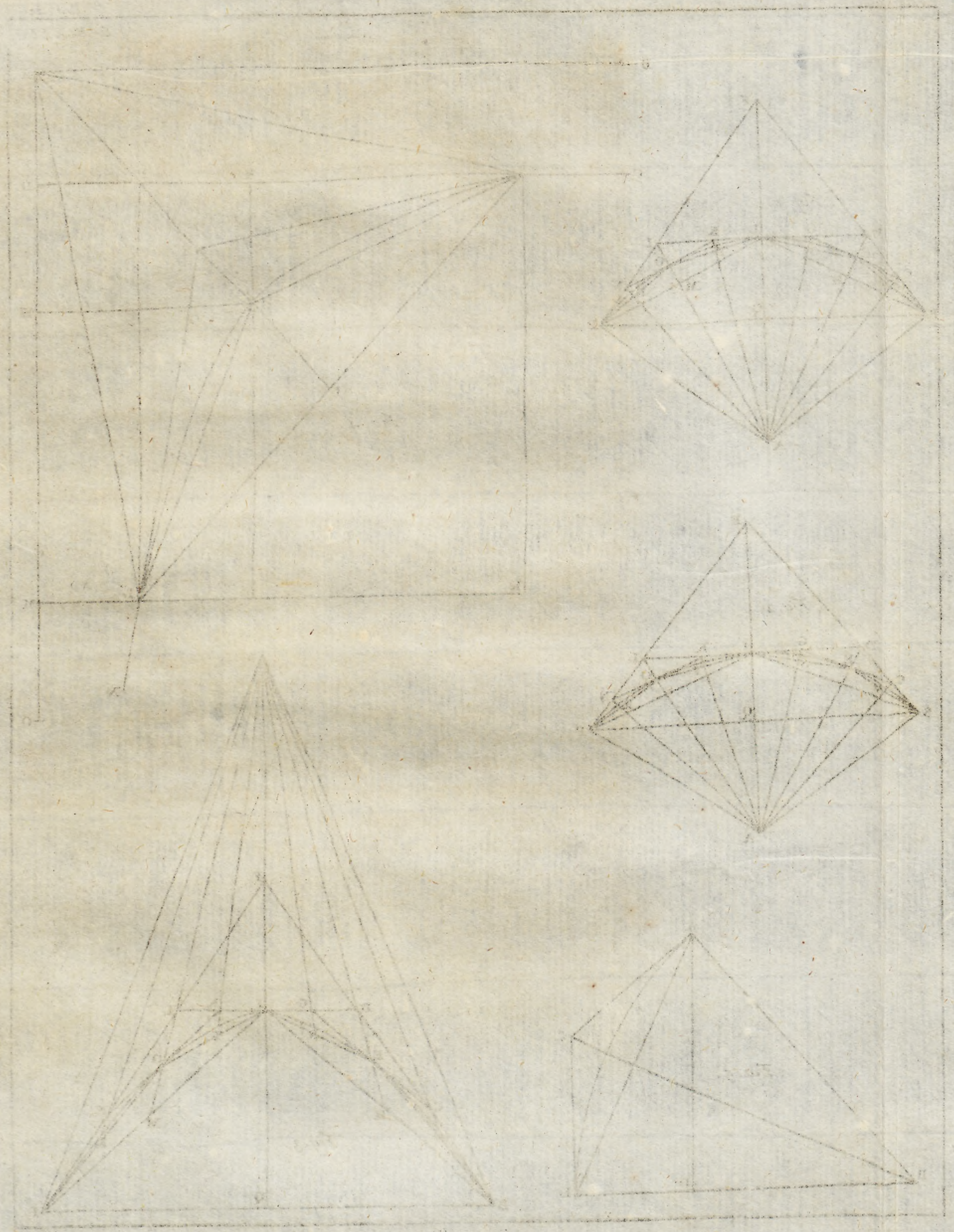
Sit hyperpola D I L, cujus asymptota A O, A K, sibi occurrunt in angulo recto O A K. proponitur hujus hyperbolæ spatium I L M K, contentum à curva hyperbolica I L, asymptoto K M & duabus rectis I K, L M, alteri asymptoto A O parallelis. oportet è datis rectis I K 100000000000, L M 1000000000000, A M 100000000000, & proinde recta quoque K M 90000000000, invenire mensuram spatii I L M K. Producantur rectæ I K, O L, & ducatur recta I P, ut compleantur rectangula L N K M, Q I K M; manifestum est rectangulum L N K M esse 9000000000000000000000000 & Q I K M 9000000000000000000000000 & trapezium

TAB. XLIV. fig. 1.

pezium L I K M esse medium arithmeticum inter prædicta rectangula, hoc est 49500000000000000000000000. inveniatur inter rectangula L N K M, Q I K M, medium geometricum 28460498941515413987990042 quod erit pentagonum spatio hyperbolico L I K M regulariter circumscriptum. Sitque ut trapezium LIKM unà cum dicto pentagono circumscripto ad dictum pentagonum, ita duplum dicti pentagoni ad hexagonum spatio hyperbolico L I K M regulariter inscriptum, nempe 20779754131836628160009835; quod hexagonum erit polygonum complicatum cum prædicto pentagono; quæ duo rectilinea efficiant primos seriei terminos convergentes: inter quæ sit medium geometricum cujus quadrati duplum dividatur per idem medium geometricum unà cum majori termino seu pentagono circumscripto; eruntque medium geometricum & quotus, secundi termini convergentes: atque ita continuetur series hæc convergens polygonorum complicatorum, donec medietas prima notarum eadem sit in utroque termino convergente, nempe ad terminum vigesimum; polygonum enim circumscriptum est 23025850929958961534173864, & inscriptum 23025850929931203593181124: adhibeatur deinde approximatio in hujus 23 & 24 demonstrata, & invenientur termini intra quos consistit vera spatii hyperbolici LIKM mensura, nempe 2302585092994045624 0178681, minor spatio, & 23025850929940456240178704 eodem major, & ideo non latet spatii mensura, quam invenire oportuit: totam polygonorum seriem hic appono unà cum numero rectarum curvam hyperbolicam subtendentium in unoquoque polygono circumscripto.

Extra


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.



	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	28460498941515413987990042	207797541318366281600009835
4	24318761696971474416609403	22410399968461612921314879
8	23345088913234727934949897	22868197570682058351436953
16	23105412906351426185065096	22986193244865462241217428
32	23045725982658962868047234	23015921117139340153267671
64	23030818728479610745741910	23023367512879647736902891
128	23027092819292183214705676	23025230015404383009313933
256	23026161398510805910921810	23025695697539046352276636
512	23025928546847571901068394	23025812121604634087915779
1024	23025870334152518169052273	23025841227841783762272302
2048	23025855780992551911165543	23025848504414868310197241
4096	23025852142703422669729927	23025850323559001769499206
8192	23025851233131194254554390	23025850778345089029496888
16384	23025851005738140519209367	23025850892041614212944994
32768	23025850948889877295901163	23025850920465745719335070
65536	23025850934677811503232115	23025850927571777860909059 2
131072	23025850931124795055887228	23025850929348286832351848
262144	23025850930236540944102405	23025850929792413888218560
524288	23025850930014477416159412	23025850929903444565218845 0
1048576	23025850929958961534173864	23025850929931203593181124

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

23025850929940456240178681	23025850929940456240178704

Poteſt

Poteſt igitur abſque periculo erroris ſumi ſequens numerus pro hyperbolæ ſectore, cujus numeri multiplices uſque ad decem, diviſionis facilitandæ gratia in compoſitione logorithmorum, hic ſubjicimus; in magnis namque diviſionibus præſtat uti repetita diviſoris multiplicium ſubſtractione quam ordinaria diviſione, ut conſtat expertis arithmeticis.

1	23025850929940456240178700
2	46051701859880912480357400
3	69077552789821368720536100
4	92103403719761824960714800
5	115129254649702281200893500
6	138155105579642737441072200
7	161180956509583193681250900
8	184206807439523649921429600
9	207232658369464106161608300
10	230258509299404562401787000

Manifeſtum eſt hoc problema eodem ferè modo poſſe reſolvi, etiamſi aſymptota AO, AK, non ſint conſtituta ad angulum rectum: nos autem ita ſuppoſuimus, ut facilior & paratior eſſet problematis uſus in doctrina logorithmica, quam primò invenit nobiliſſimus noſter Neperus, & quam nos (ni fallor) ad ſummum perfectionis faſtigium nunc elevamus.

PROP. XXXIII. PROBLEMA.

Propoſiti cujuscunque numeri logorithmum invenire.

TAB. XLIV. fig. 1.

Eiſdem poſitis quæ in antecedente, manifeſtum eſt, poſita IK unitate, ML eſſe decem: poſita ergo IK unitate ſit GH aſymptoto quoque AO parallela numerus propoſitus cujus deſideratur logorithmus. manifeſtum eſt ex data rectà GH dari KF, & ex præcedenti dari etiam ſpatium hyperbolicum GIKH, quod ſpatium hyperbolicum dico eſſe logorithmum numeri propoſiti GH, poſito ſpatio hyperbolico LIKM logorithmo numeri denarii: eſt enim (ex Gregorio à S. Vincentio) ſpatium GHKI in eadem ratione ad ſpatium LMKI, in qua ratio GH ad IK eſt multiplicata rationis LM ad IK; ſed ratio GH ad IK eſt multiplicata ratio-

rationis LM ad IK in eadem ratione qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM, quoniam idem eſt conſequens in utraque ratione; & proinde ſpatium GIKH eſt in eadem ratione ad ſpatium LIKM, in qua numerus GH eſt multiplicatus numeri LM; & ideo (quoniam ex hypotheſi ſpatium LIKM eſt logorithmus numeri LM ſeu denarii) erit ſpatium GIKH logorithmus numeri propoſiti GH, quoniam hæc eſt logorithmorum eſſentialis proprietas, ut ſint inter ſe in eadem directa ratione, in qua eorum numeri ſunt unus alterius multiplicati: at ponitur communiter logorithmus numeri denarii ad arbitrium unitas cum numero quodam cyphrarum: ſi igitur fiat, ut ſpatium LIKM ad ſpatium GIKH, ita arbitrarius denarii logorithmus ad alium numerum; erit inventus ille numerus, logorithmus numeri propoſiti GH, quem invenire oportuit.

SCHOLIUM.

PRaxis prædicti problematis prolixa eſt & laborioſa; & proinde, ut abbrevietur labor noſter in compoſitione tabulæ logorithmorum; ſciendum eſt nos ſolummodo laborare in inventione logorithmorum, numerorum primorum; numerorum enim compoſitorum logorithmi ex primorum additione & ſubductione nullo negotio invenientur. ſed ut numerorum primorum logorithmi facilius inveniantur, ordine progrediendum eſt à prioribus ad poſteriores, nempe à 10 cujus logorithmus eſt arbitrarius ad 2 numerum omnium primum, & à 10 & 2 ad 3, item à 10, 2 & 3 ad 7, item à 10, 2, 3 & 7 ad 11, & ſic deinceps. deinde inveniendi ſunt duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes, quorum unus compoſitus eſt ex numeris logorithmos cognitos habentibus, & ideo logorithmum datum habens, alter autem numerus compoſitus eſt ex ſolo numero primo (cujus quæritur logorithmus) vel ex illo unà cum aliis numeris logorithmos cognitos habentibus. deinde applicentur hi numeri compoſiti

(qui exempli gratia ſint G H, E F) in hyperbola aſymptoto O A paralleli; & inveniatur ſpatium hyperbolicum EGHF per hujus 32, quod breviter, fit quoniam G H, E F, parum inter ſe differunt. ex ſuppoſitione, unius numeri, exempli gratia G H, datur logorithmus, & proinde datur ejus logorithmi ratio ad logorithmum denarii arbitrarium, quæ eadem eſt (ex hactenus demonſtratis) cum ratione ſpatii hyperbolici G I K H ad ſpatium hyperbolicum L I K M, datur autem ex hujus 32 ſpatium L I K M; & ideo innoteſcit quoque ſpatium I K H G, cumque detur ſpatium E G H F, innoteſcit quoque E I K F; & proinde datur logorithmus numeri compoſiti E F; cumque ex ſuppoſitione dentur logorithmi omnium numerorum numerum E F componentium, excepto numero illo primo cujus logorithmus deſideratur, dabitur quoque illius numeri primi logorithmus, quem invenire oportuit. Exempli gratia, propoſitum ſit invenire logorithmum numeri binarii, ſuppoſito arbitrario numeri denarii logorithmo, unitate cum 25 cyphris. duo numeri compoſiti parum inter ſe differentes ſunt 1000 & 1024; numeri 1000 datur logorithmus, nempe triplum ſpatii 2302585092994045624017870O in antecedente inventi, poſito ſcilicet illo ſpatio numeri denarii logorithmo arbitrario; numeri 1024 ignoratur logorithmus, eſt enim compoſitus ex ſolo numero primo 2, nempe ejus decies multiplicatus eſt. applicentur hi numeri compoſiti in hyperbola, ut dictum eſt; ſitque G H 1000, E F 1024: ſed quoniam I K unitas eſt 1000000000000, erit G H 1000000000000000 & E F 1024000000000000, & per hujus 32 inveniatur ſpatium E G H F 23716526617316042II83067 (ſeriem convergentem hic appono,

ut lecto-

	Extra hyperbolam	Intra hyperbolam
2	237170824512628449899917	237162487062045867846886
4	237166655750699903737556	237164571388054419219371
8	237165613567087322970403	237165092476425954356426
16	237165353021613523599438	237165222748948181485250
32	237165287885271907848389	237165255317105572320456
64	237165271601188181041012	237165263459146597159038

hyperbolæ ſector intra ſequentes terminos conſiſtit

237165266173160272103220	237165266173160458453029

Sit inter hos terminos maximus quatuor continuè arithmeticè proportionalium 237165266173160421183067; qui proinde erit verus hyperbolæ ſector in notarum numero propoſito, quoniam primus triens notarum idem eſt in utroque termino convergente,

ut lectori compendium patefiat) seu logorithmus numeri $1\frac{24}{1000}$ posito logorithmo denarii arbitrario 23025850929940456-240178700; deinde eodem supposito logorithmo arbitrario denarii, addatur logorithmus numeri 1000, seu triplus logorithmi denarii, logorithmo numeri $1\frac{24}{1000}$, eritque summa logorithmus numeri 1024, cujus pars decima erit logorithmus numeri binarii, pro eodem logorithmo denarii arbitrario, nempe 6931471805599452914171917: fiatque ut logorithmus numerii denarii 23025850929940456240178700 ad logorithmum numeri binarii correspondentem 69314718055-99452914171917, ita logorithmus numeri denarii arbitrarius propositus nempe 100000000000000000000000000 ad logorithmum numeri binarii quæsitum 30102999566398119 52-405804, quem invenire oportuit: eodem modo invenitur logorithmus ternarii 4771212547196624373502993, &c.

Ut in promptu habeantur numeri illi compositi parum inter se differentes pro unoquoque numero primo, hic tabellam exhibeo pro numeris primis usque ad 100, & unam regulam pro numeris primis inter 100 & 1000 & alteram pro numeris primis supra 1000; quæ omnia ita excogitata sunt, ut verus cujuscunque numeri primi logorithmus inveniri possit correspondens logorithmo arbitrario denarii 100000-000000000000000000000 ex una sola multiplicatione, duabus divisionibus & una radicis quadratæ extractione, ultra inconsiderabiles aliquot operatiunculas.

2	1000 (^{3}) 10 1024 (^{10}) 2
3	32805 factus ex 5 & 6561 (^{8}) 3 32768 (^{15}) 2
7	2400 factus ex 3 & 32 (^{5}) 2 & 25 (^{2}) 5 2401 (^{4}) 7
11	9800 factus ex 2, 49 (^{2}) 7 & 100 (^{2}) 10 9801 factus ex 121 (^{2}) 11 & 81 (^{4}) 3

13	123200 factus ex 7, 11, 25 $^{(2)}$ 5, 64 $^{(6)}$ 2 123201 factus ex 169 $^{(2)}$ 13 & 729 $^{(6)}$ 3
17	2600 factus ex 13, 8 $^{(3)}$ 2 & 25 $^{(2)}$ 5 2601 factus ex 9 $^{(2)}$ 3 & 289 $^{(2)}$ 17
19	28899 factus ex 169 $^{(2)}$ 13, 9 $^{(2)}$ 3 & 19 28900 factus ex 100 $^{(2)}$ 10 & 289 $^{(2)}$ 17
23	25920 factus ex 10, 32 $^{(5)}$ 2 & 81 $^{(4)}$ 3 25921 factus ex 49 $^{(2)}$ 7 & 529 $^{(2)}$ 23
29	613088 factus ex 17, 23, 32 $^{(5)}$ 2, & 49 $^{(2)}$ 7 613089 factus ex 729 $^{(6)}$ 3 & 841 $^{(2)}$ 29
31	116280 factus ex 10, 17, 19, 4 $^{(2)}$ 2, & 9 $^{(2)}$ 3 116281 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 961 $^{(2)}$ 31
37	165648 factus ex 3, 7, 17, 29, & 16 $^{(4)}$ 2 165649 factus ex 121 $^{(2)}$ 11 & 1369 $^{(2)}$ 37
41	1413720 factus ex 7, 10, 11, 17, 4 $^{(2)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3 1413721 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 841 $^{(2)}$ 29
43	978120 factus ex 10, 11, 13, 19, 4 $^{(2)}$ 2, 9 $^{(2)}$ 3 978121 factus ex 529 $^{(2)}$ 23 & 1849 $^{(2)}$ 43
47	664848 factus ex 7, 13, 32 $^{(5)}$ 2 & 729 $^{(6)}$ 3 664849 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 2209 $^{(2)}$ 47
53	3059000 factus ex 7, 19, 23, 8, $^{(3)}$ 2, & 125 $^{(3)}$ 5 3059001 factus ex, 9 $^{(2)}$ 3, 121, $^{(2)}$ 11 & 2809 $^{(2)}$ 53
57	5851560 factus ex 3, 5, 13, 31, & 121 $^{(2)}$ 11 5851561 factus ex 1681 $^{(2)}$ 41 & 3481 $^{(2)}$ 59
61	3575880 factus ex 5, 7, 11, 43, 8 $^{(3)}$ 2 & 27 $^{(3)}$ 3 3575881 factus ex 961 $^{(2)}$ 31 & 3721 $^{(2)}$ 61
67	1620528 factus ex 3, 13, 16 $^{(4)}$ 2 & 49 $^{(2)}$ 7 1620529 factus ex 361 $^{(2)}$ 19 & 4489 $^{(2)}$ 67

71	2016399 factus ex 3, 11, 29, 43 & 49 (^{2}) 7 2016400 factus ex 16 (^{4}) 2, 25 (^{2}) 5 & 5041 (^{2}) 71
73	5116644 factus ex 4 (^{2}) 2, 9 (^{2}) 3, 169 (^{2}) 13, & 841 (^{2}) 29 5116645 factus ex 7, 17, 19, 31, 73
79	5997600 factus ex 17, 32 (^{5}) 2, 9 (^{2}) 3, 25 (^{2}) 5 & 49 (^{2}) 7 5997601 factus ex 961 (^{2}) 31 & 6241 (^{2}) 79
83	1164240 factus ex 5, 11, 49 (^{2}) 7, 16 (^{4}) 2, 27 (^{3}) 3 1164241 factus ex 169 (^{2}) 13 & 6889 (^{2}) 83
89	2859480 factus ex 5, 47, 8 (^{3}) 2, 169 (^{2}) 13 & 9 (^{2}) 3 2859481 factus ex 361 (^{2}) 19 & 7921 (^{2}) 89
97	1138488 factus ex 3, 13, 41, 89, & 8 (^{3}) 2 1138489 factus ex 121 (^{2}) 11 & 9409 (^{2}) 97

Pro numeris primis inter 100 & 1000 ſit hæc regula: ante numerum primum cujus logorithmus quæritur, ſumantur immediatè duo numeri proximi, & poſt eum numerus immediatè ſequens, qui tres numeri cum illo primo ſunt quatuor numeri in ſuo naturali ordine ſe invicem ſequentes; deinde multiplicetur primus numerus in cubum tertii & quartus in cubum ſecundi, eritque factorum differentia æqualis ſummæ primi & quarti vel ſecundi & tertii, ut facile demonſtrari poteſt; iſtique numeri facti habent ad minimum ſex notas primas omnino eaſdem, & proinde parum inter ſe differunt; atque omnium horum quatuor numerorum (excepto tertii) logorithmi cognoſcuntur ex ipſa progrediendi methodo, & ideo ad noſtram abbreviationem ſunt idonei. in numeris ultra 1000 non opus eſt tanto apparatu, quoniam rectangulum numerorum, inter quos immediatè comprehenditur numerus primus cujus quæritur logorithmus, unitate ſolummodo deficit à quadrato numeri primi; eorumque ideo primæ ſex notæ ad minimum ſunt eædem; atque primi & tertii dantur logorithmi, & ideo ad noſtrum inſtitutum ſunt idonei.

PROP.

PROP. XXXIV. PROBLEMA.

Ex dato logorithmo invenire ejus numerum.

Ex demonſtratis manifeſtum eſt hoc problema idem eſſe ac ſi quis proponeret; ex dato ſpatio hyperbolico, & una recta uni aſymptotorum parallela illud comprehendente, alteram invenire idem ſpatium comprehendentem, & eidem aſymptoto parallelam. Conſideretur ex quot notis arithmeticis conſtet logorithmus denarii arbitrarius; & ſumatur logorithmi vel ſpatii dati talis pars aliquota nempe ſpatium LIKM, ut pentagoni ſpatio LIKM regulariter circumſcripti, & hexagoni eidem regulariter inſcripti toties multiplicia, quoties ſpatium datum multiplex eſt ſpatii LIKM, concordent in tot notis arithmeticis, quot continet radix quadrata logorithmi arbitrarii; hoc enim facile fieri poteſt ex inſpectione tabellæ 32 hujus: datur ergo ſpatii LIKM menſura & recta IK unitas ex ſuppoſitione. Sit LM, z; ſicut in hujus 32 datur pentagonum ſpatio LIKM regulariter circumſcriptum & hexagonum eidem regulariter inſcriptum, inter quæ ſpatium datum LIKM eſt ſecunda duarum mediarum arithmeticè continuè proportionalium; & ideo duplum haxagoni una cum pentagono æquatur triplo ſpatii, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam z ſeu numerum LM, cujus toties multiplicatus, quoties ſpatium LIKM eſt ſubmultiplex ſpatii vel logorithmi dati, eſt numerus quæſitus, quem invenire oportuit.

TAB. XLIV. fig. 1.

Hoc problema idem eſt cum hujus 8, ſed aliter generalius & methodo plerumque minus operoſa hic reſolutum.

PROP. XXXV. PROBLEMA.

Rectâ per datum punctum in diametro ductâ, semicirculum in ratione data dividere.

TAB. XLIV. fig. 2.

Sit ſemicirculus A D G, cujus diameter A G, centrum E, punctum in diametro datum B. ſupponatur factum quod jubetur; ſitque recta B D ſemicirculum dividens in ratione data: quoniam datur ſemicirculi menſura & ratio in qua dividitur, igitur datur ejus portio nempe D B G. Sit recta B D, *z*: ex datis rectis B D, B E, E D, innoteſcunt triangula D E B, D E F, D E G: deinde ſit ut D E F una cum D E G ad D E G ità duplum D E G ad trapezium circumſcriptum D E G H: & poſitis primis terminis convergentibus D E G, D E G H continuetur ſeries convergens polygonorum complicatorum, ſecundum circuli proprietates ſæpius repetitas, donec conveniens fuerit approximationem adhibere ita ut exhibeatur ſector D E G, qui una cum triangulo D B E æquatur portioni D B G cognitæ, cujus æquationis reſolutio manifeſtat ignotam quantitatem *z* ſeu rectam B D: reliqua patent.

Idem problema eodem omnino modo reſolvitur in ellipſe, hyperbola vel earum ſectore dato.

SCHOLIUM.

Si quis prædictorum problematum mechanicam deſideret praxim; non difficile erit calculum, approximationem, & æquationis reſolutionem ſecundum vulgatas Geometriæ practicæ regulas quodammodo imitari, multa talia problemata poſſem hic reſolvere ope analyſios & noſtræ ſerierum convergentium doctrinæ, quæ antea impoſſibilia æſtimabantur: ſed dicet fortè aliquis has reſolutiones non eſſe geometricas; reſpondeo, ſi per geometricum intelligatur praxis ope

ope ſolius regulæ & circini peracta, hanc in his non ſolum eſſe impoſſibilem ſed etiam in omnibus problematis quæ ad æquationem quadraticam reduci non poſſunt ; ſicut facile demonſtrari poſſet ; & ſi per geometricum intelligatur reductio problematis ad æquationem analyticam ; omnia hæc problemata ſunt geometrice impoſſibilia, cum ex hic demonſtratis, manifeſtum ſit talem reductionem fieri non poſſe: ſi verò per geometricum intelligatur methodus omnium poſſibilium ſimpliciſſima ; invenietur fortaſſe poſt maturam conſiderationem omnia prædicta problemata eſſe geometriciſſimè reſoluta, diligenter animadvertendum totam ſerierum convergentium doctrinam poſſe etiam nullo negotio applicari ſeriebus ſimplicibus. Sit enim ſeries A, B, C, D, E, &c, talis naturæ ut tertius terminus C eodem modo componatur ex primo & ſecundo A, B, quo quartus D componitur ex ſecundo & tertio B, C, & quintus E ex tertio & quarto C, D, & ſic deinceps in infinitum ; ſitque differentia antecedentium A, B, major ſemper differentia immediatè ſequentium B, C; ſupponamus hanc ſeriem ita in infinitum continuari donec duorum terminorum immediate ſe invicem ſequentium nulla ſit differentia, ſitque unus ex illis terminis z, quem ſeriei terminationem appellamus : dico z eodem modo componi ex A & B quo ex B & C vel C & D; demonſtratio vix differt ab hujus 10 & ejus conſectario: hac ratione ſi ponatur triangulum, ſectori circulari vel elliptico inſcriptum, vel ſectori hyperbolico circumſcriptum a, & trapezium, ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum b; erit hexagonum ſectori circulari vel elliptico regulariter inſcriptum vel hyperbolico regulariter circumſcriptum $Vq\,\frac{2b^3}{a+b}$; & proinde ſector circuli, ellipſeos vel hyperbolæ eodem modo componitur ex a & b quo ex b & $Vq\,\frac{2b^3}{a+b}$; atque hinc etiam demonſtrari poteſt, quod ratio inter ſectorem & ejus triangulum datum non ſit analytica, ſecundum

A
B
C
D
E
z

tenorem hujus 11: poſſem quoque adhuc alia methodo particulari demonſtrare arcum circularem non habere rationem analyticam ad ſuam chordam datam : ſed plura non addo, geometras interim pro ſcientiæ incremento admonens, me reperiſſe in quibusdam figuris (quas Carteſius ſecundi generis appellat) tres focos, ſeu tria puncta, à quibus ductarum in quodlibet curvæ punctum rectarum ſumma vel differentia ſemper eſt eadem: unde mihi veriſimile videtur ſicut omnis curvæ primi generis duos habent focos vel reales vel imaginarios, ita omnes ſecundi generis habere tres, omnes tertii quatuor, & ſic in infinitum: quæ certè ſpeculatio ſcrutatu digniſſima eſt, eſſet enim admiranda figurarum geometricarum proprietas, & mechanicæ omnium æquationum praxi utiliſſima.

FINIS.

II.

HUGENII OBSERVATIONES IN LIBRUM JACOBI GREGORII, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

Dnus Hugenius rogatus à Societate quæ Parisiis suos habebat conventus (1668) in Bibliotheca Regia, ut vellet hunc librum examinare, societati retulit se multos errores observasse in demonstratione, qua Auctor contendit impossibilitatem quadraturæ Circuli & Hyperboles probare.

I. in 11ª. Propositione, in qua auctor contendit Circuli quadraturam analytice impossibilem demonstrare, hæc habentur *Si terminatio magnitudinum propositarum analytice componatur a primis terminis* $a^3 + a^2b$ & $ab^2 + b^3$, *componetur etiam analyticè & eodem omnino modo a secundis terminis* $ba^2 + bba$ & $2b^2a$. sed licet id verum sit quando terminatio inventa est per Methodum, quam indicat, non potest generalis inde deduci conclusio. nisi ponamus, non posse inveniri, nisi per ejus Methodum, terminationem seriei Magnitudinum, quas appellat *convergentes*, vel si aliâ methodo inveniatur illam etiam per suam methodum inveniri posse quod non demonstravit.

II. Autor immediate post addit, *nullam quantitatem posse eo-*

eodem modo analytice componi e terminis $a^3 + aab$, $abb + b^3$ *quo componitur e terminis* $aab + bba$, $2\,bba$. Hæc nihilominus invenitur per eandem methodum quam indicat in 7. Propositione. Methodus autem hæc est. Primo quærenda est quantitas perquam si multiplices $a^3 + aab$, & producto addas productum $abb + b^3$ multiplicati per datam quantitatem m, summa æqualis sit summæ duorum aliorum productorum, unius $aab + bba$ multiplicati per eandem quantitatem quæsitam, alterius $2\,bba$ multiplicati per datam quantitatem m. Ponamus igitur quantitatem illam æqualem z, erit $a^3 z + aabz + abbm + b^3 m = aabz + bbaz + 2\,bbam$; & $z = \frac{bbm}{aa + ab}$: Et certum est, sive multiplicetur $\frac{bbm}{aa + ab}$ per $a^3 + aab$ & addatur $abb + b^3$ multiplicatum per m, sive eadem illa quantitas multiplicetur per $aab + bba$ & addatur $2\,bbam$, semper prodire eandem quantitatem $2\,abbm + b^3 m$, & consequenter ultimam hanc quantitatem componi eodem modo e primis & secundis terminis progressionis convergentis propositæ, quod Autor fieri posse negavit.

III°. Datâ autem hac quantitate $2\,abbm + bbbm$, si hac utamur ad quærendam terminationem progressionis propositæ, juxta methodum ab auctore indicatam in 7 propositione, & in 10, reperietur $= \frac{3\,aab^3 + ab^4 + 2\,a^3 bb}{bb + ab + aa}$; & posito $a = 1$ & $b = 2$, illa terminatio, quæ designat in eo casu sectorem circuli continentem $\frac{1}{3}$ totius circuli, erit $= \frac{48}{7}$; & primus terminus progressionis $a^3 + aab$, qui designat $\frac{1}{3}$ trianguli æquilateri inscripti in eodem Circulo, erit æqualis 3; ita ut proportio circuli ad triangulum æquilaterum inscriptum sit ut $\frac{48}{7}$ ad 3, id est 16 ad 7. a vero nihilominus omnes has proportiones aberrare facile patet.

IV°. Si examinemus, cur terminatio aliquando occurrat vera per methodum Autoris, ut in 7 Propositione, interdum verò non; reperiemus id ex eo oriri quod problema $10^{mæ}$ Pro-

Propositionis non bene sit solutum; Non enim sufficit, ut inveniatur terminatio progressionis convergentis, invenisse quantitatem compositam eodem modo e primis & secundis terminis; nam talis solutio tantum locum habet quando quantitas illa detegitur, non investigatâ quantitate quæ dicitur z in 7 Propositione; vel quum eadem quantitas non componitur ex ulla quantitate quæ datur in terminis progressionis, ut in 7^a. Propositione, ubi $z = \frac{me}{d}$; nam Autor sumendo $z = \frac{mae\text{-}mbe}{ad\text{-}bd}$ non videtur observasse, divisionem posse fieri per a-b.

In exemplo propositionis 10, non quæritur quantitas z, sed z appellatur ipsa terminatio; & in transitu notandum est exemplum illud allatum esse citra propositum nam progressio, cujus primi termini sunt a, b, & secundi & $\sqrt{ab}$, $\frac{aa}{\sqrt{ab}}$ non est progressio convergens, neque habet terminationem, quamvis autor illam inveniat.

Quod attinet ad methodum, quam Autor proposuit ad appropinquandum per numeros ad dimensionem Circuli; D^{us} Hugenius dixit sibi videri se quid magis accuratum dedisse in libro cui titulus est *de Circuli magnitudine*, edito 1654. Addidit illa, quæ Gregorius habet de dimensione Hyperbolæ & ratione quam habet cum Logarithmis, bona quidem esse sed minime nova membris societatis, cum possint recordari, se ipsis idem jam proposuisse, regulamque ad inveniendos logarithmos, jamdudum actis eorum insertam esse. Se etiam non credere illud novum videri regiæ societati Anglicanæ, cum qua jam ante plures annos communicavit methodum ad invenienda pondera aëris in diversis altitudinibus supra terram, quæ fundamentum in hac ipsâ Hyperbolæ dimensione habet.

Hæc autem est methodus, quam D^{us} Hugenius proposuit ad inveniendum per logarithmos dimensionem Spatii Hyperbolici contenti inter Curvam & unam ex Asymptotis & duas lineas paralelas ad alteram Asymptoton, data ratione quam

in-

inter se habent duæ hæ lineæ. *Si logarithmus differentiæ logarithmorum horum numerorum semper addatur ad* 0, 36221, 56868, *summa erit logarithmus numeri partium, quas continet Spatium Hyperbolicum, illarum quarum* 1.0000000000 *continet parallelogrammum Hyperbolæ, id est illud, quod est contentum a duabus lineis ductis ex uno Hyperbolæ puncto, & quarum quævis parallela est uni ex Asymptotis*; Exempli gratia si parallelæ, quæ includunt spatium Hyperbolicum sint inter se ut 36 ad 5 operatio hoc pacto fiet.

1, 5563025008	*Logarithmus* 36.
0, 6989700043	*Logar.* 5.
0, 8573324965.	*Differentia.*
9, 9331492856	*Logar. Differentiæ.*
0, 36221 56868	*Logar. qui semper additur.*

10, 2953649724; *Logar. cujus numerus facit contentum in Spatio Hyperbolico, quod hic est* 1.9740810180.

III.

DOMINI GREGORII RESPONSUM AD ANIMADVERSIONES DOMINI HUGENII, IN EJUS LIBRUM, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

AD ea quæ dicit D. *Hugenius* contra meam *Circ. & Hyperb. Quadraturam*, ingenuè fateor (cum illa scriberem) me non animadvertisse exemplum in prop. 10. non esse seriem convergentem expe-

perientiam enim feci solummodo de primis & secundis terminis, non considerando tertios cum primis coincidere, nam ratiociniis insistebam, de exemplis parum solicitus. Ut autem appareat in hoc nihil contineri contra nostram Doctrinam, agedum hoc loco 10: *prop.* totidem verbis, sed cum legitimo exemplo repetamus.

PROP. X. PROBLEMA.

Ex data quantitate eodem modo composita à duobus terminis convergentibus cujuscunque seriei convergentis, quo componitur ex terminis convergentibus ejusdem seriei immediate sequentibus; seriei propositæ terminationem invenire.

Sit series convergens, cujus duo termini convergentes quicunque sint a, b, & termini convergentes immediatè sequentes $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$, termini priores inter se multiplicati efficiunt eandem ab, item sequentes inter se multiplicati efficiunt eandem ab; ex his invenienda sit propositæ seriei terminatio. Manifestum est, quantitatem ab eodem modo fieri à terminis convergentibus a, b, quo à terminis convergentibus immediatè sequentibus $\frac{2ab}{a+b}$, $\frac{a+b}{2}$: & quoniam quantitates a, b, indefinitè ponuntur pro quibuslibet totius seriei terminis convergentibus, evidens est, duos quoscunque terminos convergentes propositæ seriei inter se multiplicatos idem efficere productum, quod faciunt termini immediatè sequentes etiam inter se multiplicati; cumque duo termini convergentes duos terminos convergentes semper immediatè sequantur, manifestum est, duos quoscunque terminos convergentes inter se multiplicatos idem semper efficere productum, nempe ab; atque ultimi termini convergentes sunt æquales, & proinde sit ultimus ille terminus, seu seriei terminatio Z, quæ in se ipsam multiplicata facit

$Z^2 = a\,b$; eſt igitur Z. ſeu ſeriei terminatio $r^2\,a\,b$, quam invenire oportuit: & proinde ad inveniendam cujuſcunque ſeriei convergentis terminationem opus eſt ſolummodo invenire quantitatem eodem modo compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo componitur eadem quantitas ex terminis convergentibus ſecundis.

CONSECTARIUM.

Quoniam non refert in Problemate, *ſive termini convergentes*, a, b, *ſint primi, ſecundi vel tertii, &c. manifeſtum eſt, omnis ſeriei convergentis terminationem eodem modo eſſe compoſitam ex terminis convergentibus primis, quo ex ſecundis, tertiis, &c.*

Si quis aliud Exemplum deſideret, ſint primi termini a, b, ſecundi $r^7\,a^5\,b^2$, $r^2\,a\,b$, quantitas eodem modo compoſita &c. eſt $a^7\,b^4$ & ſeriei terminatio $r^{11}\,a^7\,b^4$: videat *Hugenius*, duo exempla legitima hic adducta inquiſitionem *Septimæ* non admittere; ope tamen *prop. decimæ* (ſuppoſita tertia illa quantitate) facilè reſolvuntur, neque ullo modo conſectarium reſpuunt, quod ſolummodo eſſe momenti ſatis ſit indicaſſe; plura autem exempla deſideranti millena afferam.

Ad primam *Hugenii* objectionem quod ſpectat, miror eum non conſideraſſe præcedens *conſectarium*, ubi illa, quæ deſiderat, evidenter deduco ex *prop.* 10. At agnoſcit hoc verum eſſe in illis ſeriebus, quæ ope noſtræ methodi terminantur: velim certè ut aſſignet mihi Nobiliſſimus Vir ſeriem aliquam convergentem cum ſua terminatione, quæ conſectarium noſtrum reſpuat; vel ſi eam aſſignare non poſſit, ſolidam dubitandi rationem tantum deſidero. Ut autem funditus evertatur hæc objectio, ſequentem exhibeo demonſtrationem Geometricam.

Sit

Sit A. Polygonum regulare ſectori *inſcriptum*. B eidem ſimile *circumſcriptum*; continetur ſeries convergens polygonorum &c. ut ſit ejus terminatio ſeu circuli ſector Z: ſit X eodem modo compoſita à terminis C, D, quo Z à terminis A, B; dico Z & X eſſe indefinitè æquales; ſi non ſint indefinitè æquales, ſit inter illas indefinita differentia *a*, & continuetur ſeries convergens in terminos convergentes I, K, ita ut eorum differentia ſit minor quam *a*; hoc enim abſque dubio concipi poteſt, etiamſi hic omnes quantitates ſint indefinitæ, quoniam definitis quantitatibus A, B, definitur etiam *a*, ſed adhuc reſtat K-I quantitas indeterminata in infinitum decreſcens. Manifeſtum eſt, *ſectorem* Z eſſe indefinitè minorem quam K, & majorem quam I: item quoniam Z eodem modo componitur ex quantitatibus A, B, quo X. è quantitatibus C, D, & Z indefinitè minor eſt quam K & major quam I, patet ex Proprietatibus ſerierum convergentium, X etiam eſſe indefinitè majorem quàm I, & minorem quàm K (eſt enim revera indefinitè major quàm L & minor quam M) & proinde ſunt quatuor quantitates indefinitæ, quarum maxima & minima ſunt I, K, intermediæ autem Z & X, & ideo differentia extremarum K-I major eſt quàm *a* differentia mediarum, quod eſt abſurdum, ponitur enim minor; quantitates ergò Z & X non ſunt indefinitè inæquales, & ideo ſunt indefinitè æquales, quod demonſtrandum erat. Manifeſtum eſt hanc demonſtrationem eodem modo applicabilem eſſe omni ſeriei convergenti.

A B
C D
E F
G H *a*
I K
L M
Z
X

In objectionibus 2, 3, & 4, contra ſuas ipſius imaginationes argumentatur *Hugenius*: Ego enim ſatis dilucidè affirmo in *Scholio propoſit*. 5. & in *fine prop*. 9. Septimam & nonam propoſitionem eſſe Particularem, unamquamque ſuo caſui; item in *Prop. decima* (quàm ergo pro generali ſubſtituo) evidenter ſuppono, & non quæro, illam quantitatem eo modo compoſitam ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; ſatis enim ſcio, talem methodum genera-

lem esse impossibilem. Sed omnium maxime admiror, Clarissimum Virum non animadvertisse in 8. *definitione*, Quantitates C, D, E, compositionem ingredientes, semper esse easdem, nempe definitas & invariabiles, ipsos autem terminos A, B, esse indefinitos & variabiles, nimirum in F, G, & infinitos alios: at quis est qui non videt *Hugenii* $\frac{bz\ m}{az + ba}$ non minus esse indefinitam, quam sunt ipsi termini? Deinde in *Procemio nostræ Geometriæ partis universalis*, sic dico. *Alii objiciunt contra prop.* 11. *ita: si addatur* a^3 *termino* $a^3 + a^2b$ *& temino* $ba^2 + b^2a$, *enervetur vis utriusque demonstrationis. Respondeo*, a^3 *esse quantitatem indefinitam, & alias quantitates indefinitas præter ipsos terminos convergentes compositionem non posse ingredi, quod analystam latere non potest*: Eodem modo respondeo *Hugenio* $\frac{bbm}{az + ab}$ esse quantitatem indefinitam, & ideo compositionem non posse ingredi: Si autem mihi objiciat, in *septima* me credidisse, $\frac{mae - mbe}{ad - bd}$ fuisse quantitatem indefinitam; Respondeo, etiamsi divisio per *a-b* à me satis inconsideratè neglecta sit, apertè tamen constat, me hoc cognovisse, ex diversitate methodorum, quibus utor in septima & decima, quippe ista *particulari*, in qua quantitatem illam quæro, & hac *generali*, in qua illam suppono; nulla enim alia ratio hujus diversitatis excogitari potest; quod etiam ex ipsis *septima & decima* est manifestum, cum appellem semper terminos convergentes quantitates indefinitas, hoc ipso satis significans, nullas alias quantitates indefinitas calculo inesse.

Semper credidi in rebus scientificis verba ita candidè esse explicanda (si modo possibile sit) ut discursus nullum includat absurdum; at *Hugenius* satis percipit, discursum nihil continere absurdi, modò nulla quantitas indefinita præter ipsos terminos compositionem ingrediatur; judicat tamen absque omni ratione, me contrarium existimasse; libenter enim optarem *Hugenium* assignasse locum, ubi assero, illam inqui-

quisitionem Septimæ esse universalem. Dico igitur & declaro me intelligere, nullam quantitatem indefinitam præter ipsos terminos convergentes compositionem posse ingredi. Atque ita corruunt tres ultimæ *Hugenii* sive diversæ objectiones, sive ejusdem portiones; nescio enim, quare in tot partes dividatur.

Præcedentibus perceptis, evidentissimum est, *Circuli*, *Ellipseos*, vel *Hyperbolæ* sectorem esse terminationem seriei convergentis, cujus primi termini $a^3 + a^2 b$, $ab^2 + b^3$, & secundi $ba^2 + b^2 a$, $2b^2 a$ * & proinde Sectorem eodem modo componi ex primis terminis quo ex secundis*; atque evidens est, nullam dari quantitatem eodem modo analyticè compositam ex primis terminis quo ex secundis, quoniam primos eodem modo analyticè tractando quo secundos, semper restat altior potestas ipsius a in primorum producto, quam in producto secundorum; de hoc (si non credatur) fiat experientia, & constabit non solum assertionis veritas, sed etiam ejusdem demonstratio; quando autem altior est ejusdem potestas in una quantitate quàm in altera, nulla datur indefinita æquatio, de qua hic tantum loquimur, hoc est, ut (positis a, b, ad libitum,) æqualitas semper rite procedat. Atque hæc est summa non solum propositionis undecimæ sed etiam totius nostræ *Circ.* & *Hyp. Quadraturæ*, ab *Hugenio* adhuc intactæ. Gratias tamen ago nobilissimo viro, quod meas qualescunque lucubrationes examinare dignatus est, hinc enim mihi data est occasio illas fusius explicandi & confirmandi. Num *Hugeniana* methodus circulum mensurandi mea sit præcisior, experientiæ relinquo judicandum; quod autem nostra, *Hyperbolam quadrandi*, illi etiam innotuerat, de hoc nihil habeo quod dicam, nisi quod mihi gratuler, inventa mea ipso *Hugenio* non æstimari indigna.

* *Schol.* 5.
* *Conf.* 10.

IV.

EXCERPTA EX LITERIS D^{ni}. HUGENII DE RESPONSO, QUOD D^{nus}. GREGORIUS DEDIT AD EXAMEN LIBRI, CUI TITULUS EST, *VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.*

In circuli quadraturam inquirentes Geometræ, varia & quidem pulcherrima detexere, ideo ne utili exercitio destituantur adversus Gregorium defendere constitui, quadraturam hanc detegi posse; neque huc usque responsionem hanc distulissem, nisi occasione controversiæ nostræ examen suscepissem exactissimum de proxima Circuli & Hyperboles Quadratura: in quo me interpellarunt sæpe alia impedimenta.

Dico nunc primo; Quod spectat impossibilitatem analyticam quadraturæ illarum figurarum, tantum abesse etiam post supplementum demonstrationum, quod D^{nus} Gregorius dedit, impossibilitatem hanc bene probatam esse, ut adhuc dum incertum maneat, num Circulus & quadratum diametri ejus sint incommensurabilia, id est an non horum ratio per numeros possit exprimi; quod etiam applicari potest portioni determinatæ Hyperboles & figuræ huic inscriptæ. Quod ut demonstremus sufficit observasse; quod XI ejus Propositio & supplementum nil probent quando in ejus serie convergente determinantur quantitates *a* & *b* per numeros rationales vel surdos; quoniam tunc terminatio etiam poterit esse numerus quidam similis; & contrarium per illam propositionem demonstrari non pote-

terit, quoniam tunc ignotum erit, quomodo terminatio composita sit ex primis & secundis terminis. E. G. Si a sit 1 & b, 2 quomodo probabitur per XI ejus Propositionem, terminationem non esse $\frac{7}{3}$. Ut ergo concludatur, rationem Circuli ad quadratum diametri ejus non esse analyticam, demonstrari non solum debet, quod sector Circuli non sit analyticus indefinite ad figuram suam inscriptam, licet illa demonstratio non careat suâ pulchritudine, sed quod illud etiam verum sit *in omni casu definito*.

Dico præterea, si quantitates a & b maneant indeterminatæ, terminationem forte reduci ad æquationem ex iis, quarum radices dari nequeunt; & contrarium probari per XI ejus Propositionem, neque per Supplementum, non poterit, nihilominus si illa terminatio reducta sit ad quandam æquationem ejus naturæ, crederem Quadraturam Geometricè esse inventam per intersectionem quarundam linearum curvarum, quæ in Geometriâ admittuntur.

Non inhærebo in aliis objectionibus, quas proposui; Dicam tantum, has, sicuti locum amplius non habent post correctionem Dn. Gregorii, ita antea firmo fundamento nixas fuisse; quoniam omissa divisione necessariâ per a- b in tot locis propositionis VII. poterat præsumi illum non novisse talem divisionem esse possibilem, & consequenter illum credidisse, in compositione de qua agitur indefinitas admitti debere quantitates.

Transeo igitur ad comparationem nostrarum methodorum pro dimensione Circuli proxima: Certum est, primas ejus approximationes quarum fundamentum sunt ipsius propositiones XX, & XXI. easdem esse cum iis, quas dedi in tractatu *de Circuli magnitudine*; ubi demonstravi eadem illa Theoremata, scil. si Polygonum in Circulo inscriptum sit a; & Polygonum simul circumscriptum sit d: contentum Circuli minus esse quam $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ *, sed majus quam $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$ *, posito c pro Polygono inscripto quod duplo majorem habeat laterum numerum quam a vel d. Quidquid hic dico

* Vide supra pag. 361. pr. VI.

* Vide ibid. prop. V.

&

& in ſequentibus dicam de Circulo debet intelligi pariter de ſectore Circuli.

Præter hanc approximationem D. Gregorius aliam proponit in fine ſuæ xxv Propoſitionis, quam admirandam dicit, cujus demonſtrationem ſe ignorare fatetur; hæc eſt, inter duos terminos, ſtatim memoratos $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}d$ & $\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}a$, inventis quatuor mediis quantitatibus in proportione Arithmetica, aſſerit maximam harum quantitatum adeo Circuli magnitudini vicinam eſſe, ut, ſi in numeris, qui deſignant Polygona ſimilia *a* & *d*, prima notarum triens ſit eadem, error ad unitatem non pertingat.

Sed invenio hanc approximationem in Circulo veram non eſſe licet in Hyperbola locum habeat, &, dum in hac utimur maxima quatuor mediarum Arithmeticarum proportionalium, minimam pro approximatione Circuli adhibendam eſſe.

Ita minima quatuor mediarum proportionalium inter terminos dictos primæ approximationis erit $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, uti facile eſt videre per Calculum; & probare poſſum non ſolum experientiâ, ſed & per demonſtrationem quantitatem hanc, poſitis numeris quorum prima notarum triens eadem eſt, exprimentibus polygonis *a* & *d*, a vera Circuli magnitudine non aberrare niſi in duabus ultimis notis, & plerumque in omnibus notis & ulterius cum vera magnitudine conincidere, quam tamen ſemper ſuperat, cum e contrario maxima quatuor Mediarum, qua utitur D[us] Gregorius in Hyperbola deficiat.

Inveni præterea, approximationem hanc pro Circulo non æque accuratam eſſe, ac eſt illa quam dedi in Tractatu de *Circuli magnitudine*, juxta quam, quando *a*, *c* & *d* deſignant eadem Polygona, ac ſupra, terminus excedens contentum Circuli eſt $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ * Neque demonſtratio difficilis eſt, quonian ſi neges illum terminum eſſe minorem ideoque magis exactum

* *vide ſupra p. 383. in fine.*

ctum quam præcedentem $\frac{16c + 2d - 3a}{15}$, ſequetur, cubum $c - a$ non fore majorem nihilo, & c non majorem quam a contra hypotheſin, uti facile videre eſt per calculum analyticum, obſervando quod d ſit $= \frac{cc}{a}$.

Poſſunt etiam a & c ſumi pro circumferentiis Polygonorum inſcriptorum, quorum unum ſubduplum laterum habet numerum; Et tum terminus $a + \frac{10cc - 10aa}{6c + 9a}$ eſt longitudo circumferentiæ Circuli, aut arcus ſectoris parum admodum excedens, ut ſi notarum triens in a & c ſit eadem, error dari non poterit niſi in ultima nota, & ſæpius nequidem in quatuor vel quinque notis ſequentibus ultra illas quæ dantur in numeris a vel c.

Sed & ut illi, qui contemplationes has negligunt, tamen quid commodi ex noſtra controverſia capiant, addam hic Geometricam conſtructionem ex ultimâ approximatione deductam qua invenitur longitudo arcus Circuli dati adeo acurata quam ad uſum deſideratur.

Sit arcus Circuli, qui non excedat ſemicircumferentiam A B C, cujus ſubtenſa ſit A C; dividat hanc ut & arcum in duas partes æquales linea B D. TAB. XLIV. fig. 3.

Ducta ſubtenſa A B ſumantur ejus $\frac{2}{3}$ & ponantur ab A ad E in producta lineâ C D; tum diminuta D E decimâ parte E F, ducatur F B, & tandem ipſi perpendicularis B G. Erit linea A G æqualis arcui A B, vel dupla linea æqualis arcui A B C, quæ tam parum excedet, ut tunc etiam, quum arcus erit æqualis ſemicircumferentiæ Circuli exceſſus non ſit $\frac{1}{1400}$. longitudinis; ſed ſi tantum ſit $\frac{1}{3}$ circumferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$, ſi autem arcus tantum ſit pars quarta circumferentiæ error non erit $\frac{1}{90000}$ longitudinis.

Poſſem hic addere approximationem & conſtructionem omnino ſimilem pro quadratura Hyperboles, paulo magis accedentem ad veram quam media Arithmetica D^{ni}. Gregorii,

rii, de qua superius dixi, sed vererer, ne nimium hoc scriptum producerem, & certus sum præterea, post illa, quæ D[ni]. Mercator nuper feliciter invenit de illa quadratura, & correctionem D[ni]. Wallisii, inventa nostra hac de re parum esse consideranda.

V.

EXCERPTA EX EPISTOLA

D. JACOBI GREGORII,

CONTINENTE QUASDAM EJUS CONSIDERATIONES, SUPER EPISTOLA

D. HUGENII,

IMPRESSA IN VINDICATIONEM EXAMINIS SUI LIBRI, DE VERA CIRCULI ET HYPERBOLÆ QUADRATURA.

Ex duobus argumentis, quibus conatur Nob. D. *Hugenius* doctrinam meam evertere, primo quidem, responsionis fundamentum dedi in *Proœm.* ad *Geometr. partem universalem;* alterum autem provenit solummodo à Prop. 11. non recte, opinor, ab *Hugenio* intellecta, quam tandem admittit post correctiones (ut inquit) à me factas. Ut autem, simul cum resolutione Objectionum, omnem evertam dubitandi rationem, ex admissa *Prop.* 11. in forma probare conabor Syllogistica, Nullam esse rationem analyticam inter Circulum & Diametri Quadratum: Præter Modum quippe & figuram nil deest in hactenus à me publicatis, quin

quin id integrè demonſtretur; quæ interim forma rarò à Geometris exigitur. Dico itaque;

Si daretur ratio Analytica (ſeu ratio notis Analyticis exprimenda) inter Circulum & Diametri Quadratum, tunc Circulus analyticè componeretur ex Quadratis, inſcripto & circumſcripto. Sed poſterius eſt abſurdum E. Sequela Majoris ſic probatur;

Quantitas quæſita & determinata invenitur ex quantitatibus quibuſcunque eam determinantibus, in ea ratione, ſeu relatione, quam habet quantitas determinata ad dictas quantitates determinantes. Sed Quadratum inſcriptum & circumſcriptum Circulum determinat, idemque ex illis Circulus daretur in ea relatione, quam habet ad Diametri Quadratum vel ejus ſemiſſem, h. e. ſi eſſet ratio analytica inter Circulum & diametri Quadratum; Ex dictis quantitatibus determinantibus *analyticè* componeretur Circulus. Ex dictis enim quantitatibus omnia analyticè componi poſſunt, quæ ad ea rationem habent analyticam.

Secundi Syllogiſmi *Minor* eſt evidentiſſima. *Major* autem eſt axioma ab omnibus Geometris tacitè admiſſum.

Minor Syllogiſmi prioris ſic probatur.

Eodem modo componitur Circulus ex Quadrato inſcripto & circumſcripto, quo componitur Quadrans Circuli ex Triangulo inſcripto & Trapezio vel potius Quadrato circumſcripto. Sed ex 11. *Prop.* Quadrans Circuli ſeu ſector non poteſt componi analyticè ex Triangulo inſcripto & Quadrilatero circumſcripto. E.

Major eſt evidens. At poterit fortaſſe diſtingui *Minor*, dicendo; Prop. 11. veram eſſe in Methodo indefinita; ſed poſſe eſſe falſam in methodis Particularibus. At inſto. Omnis methodus indefinita in methodos ſeu caſus Particulares eſt reſolubilis. Sed hæc methodus indefinita, nempe quod ſector ſit terminatio datæ ſerie convergentis, in nullam particulararem reſolvi poteſt. Nulla igitur datur hic methodus particularis. *Major* patet, quia quantitates æquales in ſe mutuò ſunt reſolubiles. *Minorem* ita probo; Si hæc Methodus

indefinita reſolvetur in aliquam particularem, reſolutio fieret vel ab Analyſi *ſpecioſa* vel *numeroſa*. Sed neutrum dici poteſt. E. *Major* patet ex ſufficienti enumeratione. *Minor* ſic probatur: Non ab Analyſi *ſpecioſa*, quoniam hæc Methodus *indefinita* ad eam eſt irreducibilis, ut patet ex Prop. 11. Non à *Numeroſa*, quæ hic eſt interminabilis, proindeque invariabilis.

In hanc ultimam diſtinctionem reſolvitur 1. objectio *Hugenii.* Velim enim Nobiliſſ. Virum conſiderare, omnem plenam Problematis ſolutionem eſſe *indefinitam*. Nam Methodi *particulares*, cum ſint *infinitæ*, exhiberi omnes nequeunt; neque dirigi poſſunt à tenore Problematis quippe illis omnibus communi: Ideoque requiritur Methodus *Generalis* ſeu Indefinita, Particularium directrix. Agnoſco utique Methodos Particulares caſu ſæpe inveniri abſque ope Generalis; attamen fatendum eſt Geometris, nullam eſſe, nec poſſe fieri Mothodum Particularem, in quam reſolubilis non ſit Methodus indefinita. Si igitur Methodus Indefinita omni reſolutioni ſit impervia (ut in *Prop.* 11. eſt demonſtratum) eodem modo omnes Particulares reſolutionem etiam reſpuent; proindeque tam Definita, quam Indefinita nullam compoſitionem agnoſcit. Talis enim Compoſitio, qualis Reſolutio.

Etiamſi prædicta, meo quidem judicio, adundè ſufficiant, ne tamen ullus relinquatur cavillationi locus, 11^{mam} noſtram *Prop.* etiam in *Definitis* hic demonſtrabimus. Sit ergò B Polygonum intra Circuli ſectorem, 2.B Polygonum circumſcriptum & priori ſimile; ſufficit enim Polygonorum proportionem definire, ut Theorema definitè demonſtretur. Continuetur ſeries convergens ut ſit ejus teminatio ſeu Circuli Sector Z. Dico, Z non poſſe componi *analyticè* ex Polygonis *definitis* B, 2 B. Si fieri poteſt, componatur Z Analyticè ex Polygonis Definitis B, 2 B. ſintque duæ quantitates Indefinitæ *a* & *x*, è quibus componatur *m* eo-

B	2 B
C	D
E	F
G	H
Z	
a	*x*

dem

dem modo, quo Z. componitur à quantitatibus B, 2 B; Item eodem modo componatur n ex quantitatibus $\sqrt{ax}$, $\frac{2ax}{a + \sqrt{ax}}$: quantitates m, n, non sunt indefinite æquales ex *prop.* 11. Si igitur inter m & n fingatur æquatio; a manente quantitate indefinita, æquatio inter m & n tot habebit radices seu quantitates, in quas resolvitur x, quot quantitatum, inter se diversas rationes habentium, binarii sunt in rerum natura, quæ vices quantitatum a, x, subire possunt, h. e. quæ eandem quantitatem *Analyticè* ex se ipsis componit eodem modo, quo eandem quantitas componitur ex ipsarum media Geometrica $\sqrt{ax}$, & ex media Harmonica inter dictam mediam Geometricam & x, nempe $\frac{2ax}{a + \sqrt{ax}}$, ita ut compositio sit eodem modo quo Z componitur ex B & 2B. atque ex Consectario *Prop.* 10. omnes quantitatum binarii, rationes quoque diversas inter se habentium, B 2B, CD, EF, GH, &c. in infinitum, possunt supplere vices quantitatum a, x, quoniam Z eodem modo componitur ex B 2B, quo ex CD, EF, vel GH, &c. & proinde æquatio inter m & n radices habet numero infinitas. Sed omnis æquatio habet ad summum tot radices, quot habet dimensiones; & proinde æquatio inter m & n dimensiones habet numero infinitas, quod est absurdum; ideoque Z seu Circuli Sector non potest analyticè componi ex Polygonis definitis B, 2B. quod demonstrandum erat. Hinc manifestum est, Terminationem cujuslibet seriei convergentis, si non possit componi ex terminis convergentibus *indefinitè*, nec posse componi *definitè*; adeoque evanescit simul cum nostra distinctione Objectio *Hugenii* prima.

$\sqrt{ax}$	$\frac{2ax}{a + \sqrt{ax}}$
m	n

Idem in Objectione sua secunda non videtur advertisse, me non solum in Prop. 11. sed etiam in toto meo Tractatulo intelligere per Extractionem radicum, Resolutionem omnium potestatum sive purarum sive affectarum; omnium quippe eadem est ratio, neque ulla imaginabilis est in demonstratione diversitas, sive Sector supponatur Radix ali-

cujus poteſtatis puræ, ſive affectæ ad puram irreducibilis. Nam ſi Sector eodem modo fiat ex primis terminis convergentibus, quo ex ſecundis (ut in Conſect. *Prop.* 10. eſt demonſtratum) etiam omnes ejus poteſtates ſive puræ, ſive quocunque modo affectæ eodem modo componitur è primis, quo è ſecundis terminis convergentibus, quæ (in Analyticis exhibitæ) erunt æquales quantitates eodem modo Analyticè compoſitæ ex primis, quo ex ſecundis terminis convergentibus; quod eſt abſurdum, nempe contra *Prop.* 11. admiſſam. Senſus igitur integer *Prop.* 11. eſt Hoc Problema (*E datis duobus polygonis complicatis, invenire Sectorem ſive Circularem ſive Hyperbolicum ab illis determinatum*) non poteſt reduci ad ullam æquationem Analyticam.

In comparatione *Hugeniana* inter noſtras methodos, agnoſco, meas approximationes prop. 20. & 21. eaſdem eſſe cum *Hugenianis*, ſed methodo mihi peculiari demonſtratas. At meam approximationem in fine *prop.* 25. non percipere videtur *Hugenius*; aliam interim ſibi fingit: hanc primò meam non eſſe probat, deinde tamen eam cum ſua comparat, victoriaque potitur. Sed lentè hic feſtinandum.

Sit a Polygonum, Circulo vel ſectori inſcriptum, c Polygonum inſcriptum duplo plura habens latera, d autem ſit Polygonum circumſcriptum ſimile ipſi c. Ex 20. *prop.* Sector eſt major quam $\frac{4c - a}{3}$; & ex 21. Sector eſt minor quam $\frac{2d + c}{3}$, inter quos terminos ſit maximus quatuor continuè proportionalium $\frac{8d + 8c - a}{15}$, nempe noſtra approximatio; quam rigidiſſimis *Hugenii* cenſuris ſubjicio. Hallucinatur autem *Hugenius*, quod Polygona a & d ſimilia ſumeret, cum debeant eſſe c & d, quæ duplò plura habent latera. Ne autem dicat, factam eſſe à me correctionem, conſideret hanc approximationem non ſolum verbis *prop.* 25. ſed & praxi *prop.* 30. eſſe conſonam, ubi approximationem *prop.* 21. ex ultimis ſimilibus Polygonis conſtruo: ridiculum enim eſſet, illam è penultimis minus præciſam dare, cum eadem ope-

opera detur magis præcisa ex ultimis. At miror, cum *Hugenius* incidisset in meam *Hyperbolæ* approximationem, quod eam non potuerit *Circulo* applicare; Nam in Hyperbola absque dubio 24 *prop.* approximationem ex ultimis similibus polygonis construxit: Omnis enim ad *Circulum* approximatio ex polygonis deducta, *Hyperbolæ* est etiam applicabilis, & vice versa. Sed hoc non videtur animadvertisse *Hugenius*; alioqui in fine suarum Animadversionum non promitteret talem Hyperbolicam approximationem, de cujus applicatione ad Circulum nihil dicit. Quæ autem illic affirmat (si de semet loquitur in plurali) transeant; si verò etiam de me adeo fidenter sibi persuadeat, falli ipsum putem, cum hæc eadem quadratura, de qua loquitur, antequam ab eo videretur, ad laboris dimidium à me sit reducta.

Ne autem *Hugenii* praxis geometrica minus peritis videatur nostram superasse, ex nostra approximatione, ab *Hugenio* rejecta, sequentem praxin exhibebo.

In fig. *Hugeniana* sit $AC = A$, $ABC = B$, sitque $A + B : B :: 2B : C$; eritque $\frac{8C + 8B - A}{15}$ major, quam arcus ABC; differentia autem, in semi-circumferentia minor erit quàm ipsius $\frac{1}{3500}$, in triente minor quam ipsius $\frac{1}{40000}$, & in quadrante minor quam ipsius $\frac{1}{300000}$. Sed quoniam præcedens approximatio major est quàm arcus, aliam addamus eodem minorem. Sit $A : B :: B : D$; $= \frac{12C + 4B - D}{15}$ minor erit quam arcus ABC; differentia autem in semi-circumferentia minor erit quàm ipsius $\frac{1}{1000}$, & in quadrante minor quam ipsius $\frac{1}{60000}$, inter has approximationes sit maxima, penultima sex continuè Arithmeticè proportionalium, quæ minor erit quàm arcus, differentia autem in semi-circumferentia minor erit quam ejusdem $\frac{1}{33000}$, & in quadrante

TAB. XLIV. fig. 3.

minor quam ejusdem $\frac{1}{3000000}$. Sed hæc levia mihi videntur, cum possim Approximationes exhibere, quæ ab ipsa semi-circumferentia differant minori intervallo, quam quælibet ejus pars assignata, neque nobis amplius apparent hæc mirabilia, cum demonstratio solida innotescat. Ad reliqua ab *Hugenio* publicata, cum à meo instituto sint aliena, nihil dico, nisi quod ipsa Hugenii dicta (non obstante exactissima sua, ut ait, materiæ hujus examinatione) à meæ *Appendiculæ* factis ni fallor, longè superentur. Vale. *Decemb.* 15. 1668.

Figura *Hugenii* hæc est, quam ipse hoc sensu, licet Gallicè, sic explicat. Sit Arcus Circuli, qui non excedat semicircumferentiam, A B C, cujus subtensa sit A C, & dividantur ambo in partes æquales per lineam B D. Ducta subtensa A B, capias inde $\frac{2}{3}$, easque jungas inde ab A ad E in linea C A protracta. Dein, resecta lineæ D E parte decima E F, ducas F B, & tandem B G, ipsi perpendicularem: & habebis lineam A G æqualem Arcui A B C, cujus excessus tantillus erit, ut etiam tunc, quando hic arcus æqualis erit semicircumferentiæ Circuli, futura non sit differentia $\frac{1}{1400}$ suæ longitudinis; at quando non est nisi tertiæ partis circumfeferentiæ, differentia non erit $\frac{1}{13000}$; & si non sit nisi quartæ partis, non differet nisi $\frac{1}{90000}$, suæ longitudinis.

F I N I S.

CHRIS-

CHRISTIANI HUGENII
GEOMETRICA
VARIA.

I.

CONSTRUCTIO LOCI AD HYPERBOLAM PER ASYMPTOTOS.

In æquatione loci ad hyperbolam, si neutra indeterminatarum linearum in seipsam ducta inveniatur, velut si sit $xy = bb$; vel $xy = cx.bb$; (literis x & y lineas indeterminatas AB, BC significantibus, quæ in dato angulo sibi mutuò sint applicatæ, quarumque altera, ut AB, positione data intelligitur, & in ea datum punctum A) constructio per asymptotorum inventionem facilè absolvitur, ut ostensum est à *Fl. de Beaune* in Notis ad Geometriam Cartesii. Cum verò habetur xx vel yy in æquatione, vel utrumque nihilominus ad asymptotos rem deduci posse, & quidem brevius quàm ad diametri laterumque recti & transversi inventionem, ostendemus hoc modo.

TAB. XLIV. fig. 4. 5. 6. 7.

Sit æquatio ejusmodi reducta, $y = l. \frac{nx}{z} \sqrt{mm. ox + \frac{ppxx}{gg}}$; semper enim ad hos terminos reduci potest, nempe ut y altera linearum indeterminatarum, quæ applicata est ad positionem datam, sola ab una parte æquationis habeatur, ab altera verò non plures termini quàm hîc inveniantur; nam sæpe pauciores etiam esse possunt, cum soli necessarii sint $+ \frac{ppxx}{gg}$ cum alterutro horum mm vel ox.

Quum angulus ABC datus sit, ducatur per A punctum linea XY quæ sit rectæ BC parallela, & in ea accipiatur AI æqualis l, idque ad partes BC, si habeatur $+ l$ in æquatione, in contrarias verò si habeatur $- l$, & agatur IK pa-

rallela A B. Si verò non habeatur omnino l, recta I K in A B incidere intelligenda eſt.

Deinde ſicut z ad n, quæ ratio data, ita ſit I K ad libitum ſumpta, ad K L; quæ ipſi A I parallela ducenda eſt, ſumendaque hoc pacto, ut puncta K L ſita ſint quo ordine A I, ſi habeatur $+ \frac{nx}{z}$, at contrà ſi habeatur $- \frac{nx}{z}$, & ducatur recta per I L; ſi verò deſit $\frac{nx}{z}$, eadem eſt I L & I K.

Porro ut p ad g, ita ſit $\frac{1}{2}o$ ad ſingulas I X, I Y ſumendas in recta A I; atque ita quoque I X ad I V ſumendam in I K ad partes A B ſi habeatur $- ox$, aut in contrarias ſi habeatur $+ ox$; & ſit V M parallela A I, occurratque rectæ I L in M: erit jam M centrum hyperbolæ quæſitæ; aſymptoti vero, rectæ per M X, M Y ductæ.

Si vero non habeatur ox in æquatione, erit I centrum hyperbolæ; ſumptisque I X, I Y ad libitum ſed inter ſe æqualibus, inventiſque inde punctis V & M, ut ante, ducentur aſymptoti per I parallelæ ipſis M X, M Y.

Jam porro ſi habeatur $+ mm$, puncta S & R, per quæ hyperbola vel oppoſitæ ſectiones tranſire debent, invenientur ſumendo in recta A I à puncto I, ſingulas I S, I R æquales m: unde jam hyperbola data erit ac deſcribi poterit, in qua B C erit ordinatim applicata ad diametrum, ſi $\frac{\frac{1}{2}og}{z}$ major quam m; ſin verò $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$ minor quam m, erit B C parallela diametro hyperbolæ ad quam eſt C punctum, ut hic caſu ſecundo. Quod ſi forte punctum S incidat in X, locus puncti C, erunt ipſæ aſymptoti. Si verò non habeatur mm, erit ipſum I punctum in hyperbola quæſita.

At ſi habeatur $- mm$, accommodanda eſt intra angulum X M I recta G N parallela I X, quæque poſſit quadrata ab I X & I S, vel tantum ipſi I S æqualis, ſi non habeatur

ox;

ox; eritque punctum N in hyperbola quæſita, quæ proinde rurſus data erit.

Sumpta enim in caſu primo $AB = x$ ad arbitrium, eique applicata $BC = y$ in angulo dato, quæ ad hyperbolam inventam terminetur, oſtendendum ſit quod fig. 4.

$$y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}.$$

DEMONSTRATIO.

OCcurrat B C utrinque ſi opus ſit producta, aſymptotis in O & Q. Ex conſtructione eſt I X vel I Y $= \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, I V $= \frac{\frac{1}{2}ogg}{pp}$, Ratio verò data I K ad K L, eadem nempe quæ z ad n. Sed & angulus I K L datus eſt. Ergo & ratio I K ad I L, quæ ſit ea quæ z ad a. Ergo quia ut I K ad I L ita I V ad I M, erit I M $= \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$. Ut autem I M ad I X, hoc eſt ut $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$ ad $\frac{\frac{1}{2}go}{p}$, ſive ut ag ad pz, ita M L, ſive M I minus I L, hoc eſt, $\frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp} - \frac{ax}{z}$ ad L O vel L Q; quæ itaque erit $\frac{\frac{1}{2}og}{p} - \frac{px}{g}$. Porro quia B K $= l$, & L K $= \frac{nx}{z}$, erit B L $= l - \frac{nx}{z}$, quâ ablatâ à B C $= y$, fit L C $= y - l + \frac{nx}{z}$. Propter hyperbolam verò erit rectangulum Q C O æquale rectangulo Y S X. Sed rectangulum Q C O æquale eſt quadrato L O minus quadrato L C, hoc eſt quadrato ab $\frac{\frac{1}{2}go}{p} - \frac{px}{g}$ minus quadrato ab $y - l + \frac{nx}{z}$: quorum quadra-

torum differentia est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - ox + \frac{ppxx}{gg} - yy + 2ly - ll + \frac{2nxy}{z} + \frac{2lnx}{z} - \frac{nnxx}{zz}$. Ergo hæc æquatur rectangulo YSX, hoc est quadrato IX minus quadrato IS, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} - mm$; quia IX $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$ & IS $= m$. In qua æquatione deleto utrinque $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenietur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - ox + \frac{ppxx}{gg}}$, ut oportebat.

fig. In Secundo casu rectangulum QCO æquatur quadrato LC minus quadrato LO; & rectangulum YSX quadrato IS minus quadrato IX. Unde rursus valor Y idem qui casu primo invenietur.

fig. 6. Sit tertius casus quo habeatur $-mm$, sitque æquatio $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{-mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$, producta GN occurrat alteri asymptoto in D. Hîc jam eadem ratione qua prius, apparebit LO vel LQ esse $\frac{\frac{1}{2}go}{p} + \frac{px}{g}$, & LC $= y + \frac{nx}{z} - l$. Et propter hyperbolam erit rectangulum QCO $=$ rectangulo DNG seu quadrato NG, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$, quia XI $= \frac{\frac{1}{2}go}{p}$, & IS $= m$, quorum quadratis æquale fecimus quadratum GN. Rectangulum autem QCO æquatur quadrato LO minus quadrato LC, hoc est $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + ox + \frac{ppxx}{gg} - yy - \frac{2nxy}{z} - \frac{nnxx}{zz} + 2ly + \frac{2nlx}{z} - ll$. Ergo hoc æquale $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp} + mm$. In qua æquatione deleto rursus utrin-

que

que $\frac{\frac{1}{4}ggoo}{pp}$, invenitur $y = l - \frac{nx}{z} + \sqrt{- mm + ox + \frac{ppxx}{gg}}$. Eademque est demonstrandi ratio in casu quarto, & aliis quibusvis, habita ratione signorum + & −. Fig. 7.

Cum non habetur $\frac{nx}{z}$ in æquatione, puncta M & V unum sunt, tunc vero si $p = g$, hoc est si habeatur $+ xx$ pro $\frac{ppxx}{gg}$, erunt semper asymptoti sibi mutuò ad angulos rectos, quia ut p ad g, ita fecimus $\frac{1}{2}o$ ad IX & ad IY, & ita IX ad IV; fiunt enim jam æquales IX, IY, IV, & singulæ $= \frac{1}{2}o$, unde punctum V est in semicirculo super XY & proinde angulus XVY rectus. Item quia $IM = \frac{\frac{1}{2}aogg}{zpp}$, patet quod si $ag = zp$, hoc est si g ad p ut z ad a, tunc erit $IM = \frac{\frac{1}{2}og}{p}$, ac proinde æqualis ipsi IX & IY quæ etiam erant $\frac{\frac{1}{2}og}{p}$. Adeoque hoc casu erunt asymptoti sibi mutuo ad angulos rectos; cum rursus punctum M sit futurum in circumferentia circuli descripti super XY centro I.

DE-

II.

DEMONSTRATIO REGULÆ DE MAXIMIS ET MINIMIS.

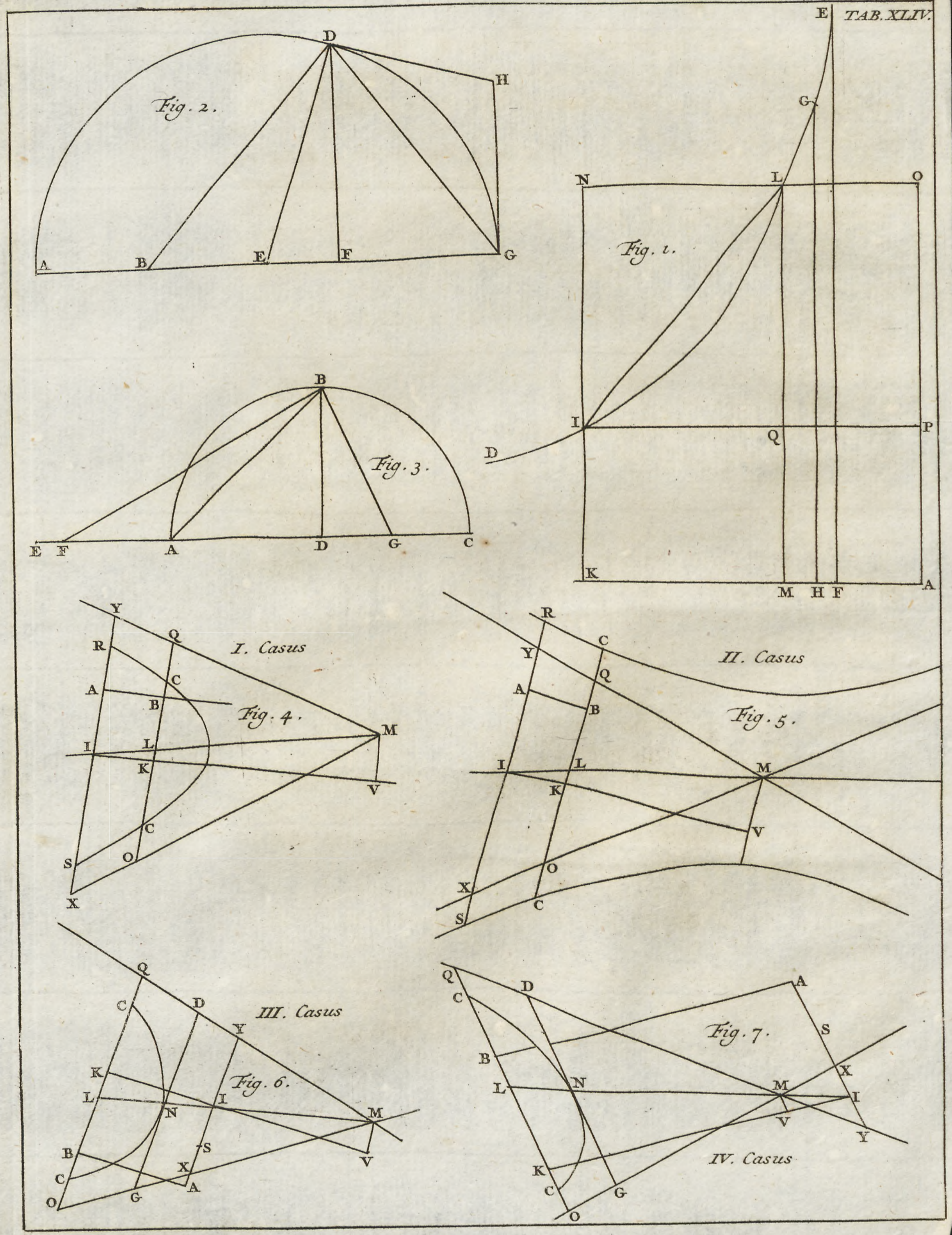
Ad investiganda Maxima & Minima in Geometricis quæstionibus, regulam certam primus, quod sciam, Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipso non traditam cum exquirerem, inveni simul quo pacto ea ipsa regula ad mirabilem brevitatem perduci posset, utque inde eadem illa existeret quam postea vir amplissimus Joh. Huddenius dederat, tanquam partem regulæ suæ generalioris atque elegantissimæ, quæ ab alio prorsus principio pendet. Hæc à Fr. Schotenio edita est unà cum Cartesianis de Geometria libris. Fermatianæ autem regulæ examen quod institui est hujusmodi.

TAB. XLV. fig. 1.

Quoties Maximum aut Minimum in problemate aliquo determinandum proponitur, certum est utrinque æqualitatis casum existere: ut si data sit positione recta E D & puncta A, B, oporteatque invenire in E D punctum C, unde ductis C A, C B, quadrata earum simul sumpta, sint minima quæ esse possint; necesse est ab utraque parte puncti C, esse puncta G & F, à quibus ducendo rectas G A, G B; F A, F B oriatur summa quadratorum G A, G B æqualis summæ quadratorum F A, F B, & utraque summa major quadratis C A, C B simul sumptis.

Ut igitur inveniam punctum C, unde ductis C A, C B fiat summa quadratorum ab ipsis omnium minima; ductis A E, B D perpendicularibus in E D, quarum A E dicatur a; B D, b; intervallum verò E, D, c: fingo primùm G F, differentiam dua-

TAB. XLIV.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
I. Casus
Fig. 5.
II. Casus
Fig. 6.
III. Casus
Fig. 7.
IV. Casus

duarum E G, E F æqualem datæ lineæ quæ vocetur e; & quæro quanta futura sit E G, quam appello x, ut quadrata G A, G B simul sumpta æquentur quadratis F A, F B.

Itaque quia A E $= a$, & E G $= x$, erit quadratum A G $= aa + xx$. Et quia G D $= c - x$, & D B $= b$, erit quadratum G B $= bb + cc - 2cx + xx$, unde quadrata A G, G B simul sumpta fient $= aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, qui dicantur termini priores; idque similiter in quovis alio problemate intelligendum, ubi maximum aut minimum inquiritur. Rursus autem quia E F $= x + e$, si ubique in summa quadratorum inventa substituam $x + e$ pro x, & quadratum ab $x + e$ pro xx, adque ita deinceps si altior potestas ipsius x reperiatur, certum est exorituram summam quadratorum F A, F B; quæ quidem erit $aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$, æquanda summæ quadratorum A G, G B; dicantur autem hi termini posteriores.

Itaque erit $aa + bb + cc - 2cx + 2xx = aa + bb + cc - 2cx - 2ce + 2xx + 4ex + 2ee$. Ex qua æquatione prodibit valor E G sive x, quando G F sive e certæ magnitudinis lineam refert.

Ponendo autem e infinitè parvam, apparebit ex eadem æquatione quanta futura sit E G, cum ipsi E F æqualis est, adeoque habebitur determinatio quæsita puncti C, unde ductæ C A, C B faciant summam quadratorum minimam; nempe sublatis primùm, si quæ sunt, fractionibus, (quæ in hoc exemplo nullæ sunt) delentur termini qui utrinque iidem habentur, quales sunt necessariò omnes quibus litera e admixta non est; idque facile est intelligere, cum dixerimus posteriores terminos ex prioribus describi, ponendo $x + e$ vel potestatem ejus, quoties invenitur x vel potestas ejus aliqua in prioribus. Deinde omnes termini per e dividuntur, quibusque post eam divisionem adhuc unum e aut plura inesse inveniuntur, ii delentur, quippe cum quantitates infinitè parvas contineant respectu cæterorum terminorum quibus nullum amplius inest e. Ex quibus denique solis invenitur quantitas x quæsita in casu determina-

tionis proposito; & hæc est ratio methodi Fermatianæ, quâ in compendium redactâ hanc aliam inveni, cujus partes duæ sunt. Nam primò,

„Quando termini, quos maximum aut minimum designa-
„re volumus, nullam fractionem habent, in cujus deno-
„minatore quantitas incognita quæsita continetur; multi-
„plicandus est terminus quisque per numerum dimensionum,
„quem in illo habet quantitas incognita, omissis terminis iis
„in quibus incognita quantitas non reperitur; omniaque illa
„producta æquanda nihilo.

Ita in exemplo proposito, ubi termini priores inventi sunt $aa + bb + cc - 2cx + 2xx$, summam duorum quadratorum continentes, quam volo esse minimam; tantummodo hujusmodi instituenda erit multiplicatio,

$$\begin{array}{r} aa + bb + cc - 2cx + 2xx \\ 1 \quad\quad 2 \\ \hline \end{array}$$

Ex qua orientur termini æquandi nihilo $-2cx + 4xx = 0$;

Unde fit $\frac{1}{2}c = x$.

Ita quoque si priores termini sint $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba^2}{2c}x + ab^2$,

multiplicatio erit hujusmodi $\quad 3 \quad 3 \quad 1$

Unde termini æquandi nihilo $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba^2}{3c}x = 0$

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba^2}{3c} = 0.$$

Hujus compendii ratio ut intelligatur, sciendum primò, quoniam termini posteriores ex prioribus describuntur, ponendo tantum ubique $x + e$ pro x, necessariò omnes terminos priores etiam in posterioribus reperiri; ideoque illos nihil

nihil opus esse describi, cum utrobique mox delendi forent, atque adeo illos tantum scribendos in quibus unum e vel plura insunt, ut in exemplo nostro $- 2ce \dagger 4ex \dagger 2ee$; eosque æquandos nihilo. Sed etiam illos quibus plura quam unum e inerunt, scribi frustra apparet, cum divisione facta per e delendos postea constet, ut paulò ante diximus. Itaque nulli præterea ab initio describendi inter terminos posteriores quam quibus inerit e simplex.

Hi autem termini ex terminis prioribus facilè deducuntur, cum constet nihil aliud esse quam secundos terminos potestatum ab $x \dagger e$, quia cæteri omnes plura quam unum e vel nullum habent. Adeo ut ubicunque in prioribus terminis habetur x, scribendum sit in posterioribus e; & ubi habetur xx in prioribus, ponendum $2ex$ in posterioribus; & ubi x^3 in prioribus, in posterioribus $3exx$, atque ita deinceps. Dicti autem termini secundi cujusque potestatis $x \dagger e$ ex ipsa potestate x facilè describuntur mutando unum x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius x, ita enim ab xx fit $2ex$, & ab x^3, $3exx$; atque in cæteris pari modo. Itaque ex terminis prioribus in quibus x, quos solos considerandos esse patuit, facilè etiam termini posteriores, ii quos nihilo adæquandos diximus, describuntur; multiplicando tantum singulos in numerum dimensionum quas in ipsis habet x. Nam mutare unum x in e ne quidem opus est, cum eodem redeat, sive omnes postea per e sive per x dividantur; & ex his quidem aperta est ratio compendii ad primam partem regulæ pertinentis: nunc ad alteram veniamus quæ est hujusmodi.

„Si termini quos maximum aut minimum designare volu-„mus fractiones habeant in quarum denominatore occurrat „quantitas incognita, delendæ primùm sunt quantitates co-„gnitæ si quæ adsint; deinde si reliquæ quantitates non ha-„beant eundem denominatorem, eò reducendæ sunt. Tunc „termini singuli numeratorem fractionis constituentes, du-„cendi in terminos singulos denominatoris, productaque „singula multipla sumenda secundum numerum quo dimen-

„ſiones quantitatis incognitæ in termino numeratoris diffe-
„runt à dimenſionibus ejuſdem incognitæ quantitatis in ter-
„mino denominatoris. Signa autem affectionis productis
„ſingulis præponenda qualia lex multiplicationis exigit, quo-
„ties dimenſiones quantitatis incognitæ plures ſunt in termi-
„no numeratoris quam in termino denominatoris: at quo-
„ties contra evenit, contraria quoque ſigna productis præ-
„ponenda; quæ denique omnia æquanda nihilo.

Sint, exempli gratiâ, inventi termini priores, quos maximum deſignare velimus, iſti $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$, ubi nulla eſt quantitas cognita. Hîc ergo, ſecundum regulam, multiplico terminos omnes numeratoris primum per bcc, priorisque producti ex bx^3 in bcc, ſcribo triplum, quia bx^3 habet tres dimenſiones quantitatis incognitæ x, bcc verò nullam. Secundi producti ex $- ccxx$ in bcc ſcribo duplum, propterea quod in $- ccxx$ duæ ſunt dimenſiones x, & in bcc nulla. Tertium verò productum ex $- 2bccx$ in bcc ſcribo ſimplex, quia in $- 2bccx$ & bcc differentia dimenſionum x eſt unitas. Tribus autem hiſce productis vera ſigna affectionis adſcribo, quoniam dimenſiones x in terminis numeratoris excedunt eas quæ in termino bcc, quippe quæ nullæ ſunt, ita ut tria hæc producta ſint

$$3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x;$$

Jam porrò terminos omnes eoſdem numeratoris duco in x^3, terminum alterum denominatoris, primumque productum ex bx^3 in x^3 ſcribere omitto, ſive per o multiplico, quoniam eædem dimenſiones utrobique ſunt ipſius x, ideoque differentia nulla. Secundum autem productum ex $- ccxx$ in x^3 ſcribo ſimplex, quia in his terminis differentia dimenſionum x eſt unitas. At tertium productum ex $- 2bccx$ in x^3 ſcribo duplum, quia differentia dimenſionum x in his eſt 2. Signa verò affectionis productis hiſce duobus adſcribo contraria iis quæ requireret lex multiplicationis, eo quod dimen-

men-

mensiones x pauciores sunt utrobique in terminis numeratoris quam in x^3, termino denominatoris.

Itaque producta bina erunt hæc $+ ccx^5 + 4bccx^4$; quæ addita tribus præcedentibus

$$+ 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbcx^4,$$

faciunt summam æquandam nihilo

$$ccx^5 + 4bccx^4 + 3bbccx^3 - 2bc^4xx - 2bbc^4x = 0;$$

qua æquatione divisa per $ccbx + ccxx$, fit $x^3 + 3bxx - 2bcc = 0$.

Quomodo autem ad hæc perventum sit uno exemplo rursus explicabimus, ex quo eandem in omnibus cæteris rationem esse intelligetur. Videamus igitur priores terminos quos modò proposueram, nempe $\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3}$; ex quibus si alios quibuscum eos comparem, ut initio factum est, describere velim, ponendo ubique $x + e$ ubi est x; video quidem primò omnes illos in posterioribus terminis posse negligi in quibus plura quam unum e inerit, quia semper ex iis quantitates orientur in quibus plura uno e inerunt, quæque proinde delendæ tandem erunt, ob causam in superioribus traditam.

Itaque erunt termini priores æquandi posterioribus

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{\begin{matrix} bx^3 - ccxx - 2bccx, \\ + 3bexx - 2ccex - 2bcce, \end{matrix}}{bcc + x^3 + 3exx}$$

qui nempe ex prioribus hac lege descripti sunt, ut ubicunque est x vel potestas ejus in prioribus, ibi ponatur $x + e$ vel potestatis $x + e$ duo priores termini; quoniam scimus in cæteris plura quam unum e contineri.

Jam verò porrò, quia termini in quibus nullum e in numeratore ac denominatore priorum ac posteriorum terminorum, iidem planè reperiuntur, patet multiplicationes alternas eorum terminorum denominatoris in terminos nu-

meratoris partis alterius e carentes, omitti posse, cum quantitates inde ortæ eædem utrinque essent futuræ ideoque delendæ. Quare in terminis posterioribus ii tantum ab initio scribendi erant in quibus unum e, omissis omnibus reliquis, ut æquatio hîc futura sit ista

$$\frac{bx^3 - ccxx - 2bccx}{bcc + x^3} = \frac{3bexx - 2ccex - 2bcce}{3exx}.$$

Hîc jam multiplicationes alternæ per denominatores instituendæ essent ad tollendas fractiones. Verum examinando diligentius quænam futura sint harum multiplicationum producta, aliud adhuc compendium inveniemus, & nec scribendos quidem omnino esse terminos posteriores: quia enim describuntur ex prioribus mutato x in e, præpositoque numero dimensionum ipsius x, non difficile est colligere ex solis terminis prioribus quænam futura sint ista omnia producta.

Ita quoniam propter $- ccxx$ in prioribus, habetur $- 2ccex$ in posterioribus; & propter x^3 in denominatore priorum, in posteriorum denominatore est $3exx$; facile perspicitur utraque producta ex $- ccxx$ in $3exx$ & ex $- 2ccex$ in x^3, quæ sunt $- 3ccex^4$ & $- 2ccex^4$, easdem literas habitura, sed diversos numeros præpositos 3 & 2, idque inde fieri quòd in termino $ccxx$ unam dimensionem minus habeat x quam in termino x^3. Itaque & auferendo postea ex utraque parte æquationis, $- 2ccex^4$, apparet superfuturum $- ccex^4$ à parte terminorum priorum. Quare ab initio hoc sciri potest, multiplicando tantum in terminis prioribus $- ccxx$ numeratoris in x^3 denominatoris, unumque x in e mutando, ac productum simplex scribendo; quia differentia dimensionum x in istis duobus terminis est unitas.

Eadem ratione producta ex $- 2bccx$ in $3exx$, & ex $- 2bcce$ in x^3, quæ easdem literas habent, sunt enim $- 6bccex^3$ & $- 2bccex^3$, habebunt numeros præpositos diver-

versos, propterea quod in $-2bccx$ una tantum est dimensio x; at in x^3 tres, unde ablato ex utraque parte æquationis $-2bccex^3$, scio superfuturum à parte terminorum priorum $-4bccex^3$: quod rursus ab initio cognosci potuit, quia eadem quantitas oritur, multiplicando $-2bccx$ numeratoris terminorum priorum, in x^3 denominatoris, mutandoque unum x in e, & productum multiplicando per 2, quæ est differentia dimensionum x in terminis $-2bccx$ & x^3.

At quoniam in bx^3 & in x^3 eadem est dimensio x, sequetur producta ex bx^3 in $3exx$, & ex $3bexx$ in x^3, tum literas easdem, tum eosdem numeros præpositos habitura, ideoque sese mutuo sublatura, ut proinde multiplicatio illa omitti possit.

Atque hujusmodi animadversionibus inventum est quod in regula præcipitur, terminos singulos numeratoris in singulos denominatoris terminos esse ducendos, productaque quælibet multipla sumenda secundum differentiam dimensionum quantitatis incognitæ in terminis binis qui in se mutuò ducuntur. Nam quod non præcipitur unum x in e mutandum, id hanc rationem habet, quod non referat utrum postea per e an per x omnes termini dividantur.

Quod vero si signa affectionis vera productis singulis præponenda dicuntur, quoties dimensiones x plures sunt in numeratore quam in denominatore, id quoque ex jam dictis intelligetur; uti consequenter etiam hoc quod contraria signa sunt adponenda, quoties dimensionum numerus contra se habet. Velut hîc, productum ex bx^3 in bcc scribendum est cum signo $-$ præposito numero 3, ut fiat $-3bbccx^3$, quia nempe propter bx^3 scimus in posterioribus terminis fore $3bexx$; quod ductum in bcc faciet $+3bbccexx$, sed translatum in partem priorem æquationis, fiet $-3bbccexx$; sive, non mutato x in e, $-3bbccx^3$.

Quod denique in regula habetur, quoties in prioribus terminis priusquam ad eundem denominatorem reducantur, quantitates cognitæ occurrunt, eas primum omnium delendas,

id

id ex hoc ſequenti exemplo intelligetur rectè præcipi. Sint enim reperti termini priores, quos maximum aut minimum deſignare oporteat, iſti $\frac{x^3}{2a - x} - 2vx + xx + vv$; ubi vv quantitatem cognitam ſignificet: id igitur delendum eſſe ut appareat, videamus quid futurum ſit ſi non deleatur. Nempe ut ad eundem denominatorem cum cæteris omnibus reducatur, ducendum erit vv in $2a - x$, fietque inde $\frac{2avv - xvv}{2a - x}$ in terminis prioribus. Propter quos in terminis poſterioribus, ſecundum ſuperius, explicata ſcribetur $\frac{-evv}{-e}$, adeoque multiplicatione alternatim utrinque per denominatores inſtituta, ducendum erit hinc $2a - x$ in $- evv$; inde $- e$ in $2avv - xvv$. Ex quibus multiplicationibus eoſdem utrinque terminos oriri neceſſe eſt, cum utrobique eadem hæc tria in ſe mutuo ducantur $2a - x$ in $- e$ in vv, qui proinde termini ſe ſe mutuo ſublaturi eſſent, eoque fruſtra ſcriberentur; ac proinde liquet tuto deleri poſſe ab initio quantitatem vv, idemque quod in hoc exemplo accidit, neceſſario quoque in quibuslibet aliis contingere, diligenter intuenti manifeſtum erit.

III.

REGULA

Ad inveniendas Tangentes linearum curvarum.

IDem *Fermatius* linearum curvarum Tangentes regula ſibi peculiari inquirebat, quam *Carteſius* ſuſpicabatur non ſatis ipſum intelligere quo fundamento niteretur, ut ex epiſtolis ejus hac de re ſcriptis apparet. Sanè in *Fermatii* operibus poſt mortem editis, nec bene expoſitus eſt regulæ uſus, nec demonſtrationem ullam adjectam habet. *Carteſium* vero in his quas dixi literis, rationem ejus aliquatenus aſſecutum invenio, nec tamen tam perſpicuè eam explicuiſſe quam

per

per hæc quæ nunc tradenus fiet, quæ jam olim, multò ante istas literas vulgatas conscripsimus.

Præcipuum verò operæ pretium tunc fuit compendiosa hujusce regulæ contractio, quam, quoad potui, prosecutus, tandem in ipsas illas insignes Huddenii, Slusiique regulas desinere inveni, quas mihi Viri hi Clarissimi uterque ferè eodem tempore exhibuerant: an vero hac eadem viâ an aliâ in illas inciderint nondum mihi compertum.

Sit data linea curva ut B C, quæ cognitam relationem habeat ad rectam aliquam positione datam A F; ac proinde applicatâ è puncto quolibet curvæ, ut B, rectâ B F, in dato angulo B F A, datoque in recta A F puncto A, certa æquatione relatio quæ est inter A F & F B expressa habeatur. Exempli gratiâ, appellando A F, x; F B, y, sit æquatio $x^3 = xya - y^3$, ubi a lineam quandam datam significare censenda est.

TAB. XLV. fig. 2.

Quod si jam ad punctum B tangens ducenda sit BE, quæ occurrat rectæ A F in E, voceturque FE, z, ejus longitudo per hanc regulam Fermatianæ regulæ compendiariam, invenietur, ex sola æquatione data.

Translatis terminis omnibus æquationis datæ ad unam æquationis partem, qui proinde æquales fiunt nihilo, multiplicentur primò termini singuli, in quibus reperitur y, per numerum dimensionum quas in ipsis habet y, atque ea erit quantitas dividenda. Deinde similiter termini singuli in quibus x, multiplicentur per numerum dimensionum quas in ipsis habet x, & è singulis unum x tollatur; atque hæc quantitas pro divisore erit subscribenda quantitati dividendæ jam inventæ. Quo facto habebitur quantitas æqualis z sive F E. Signa autem + & — eadem ubique retinenda sunt; atque etiam si forte quantitas divisoris, vel dividenda, vel utraque minor nihilo sive negata sit, tamen tanquam adfirmatæ sunt considerandæ: hoc tantum observando, ut cum altera adfirmata est, altera negata, tunc F E sumatur versus punctum A, cum verò utraque vel affirmata est vel negata, ut tunc sumatur F E in partem contrariam.

In curvâ propoſita cujus æquatio $x^3 + y^3 - axy = 0$, fiet ſecundum hanc regulam dividenda quantitas $3y^3 - axy$, diviſor verò $3xx - ay$; ideoque $z = \frac{3y^3 - axy}{3xx - ay}$, quæ eſt longitudo cognita, cum dentur x, y & a.

TAB. XLV. fig. 3. Eſto item alia curva A B H, cujus æquatio $axx - x^3 - qqy = 0$, poſito ſcilicet a & q eſſe lineas datas, A F vero $= x$, F B $= y$. Sit B E tangens, & F E dicatur ut ante, z. Hîc fiet ſecundum regulam, dividenda quantitas $- qqy$; diviſor autem $2ax - 3xx$; unde $z = \frac{- qqy}{2ax - 3xx}$ Ubi cum dividenda quantitas ſit negata, ſi fuerit etiam diviſor minor nihilo, hoc eſt ſi $2a$ minor quam $3x$, erit z ſive fe ſumenda in partem ab A averſam. Si vero $2a$ major quam $3x$, ſumenda erit F E verſus A, ex præcepto regulæ.

TAB. XLV. fig. 4. Horum vero rationem, ipſiuſque regulæ & compendii quò reducta eſt, originem ut explicemus, proponatur ut ante curva B C, ad cujus punctum B tangens ducenda ſit.

Intelligatur primum recta E B D, quæ non tangat curvam ſed eam ſecet in B, atque item in alio puncto D, ipſi B proximo; rectæ autem A G occurrat in E; & ab utriſque punctis B, D ducantur ad rectam A G, iiſdem angulis inclinatæ B F, D G; & ſit A F $= x$, F B $= y$, ſicut antea; ponaturque etiam F G data eſſe, quæ ſit e, quæraturque F E $= z$.

Eſt itaque ſicut E F ad F B, hoc eſt, ſicut z ad y, ita E G, hoc eſt, $z + e$ ad G D; quæ erit $y + \frac{ey}{z}$; & hoc quidem in qualibet curva ita ſe habere manifeſtum eſt.

Nunc porrò conſideretur æquatio naturam curvæ continens, ex. gr. illa ſuperius propoſita $x^3 + y^3 - xya = 0$, ubi a rectam longitudine datam, velut A H ſignificabat; & patet, cum punctum D in curva ponatur, debere eodem modo duas A G, G D, hoc eſt $x + e$ & $y + \frac{ey}{z}$ ad ſe mutuo referri

atque

atque AF, FB, hoc eſt x & y. Nempe ſi in æquatione propoſita pro x ſubſtituatur ubique $x + e$, & pro y, ubique $y + \frac{ey}{z}$, debebit æquatio hinc formata terminos omnes habere æquales nihilo; hoc eſt

$$x^3 + [3exx] + 3eex + e^3, + y^3 + [\frac{3ey^3}{z}] + \frac{3eey^3}{zz} + \frac{e^3y^3}{z^3} = o.$$
$$- axy - [aey] - [\frac{aeyx}{z}] - \frac{aeey}{z}$$

In hac autem æquatione conſtat neceſſario terminos prioris æquationis, ex qua formata eſt, contineri debere, nempe $x^3 + y^3 - axy$: qui cum ſint æquales nihilo ex proprietate curvæ, idcirco his in æquatione deletis, neceſſe eſt etiam reliquos nihilo æquari, in quibus ſingulis manifeſtum quoque eſt vel unum e vel plura reperiri, ideoque omnes per e dividi poſſe. Qui autem poſt hanc diviſionem non amplius habebunt e, eos, neglectis reliquis, ſcio nihilo æquari debere, quantitatemque lineæ z ſive FE oſtenſuros; ſi nempe BE jam tanquam tangens conſideretur, ideoque FG, ſeu e, infinitè parva. Nam termini in quibus adhuc e ſupereſt, etiam quantitates infinite parvas ſive omnino evaneſcentes continebunt. Et his quidem hactenus Fermatianæ regulæ origo ac ratio declaratur: nunc porro oſtendemus quomodo eadem ad tantam brevitatem perducta ſit. Video itaque ex æquatione totâ noviſſimâ, tantum eos terminos ſcribi neceſſe eſſe quibus ineſt e ſimplex, velut hic $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = o$. Qui termini quomodo facili negotio ex datis æquationis terminis $x^3 + y^3 - axy = o$, deſcribi poſſint, deinceps explicandum. Et primò quidem apparet $3exx + \frac{3ey^3}{z}$ nihil aliud eſſe quam ſecundos terminos cuborum ab

$x + e$ & ab $y + \frac{e}{z}$ ideo ſcriptos quia in æquatione habentur cubi ab x & y. Nam reliqui omnes termini cuborum, ut & quarumvis aliarum poteſtatem ab $x + e$, & ab $y + \frac{ey}{z}$, vel plura quam unum e habent, vel nullum; ideoque, ut jam diximus, fruſtra ſcriberentur. Eâdem itaque ratione, ſi aliæ poteſtates ab x vel y eſſent in æquatione propoſitæ, ſcribendi forent in æquatione alterâ termini ſecundi tantùm ſimilium poteſtatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$. Notandumque ſecundos hoſce terminos, ex ipſis datis poteſtatibus ab x & y, certa ratione confici; nempe ex poteſtate quavis x, velut x^3, mutando unum x in e, & præponendo numerum dimenſionum ipſius x: ita hîc fit $3exx$. Ex poteſtate y verò ducendo eam in $\frac{e}{z}$ præponendoque ſimiliter numerum dimenſionum ipſius y: ita hîc ab y^3 fit $\frac{3y^3e}{z}$. Quorum quidem rationem ex poteſtatum formatione intelligere facillimum eſt.

Porrò propter xy in termino æquationis $- axy$, facile quoque apparet quid in æquatione ſecunda ſcribendum ſit. Cum enim ſubſtituendum ſit pro xy productum ab $x + e$ in $y + \frac{ey}{z}$, ſed ea tantum ſcribenda in quibus unum e, ideo de duobus $x + e$ tantùm e ducemus in y, & tantùm x in $\frac{ey}{z}$; adeoque fient $ey + \frac{exy}{z}$; quibus in a ductis, præpoſitoque ſigno $-$, quia habetur $- axy$, exiſtet $- aey - \frac{aexy}{z}$, ſicut ſuprà.

Sic

Sic quoque si in æquatione proposita haberetur xxy^3; sumerem propter xx duos priores terminos quadrati ab $x + e$, nempe $xx + 2ex$; & propter y^3 duos priores terminos cubi ab $y + \frac{ey}{z}$, nempe $y^3 + \frac{3ey^3}{z}$; quorum productum pro xxy^3 surrogandum. Sed etiam hîc de duobus $xx + 2ex$ tantùm xx ducendum in $\frac{3ey^3}{z}$, tantumque $2ex$ in y^3 (nam cætera vel plura quàm unum e vel nullum haberent) adeo ut fiat $\frac{3exxy^3}{z} + 2exy^3$.

Atque ex his animadvertere licet, semper utrumque horum terminorum describi posse ex dato termino, qui hic xxy^3, alterum quidem mutato uno x in e, & præponendo numerum dimensionum ipsius; ita enim fit $2exy^3$: alterum verò ducendo datum terminum in $\frac{e}{z}$, præponendoque similiter numerum dimensionum ipsius y; ita enim fit $\frac{3exxy^3}{z}$. Cumque hac eadem immutatione, paulo ante, etiam secundos terminos potestatum ab $x + e$ & ab $y + \frac{ey}{z}$ ex potestatibus x & y æquationis datæ describi ostensum sit, manifestum jam est à singulis terminis æquationis datæ, in quibus x vel potestas ejus, describi prædicta methodo in secunda æquatione totidem terminos in quibus non est z; à singulis verò in quibus y vel potestas ejus, describi totidem terminos, dicta etiam methodo, quarum fractionis denominator sit z; nec alibi hanc literam in secunda æquatione repertum iri.

Hoc igitur cognito, quo pacto ex æquatione quavis proposita, velut hîc $x^3 + y^3 - axy = o$, alia describenda sit, ut hîc $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z} = o$, animadverto porro, si termi-

ni divisi per z ad alteram partem æquationis transferantur, ductisque omnibus in z, divisio deinde fiat per terminos in quibus initio non erat z, existere tunc ipsam quantitatem z ab una æquationis parte; uti hîc fiet $z = -\frac{3ey^3 + aeyx}{3exx - aey}$.
Atque hinc intelligo ad consequendam quantitatem z, ponendos tantum eos terminos æquationis secundæ, qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus y, sublato tantum denominatore z, mutatisque signis + & −. Deinde dividendo istos terminos per eos qui descripti sunt ex terminis æquationis primæ in quibus x. Porro ex omnibus, tam divisis quàm dividentibus, patet rejici posse e, adeo ut in hoc exemplo fiat $z = -\frac{y^3 3 + ayx}{3xx - ay}$. Itaque rejicitur $-\frac{e}{z}$ ex terminis qui descripti sunt ab iis qui habent y. Sic autem descriptos eos superius diximus ut ducerentur in idem $-\frac{e}{z}$, præponereturque numerus dimensionum y. Itaque nihil requiri apparet ad terminos hosce (quatenus ad definiendam quantitatem z hic adhibentur) ex terminis æquationis primæ, in quibus y, describendos, quam ut præponamus tantum iis numerum dimensionum quas in ipsis habet y, signaque + & − invertamus. Sic nempe ab $y^3 - axy$, describetur $-3y^3 + axy$. A terminis verò qui descripti sunt à terminis æquationis primæ in quibus x, cum tantum e hîc rejiciendum patuerit, cumque hos ita prius descriptos dixerimus ut unum x mutaretur in e, præponereturque numerus dimensionum ipsius x; apparet eos, quatenus hic ad constituendum divisorum adhibentur, sic tantum describi opus esse ex terminis propositæ æquationis in quibus x, ut præponatur iis numerus dimensionum ipsius x, ac deinde unum x auferatur. Sic nempe ab $x^3 - axy$ describetur $3x^3 - axy$; & dempto ubique x uno, fiet $3xx - ay$. Atque ex his ratio regulæ ab initio positæ manifesta est. Nam quod signa + & − in terminis qui describuntur ab iis in quibus y, hîc immutanda diximus, in regulâ

verò nulla omnino immutanda, id eodem redire liquet cùm quantitatem negatam, sive minorem nihilo, tanquam affirmatam considerandam ibi dixerimus. Ut autem ratio observationis ibidem adjectæ, in utram partem linea F E accipienda sit, intelligatur, repetemus figuram in principio positam, ubi vidimus A G esse $x + e$, E G vero $z + e$; unde fiebat GD $+ y + \frac{ey}{z}$. Si autem tangens ab altera parte lineæ B F cadere intelligatur, velut be, atque hæc primùm curvam secare fingatur, ut ibi factum est in d, ducaturque dg parallela bf; fiet ponendo rursus $fg = e$, $fe = z$, ut A g quidem fiat $x + e$, sed eg erit $z - e$, unde $gd = y - \frac{ey}{z}$. Atque hinc porrò facile est perspicere æquationem secundam, quæ ex proposita æquatione, $x^3 + y^3 - axy = o$ describitur, hoc casu fore $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, termini ut nempe qui per z dividuntur, habeant signa contraria iis quæ habebant in æquatione descripta casu priori, quæ erat $3exx + \frac{3ey^3}{z} - aey - \frac{aeyx}{z}$. Ex hac verò priori sequitur, quando quantitas $3exx - aey$, sive quando $3xx - ay$ (quæ divisorem constituit secundum regulam) fuerit minor nihilo, sive negata, tunc quantitatem reliquam $\frac{3ey^3}{z} - \frac{aeyx}{z}$; sive etiam $3y^3 - ayx$ (quæ quantitatem dividendam secundùm regulam constituit) esse affirmatam, aut cum illa est affirmata, hanc esse negatam; quia omnes simul æquationis termini æquantur nihilo. At contra ex illa æquatione $3exx - \frac{3ey^3}{z} - aey + \frac{aeyx}{z} = o$, sequitur, quando quantitas $3exx - aey$, sive $3xx - ay$, fuerit negata, tunc reliquam $- \frac{3ey^3}{z} + \frac{aeyx}{z}$, sive

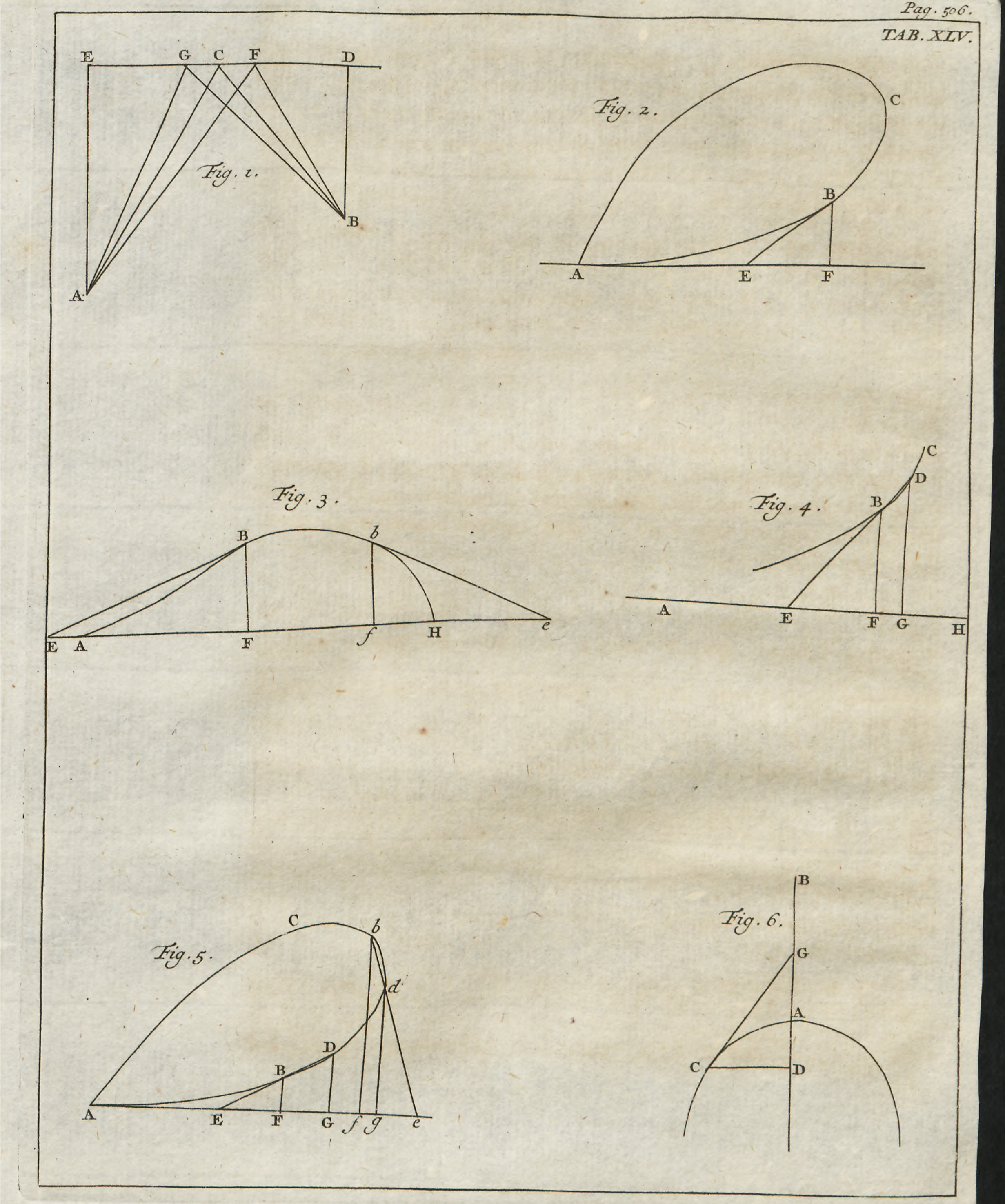
TAB. XLV. fig. 5.

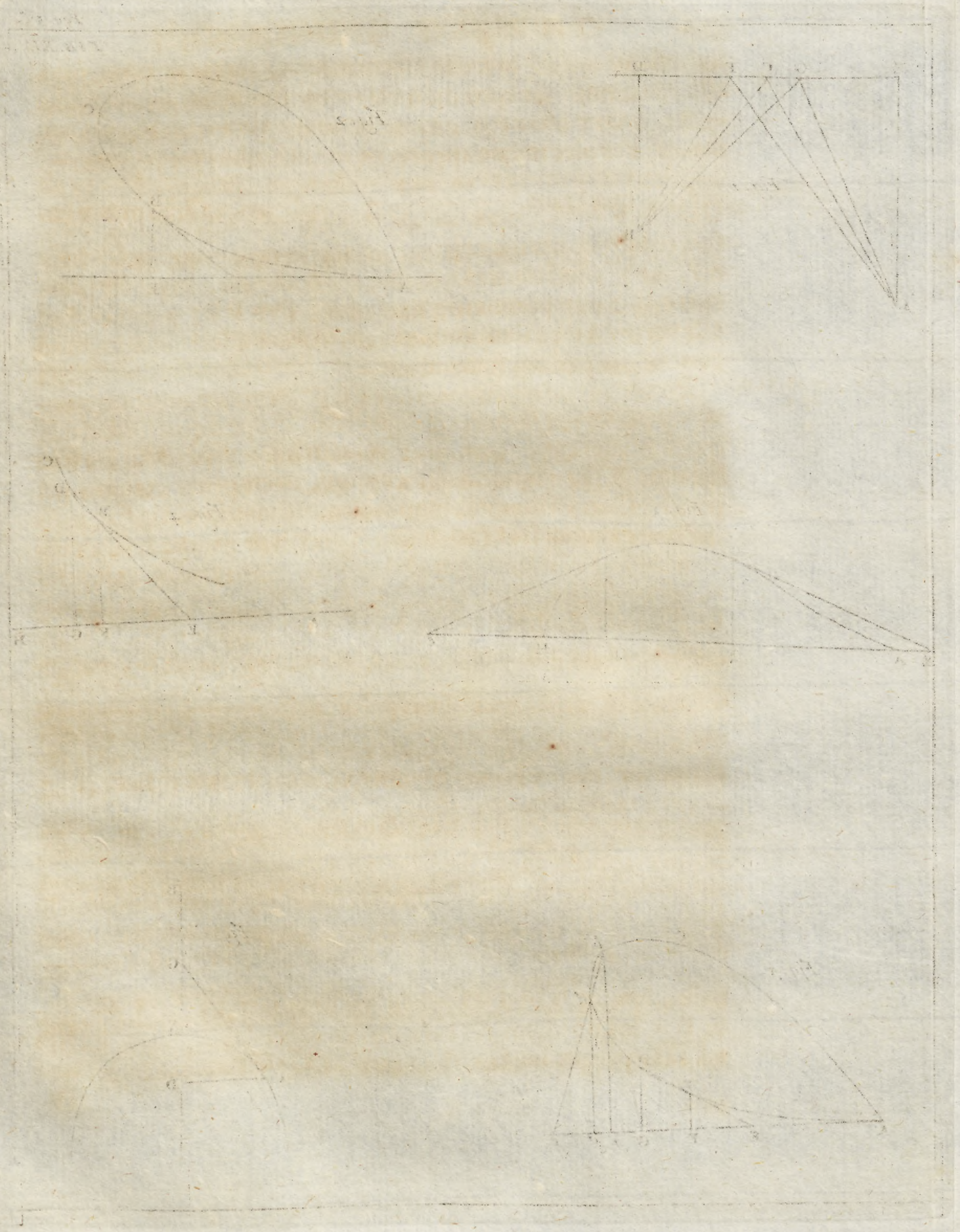
sive etiam $-3y^3 + ayx$ esse affirmatam, ac proinde $3y^3 - ayx$ esse negatam: aut quando $3xx - ay$ fuerit affirmata, tunc $-3y^3 + ayx$ esse negatam; ac proinde $3y^3 - ayx$ esse affirmatam. Per hæc itaque apparet ex quantitatibus per regulam inventis, quæ erant $\frac{3y^3 - ayx}{3xx - ay} = z$ judiciari posse ad utrum casum constructio tangentis pertineat; nempe excomperta dissimilitudine affectionis in divisore & dividendo, sequi ad priorem casum eam pertinere, hoc est z, sive FE, accipiendam esse versus A: ex similitudine verò eorum affectionis sequi ad contrariam partem sumendam.

TAB. XLV. fig. 6.

Potest autem quantitas z sive FE per regulam inventa, nonnunquam ad simpliciores terminos reduci ope æquationis datæ, quæ naturam curvæ continet: velut in hac curva AC, axem habente AD, verticem A, cujusque ea est proprietas ut, si à puncto C in eâ sumpta, applicetur ordinatim CD, fiat productum ex cubo BD (est autem B punctum in axe extra curvam datam) in quadratum DA æquale cubo quadrato DC. Sive ponendo BA $= a$, BD $= x$, DC $= y$, fiat æquatio curvæ naturam continens, ista $x^5 - 2ax^4 + aax^3 - y^5 = 0$. Hîc ponendo CG esse tangentem, quæ occurrat axi in G, vocandoque GD, z, fit secundum regulam $z = \frac{-5y^5}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$. Quia autem ex datâ æquatione est $y^5 = x^5 - 2ax^4 + aax^3$, restituendo pro $5y$ id quod ipsi æquale est, fiet $z = \frac{-5x^5 + 10ax^4 - 5aax^3}{5x^4 - 8ax^3 + 3aaxx}$; sive dividendo per xx, erit $z = \frac{-5x^3 + 10axx - 5aax}{5xx - 8ax + 3aa}$. Et rursus, dividendo hanc fractionem per $x - a$, habebitur $z = \frac{-5xx + 5ax}{5x - 3a}$. Quod significat faciendum ut sicut BD quinquies sumpta minus BA ter, sive ut BA bis unà cum AD quinquies ad AD quinquies, ita BD ad DG; atque ita GC tacturam in C curvam AC.

IV.


Pag. 506.
TAB. XLV.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.



IV.

CHRISTIANI HUGENII EPISTOLA

DE CURVIS QUIBUSDAM PECULIARIBUS.

MItto tibi constructionem Problematis, quod sine dubio Geometris placebit, si id cum ipsis communicare velis, cum pulcherrimum sit, & singularia quædam contineat: accepi hoc a Marchione de l'Hospital, quem ex specimine hoc & variis aliis, inter summos nostri ævi Geometras referendum puto. Hac etiam occasione ad te mitto quasdam ex posterioribus, super rebus fere similibus, contemplationibus nostris.

Problema March. est; Invenire lineam rectam æqualem datæ portioni lineæ logarithmicæ. Ut hujus inveniat solutionem, sagaciter utitur *Calculo differentiali* celeberrimi Leibnitii, & reducit problema ad quadraturam curvæ, cujus æquatio est, $a^6 = aaxxyy + y^4xx$; positis x & y indeterminatis, quæ angulum rectum efficiunt; Hanc quadraturam ostendit dependere à quadraturâ Hyperboles; quæ datur, ut notum est, positâ logarithmicâ descriptâ; constructio autem huc redit. Sit logarithmica indefinita A C D, asymptos L O, subtangens constans data a, & portio curvæ sit C D, cui æqualem rectam invenire oportet. TAB. XLVI. fig. 1.

Duc D L, C O perpendiculares ad asymptoton, CE perpendicularem ad D L, & fac L T in asymptoto æqualem subtangenti a, & ductis rectis T D, T E, fiat T V = T D & T I

 = TE:

$=$ TE: tunc junge VD, ductâque ipsi parallelâ IK, e puncto K, ubi occurrit ipsi DL, duc parallelam asymptoto KA, secantem DV in F, CO in X, & Logarithmicam in A. Tum rectæ AX & FK simul sumtæ erunt æquales curvæ CD.

Solutio hujus Problematis, prout ego invenio, potest etiam reduci ad quadraturam curvæ, cujus Æquatio est $a^4 = xxyy - aayy$, quæ, ut & altera, dependet à quadratura Hyperboles, uti possem satis facile demonstrare; sed constructio à modo descripta non differt.

Nescio, an multæ lineæ curvæ hanc habeant proprietatem ut ipsarum longitudines per ipsas curvas mensurari queant; interim ecce unam, quam haud ita pridem inveni, dignam, ut videbis, quæ & ob alia etiam notetur; Est curva AXKO extensa in infinitum secundum rectam DN, quæ est ejus asymptos, ad quam AD, tangens ad verticem A, insistit perpendicularis; curvæ princeps & simplicissima proprietas est, ut omnis tangens inter punctum contactus & asymptoton, ut KN, sit æqualis lineæ AD; curva pariter extenditur ad alteram partem hujus perpendicularis AD. Ut invenias rectam lineam æqualem portioni hujus curvæ datæ a vertice A, ut AK (sic enim invenies alias portiones quascunque) duc KP perpendicularem ad AD, & descripto arcu circuli PQ, qui habeat centrum D & radium DP, quære in AB parallelâ Asymptoto punctum B, quod sit centrum circumferentiæ circuli, quæ transit per A & tangit arcum PQ, quod facile est; porro ductâ rectâ BD, sume in illâ DY $=$ DA, & e puncto Y duc parallelam Asymptoto usque ad curvam in X, tunc YX erit æqualis curvæ AK; Et natura hujus lineæ talis est, ut si sumas tot proportionales quot volueris, in recta AD, incipiendo a D, ut DS, DI, DP & ducas applicatas SR, IO, PK: partes interceptæ curvæ, ut RO, OK, omnes sint æquales.

TAB. XLVI. fig. 2.

Ad quadraturam Hyperboles quoque inservit curva hæc; nam eadem recta YX facit cum AD rectangulum æquale spatio Hyperbolico ADEV, terminato lineis AD, EV perpendicu-

dicularibus ad FDE, unam ex Aſymptotis, & quæ ſunt inter ſe in ratione AD ad DP, ſi Hyperbola AV ſit æquilatera & quadratum ejus ad angulum Aſymptωτων ſit ADFH; unde reciproce patet, quomodo queant & inveniri puncta hujus curvæ poſitâ quadraturâ Hyperboles.

Habet illa adhuc alias notabiles affectiones, quales ſunt, quod ſpatium infinitum, inter curvam, Aſymptoton, & rectam AD, ſit æquale $\frac{1}{4}$ circuli cujus radius eſt AD: quod ſolidum infinitum, quod producit hoc ſpatium rotando circa Aſymptoton, ſit æquale $\frac{1}{4}$ ſphæræ ejuſdem radii; quod ſuperficies ejus ſolidi infiniti, ſine baſi, ſit æqualis circulo, cujus radius eſt diagonalis quadrati ex AD.

Non autem propter ea qua huc uſque propoſui de hac curva hic egi, ſed quia ſimplici Machinâ deſcribi poteſt, quo reducitur Hyperbola ad quadratum, quod mihi viſum eſt Geometrarum conſideratione dignum.

Conſtructio Machinæ nititur in dictâ Tangentis proprietate & principio vel lege motus; ſcilicet, ſi in plano horizontali detur punctum, quod ſuo pondere vel alio modo aliquantulum reſiſtit, junctum extremitati fili vel vectis inflexilis, cujus altera extremitas movetur, punctum illud deſcribet curvam, cujus Tangens ſemper erit filum vel vectis. In inſtrumento vel machinâ, de qua dixi, movenda eſt extremitas D fili vel vectis DA juxta lineam rectam DN, & cavendum ut cuſpis in extremitate altera A hærens erecta maneat dum interim premetur in planum horizontale, potius elaterio quam pondere, quoniam ſic curva AK deſcribitur ſine errore ſenſibili, licet planum non ſit exacte horizontale; Et detegitur, an habeat veram figuram reducendo extremitatem vectis N per eandem rectam ND; quoniam requiritur, ut cuſpis regrediatur ex K in A, per eandem viam.

Si hæc deſcriptio, quæ per leges Mechanicæ eſt acurata poſſet haberi pro Geometricâ, eodem modo ut de-

ſcriptiones ſectionum Conicarum, quæ fiunt per inſtrumenta, haberemus inde & quadraturam Hyperboles & perfectam conſtructionem omnium Problematum, quæ ad hanc quadraturam reducuntur; ut inter alia ſunt, determinatio punctorum *Catenariæ*, & logarithmi. Si enim BY ſit = AC, quæ ſumitur in axe Catenariæ, id eſt DB = DC applicata ejus CG erit = YX; & eadem quoque YX eſt logarithmus rationis quam habet AD ad PD; id eſt, æqualis eſt diſtantiæ duarum linearum AD, PD, vel aliarum duarum quarumcunque, quæ eandem habent rationem, ordinatarum perpendicularium ad Aſymptoton lineæ logarithmicæ, quæ habet DA pro Subtangente univerſali; unde poſſunt inveniri logarithmi tabularum, prout demonſtravi in additione ad *diſſertationem de cauſa gravitatis*. Leibnitius, qui primus initium fecit reductionis curvæ Catenariæ ad leges Geometriæ, ipſam illam lineam ope veræ Catenæ tenuiſſimæ formatam, dixit inſervire poſſe inventioni logarithmorum, vel quadraturæ Hyperboles; licet ad id cognita requiratur (ut quidem ipſe noverat) longitudo rectæ, quam vocat curvæ Parametrum, cujus inventionem non demonſtrat. Ita ut noſtra quadratrix in his uſibus præferenda videatur, quia poſt deſcriptionem Parameter ejus, quæ eſt univerſalis ejus Tangens, datur.

Sed quoniam hæc materia me perduxit ad conſiderationem Catenariæ quæ elegantiſſimis hujus temporis Geometrarum inquiſitionibus occaſionem præbuit, libet hic addere quam inveni peculiarem ſatis methodum qua hæc delineatur curva, quod eſt omnium difficillimum inter ea quæ de hac ſibi inquirenda propoſuere Mathematici. Inter illa, quæ inſerenda dedi in actis Lipſienſibus cum pulcris & eruditis Leibnitii & Bernoullii inventis, dixi, me reduxiſſe conſtructionem vel inventionem punctorum hujus lineæ ad quadraturam curvæ, cujus æquatio eſt $a^4 = aaxx + yyxx$ *; & me cognoviſſe, hanc quadraturam dependere à cognitione ſummæ ſecantium arcuum circuli, quæ æqualiter creſcerent *per minima*; quæ ſumma jam dudum reducta fuerat ad quadraturam

* Vide ſupra pag. 292.

ram Hyperboles per Jac. Gregorium in exercitationibus ſuis Geometricis, ubi inde deducit ſolutionem problematis longitudinum, datis vento & latitudinum differentiâ, quod novum credidit Leibnitius, & quod à Gregorio traditum tunc temporis non recordabar. Leibnitius & Bernoullius, ut cenſeo, pervenerunt ad Catenariæ Conſtructionem ope Curvæ, quam poſterior illorum habet in 1ª. Figurarum quas exhibet ad ſolvendum hoc Problema; nam Leibnitius mihi ſcripſit, ſe etiam ad eandem perveniſſe; Et invenio eandem cum illâ de qua ante, cujus æquatio eſt $a^4 = xxyy - aayy$, cujus quadratura, ut dixi, dependet à quadraturâ Hyperboles: licet nondum concipere potuerim, quomodo calculus illos perduxerit ad hanc lineam. Sed tranſeo ad meam conſtructionem, quæ abſque conſideratione aliûs lineæ curvæ, dat puncta Catenariæ per dimenſionem lineæ Parabolicæ.

Primum fundamentum totius inquiſitionis reſpectu hujus lineæ eſt hoc; Si habeas catenam compoſitam ex variis ponderibus æqualibus filo appenſis, ut BCDEF ſemper trium interſtitiorum ſe mutuo ſequentium duæ lineæ extremæ, ut CD, FE continuatæ ſibi mutuo occurrunt in linea IH perpendiculari ad Horizontem, quæ dividit interſtitium medium in duas partes æquales. Conſiderando porro catenam ita compoſitam à ponderibus connexis ad æquales diſtantias, quas ponimus infinite exiguas, & diſpoſitis, ita, ut interſtitium infimum BC ſit horizonti parallelum, ſi ſuper quovis alio interſtitio concipiamus triangula rectangula CDK, DEL, quorum unum latus ſit horizontale, videbimus, quod ab infimo initium faciendo anguli DCK, EDL, FEM, tales ſint, ut illorum Tangentes æqualiter creſcant, ut numeri 1, 2, 3, 4, id quod demonſtratu facile eſt ex dicto principio, licet forſitan eo non perveniſſemus ſine calculo Algebraico.

TAB. XLVI. fig. 3.

Si porro concipiamus partes æquales catenæ CDEFG extenſas in recta horizontali in COPQR, & ex prima diviſione O ductam OS, quæ concurrat cum perpendiculari CS,

ita ut angulus COS sit æqualis angulo CDO, si deinde ducantur aliæ rectæ SP, SQ, SR; triangula SCO, SCP, SCQ, SCR erunt necessario similia COD, DLE, EMF, FNG, quoniam SCO est simile ipsi COD per constructionem, & aliorum CSP, CSQ &c. tangentes æqualiter crescunt.

Si porro ducas CT, OV, PX &c. perpendiculares ad SO, SP, SQ evidens est, triangula CTO, OVP, PXQ &c. æqualia esse & similia triangulis COD, DLE, EMF &c. eodem ordine sumendo: unde concluditur, si spatia CD, DE &c. sint infinite parva, ut & partes CO, OP &c., id est si CG sit curva catenæ, & CR æqualis ejus longitudini, tum summa TO, VP, XQ &c. erit æqualis summæ perpendicularium KD, LE, MF &c. id est rectæ GΣ vel axi ΦC (nam spatium BC tum pro nihilo habetur) & summa CT, OV, PX erit æqualis summæ CK, DL, EM &c. id est applicatæ GΦ.

Describendo autem centro S arcum CZ usque ad ultimam secantium SR facile patet, summam infinite parvarum TO, VP, XQ æqualem esse rectæ ZR; consequenter, si ponamus quod SCΦ sit axis Catenæ, & linea CS certæ longitudinis, & quod CΦ sit æqualis ZR excessui secantis cujusvis SR supra radium SC, & quod applicata ΦG sit æqualis summæ omnium CT, OV, PX &c. usque ad illam, quæ cadit in SR, punctum G erit in curva catenæ, cujus longitudo CG erit æqualis rectæ CR: sed quæritur summa infinitarum CT, OV, PX &c. quam obtineo hâc consideratione, quod anguli SOV, SPX, SQY possint haberi pro rectis, utpote quorum differentia cum recto est infinite exigua, & quod tum lineæ OV, PX, productæ utrinque, ut & RΩ perpendicularis ad SR, fiant tangentes Parabolæ CΩ, cujus vertex est C, axis CS, focus S, & in qua SC est pars quarta Parametri; quarum tangentium quævis secatur in duas partes æqualiter per CR, ita ut una dimidia pars pertingat ad axem, altera ad punctum contactus, sic $\Delta\Omega$ secta est in R; quæ facile demonstrantur. Hinc porro intelligo ex Evolu-

volutione linearum curvarum, de qua locutus sum in *Horologio oscillatorio*, quod summa omnium QY, PX, OV, CT, debeat esse æqualis excessui curvæ Parabolicæ ΩC supra rectam ΩR; id quod Geometræ satis facile intelligent, licet in demonstrando non inhæream, quum non constituerim hic demonstrationes scribere, sed tantum indicare viam, quâ ad inventionem pervenis.

Datâ ergo Catenariæ Parametro SC, si sumas in axe punctum quodcunque Φ, & centro S radio SΦ describas arcum circuli, qui secat CR tangentem ad verticem in R; tangente RΩ ductâ ad Parabolam dictam e puncto R, & subtractâ hac ex longitudine curvæ suæ CΩ quam ponimus posse mensurari, quod reliquum est, erit recta applicata ΦG, & sic per eandem Parabolam invenies tot puncta in illâ curvâ, quot volueris; misi hanc constructionem ad Leibnitium initio Septembris 1691.

Potest porro in transitu notari, quod curva GC (sumendo semper numerum interstitiorum infinitum, & ideo punctum C ac si foret in axe & vertex) erit æqualis rectæ CR; & quod dimensio spatii curvi quoque facile demonstretur, perficiendo rectangulum RCSΘ & producendo perpendiculares GN, FM &c. usque ad SΘ in Λ, Γ &c.: patet enim triangulum SQY esse semissem rectanguli FΛ, basin & altitudinem eandem habentis, & pariter triangulum SPX semissem rectanguli EΓ & sic porro de aliis. Et consequenter triangulum SCR æquale dimidio spatii SCGΛ. Possem ita paucis demonstrare fundamenta omnium quæ de hac lineâ curvâ detecta sunt; sed hæc spectant ad Leibnitium & Bernoullium, utpote hujus inventionis magis participes, quos rogatos oportet, ut in bonum publicum laborem hunc in se suscipiant.

Finem scripto huic imposuissem, nisi nuperrime literas à Marchione de l'Hospital accepissem, ubi quum duo notabilia hac de materia memorat, non possum quin paucis de iis loquar; primum spectat ad constructionem & plures proprietates lineæ curvæ D[ni] de Beaune, quam Cartesius in Ep. 79. 3 vol. dicit ipsi inveniendam propositam per datam Tangen-

Tangentis proprietatem; Problema, quod mihi apparuit difficillimum. Solutio Marchionis exstat in 34. Diario Parisiensi anni ultimi, quare hanc hic non trado.

Alterum est ejus responsum de aliâ curvâ valde cognitâ, & quam Cartesius aliter adhuc consideravit, ut & Huddenius eo tempore, quo negotia Reip. non impediebant, quominus vacaret studiis. Curva in fig. 4. exhibetur, folium A B C H circumscribit & utrimque sese extendit juxta Asymptoton E F G. Æquatio ejus est $x^3 + y^3 = xyn$ si A D ponatur x in recta, quæ cum diametro C A format angulum 45 graduum; perpendicularis DB, vel D H, vel D K, y; & n recta data. Cum ipsi indicassem, me invenisse quadraturam hujus curvæ, & quod contentum folii A B C H esset $= \frac{1}{6} nn$ id est $\frac{1}{3}$ quadrati diametri A C; quod spatium infinitum inter Asymptoton & ambo curvæ brachia etiam ejusdem magnitudinis essent; & quod quadratura generalis segmentorum exprimeretur per unicum terminum; ille invenit veram illam quadraturam generalem. Scilicet quod contentum segmentorum A H vel A K exprimatur per $\frac{nxx}{6y}$ & segmenti A B per $\frac{nyy}{6x}$; sed ulterius mihi affirmat se eo pervenisse per tres diversas vias; quod miror, cum persuasum habeam me non parum profecisse unicam detegendo.

TAB. XLVI. fig. 4.

PRO-

V.

PROBLEMA AB ERUDITIS SOLVENDUM:

A

JOHANNE BERNOULLIO

IN ACTIS LIPSIENSIBUS

ANNI MDCXCIII.

PROPOSITUM.

QUæritur, qualis ſit curva ABC, quæ hanc habet proprietatem, ut, ducta ubicunque tangente BD terminata ab axe AE, portio ejus abſciſſa AD ſit ad tangentem BD in ratione conſtante M ad N. TAB. XLVI. fig. 5.

Problema hoc ſolutu dignum eſt, & facile Mathematicorum applicationem meretur. In quacunque enim ratione ſit M ad N, curva ABC ſemper eadem facilitate motu quodam continuo deſcribi poteſt, non obſtante, quod curva pro ratione M ad N magis vel minus compoſita evadat; in caſu quippe rationis æqualitatis illico patet, curvam ABC eſſe circulum: in reliquis ſi M ad N eſt ut numerus ad numerum, erit quidem curva geometrica, ſecus autem tranſcendentalis eſt. Quæritur generalis determatio puncti in curva.

VI.

C. H. Z. DE PROBLEMATE BERNOULLIANO IN ACTIS LIPSIENSIBUS PROPOSITO.

Elegans inprimis esse hoc Problema, cum ex iis quæ Clarissimus inventor de eo prodidit, tum ex solutione & commentatione fraterna manifestum est. A quo investigando cum propter insignem difficultatem, quæ statim sese offerebat, abstinere statuerim (neque enim omnibus perquirendis, quæ à Viris eruditis exercitii gratia proponuntur, incumbere necesse existimo, aut assequendis parem me profiteor) non desiit tamen quasi invitum compellere recurrens identidem quæsiti non vulgaris idea, donec tandem quod desiderabam obtinui. Inventa nimirum *æquatione differentiali*, in qua ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab asymptoto perpendicularibus intercepti; ab altera elementum spatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci posset. Quod apertius exponerem, nisi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejusmodi hyperbolicum secandum esset aut augendum secundum rationem datam. Quod cum per medias aut continue pro-

por-

portionales fieri possit, ubi ratio tangentis ad abscissam est ea quæ numeri ad numerum, hinc apparuit curvam quæsitam tunc iis accensendam quæ geometricæ vocantur, alias esse ex heterogeneis; ac tamen constructionem dari posita lineæ logarithmicæ descriptione, quam quidem hic adducerem, nisi viderem haud difficulter ex ipsa Jacobi Bernoullii doctissima simul brevissimaque solutione omnia erui posse, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur vero ex his illud animadversione dignum, nempe quandocunque in investigatione curvarum ex tangentibus aut subtangentibus ejus, ad similes ei, quam dixi, æquationes pervenietur, aut in quibus habeatur utrinque elementum spatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hic accidit, eventurum, ut curvæ geometricæ diversorum generum graduumque existant, si hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quæ in asymptotis, sint commensurabilia. Præterea observanda venit in hoc problemate inusitata ac singularis analysis via, quæ ad alia multa in hac Tangentium doctrina aditum aperit, ut egregie jam animadvertit Vir Celeberrimus *calculi differentialis* inventor, sine quo vix esset, ut ad hasce geometriæ subtilitates admitteremur. Porro quod ad curvarum, de quibus agitur, designationem in plano attinet, possem, si operæ pretium esset, alios modos ac fortasse commodiores indicare quam qui a Cl. Bernoullio præscribitur, atque etiam docere qua ratione optime peragatur descriptio nostræ quadratricis hyperbolæ, quæ inter *Tractorias* (ita enim vocari possunt) simplicissima censenda est, cum ad eam filis nihil opus sit, sed bacillo tantum utrimque cuspidem lateri infixam habente, quo fit ut & regressu explorari possit quam recte exarata sit. Sed his supersedendum arbitror, donec insignis usus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utilissimam cur-

vam nuper mihi repertam Geometræ sciant, cujus opera horologiis æqualis motus conciliatur, atque ejusmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis nostris hactenus usurpatis non satis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior spes nunc affulgeat perficiendi Longitudinum inventi. Curva hæc formatur,

aabbcdeeeeeefiiiiilllmmmmnorrrssttuux.

VII.

C. H. Z. CONSTRUCTIO UNIVERSALIS PROBLEMATIS A CLARISSIMO VIRO JOH. BERNOULLIO PROPOSITI.

TAB. XLVI. fig. 6.

CUm in *actis Lipsiensibus* Constructionem hanc me reperisse significarem, mense Octobri anno 1693, edenda tamen ea supersedi quod futurum putabam, ut vel ab Auctore ipso, vel Clarissimo Viro fratre ejus, vel alio quopiam, non multum absimi-

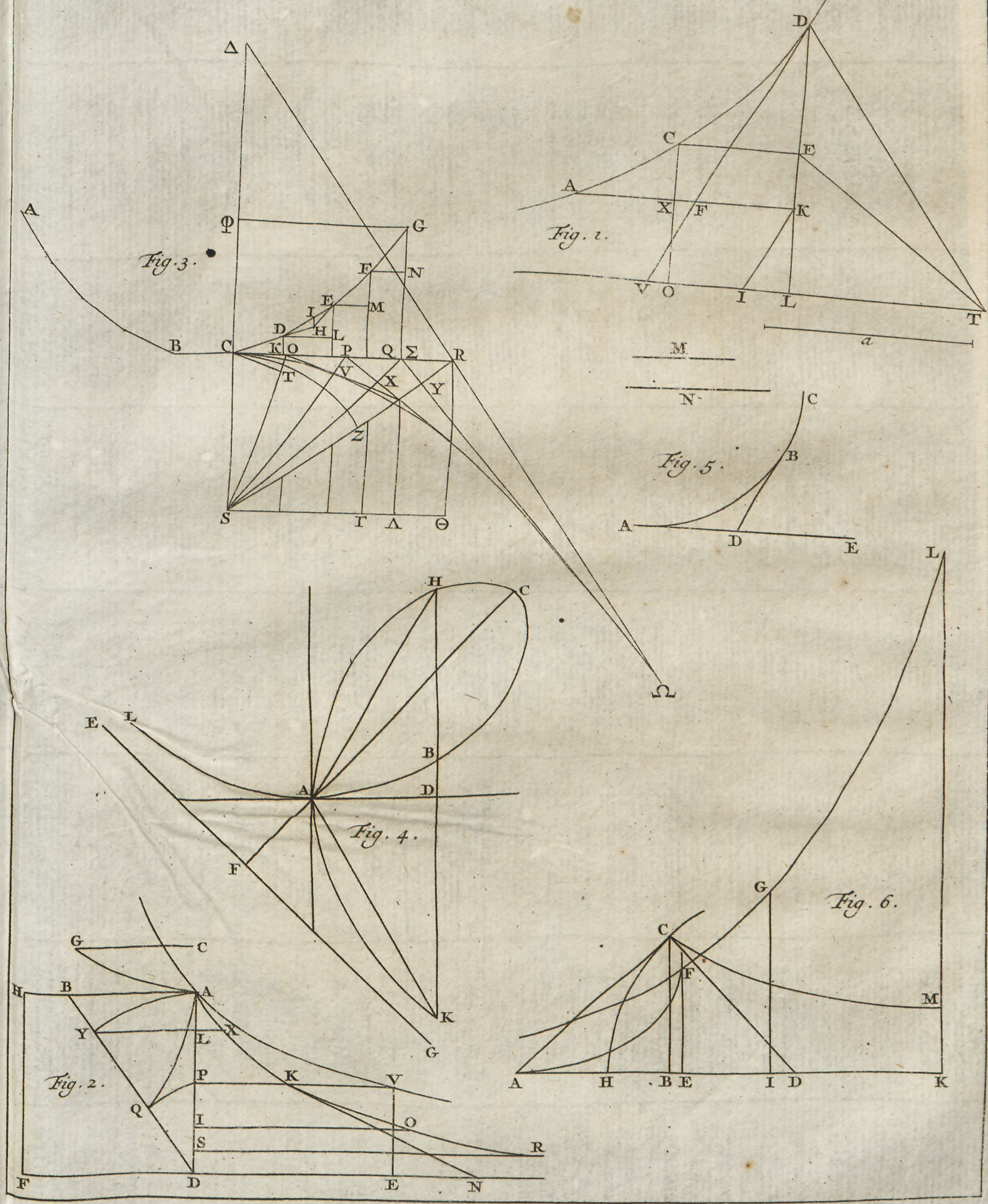
similis brevi in lucem mitteretur; ac subverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam vero nusquam adhuc comparuit, & est inter eas quæ dari possint quodammodo simplicissima, non videtur absque ea diutius relinquendum tam eximium problema. Est autem hujusmodi. In recta AB sit datum punctum A, & oporteat invenire curvam AFC talem, ut tangens ejusquævis CD abscindat a recta AB partem AD, quæ ad ipsam CD habeat rationem datam lineæ C ad L.

Constructio: sicut C ad L, ita quælibet AE, in recta AB assumta ad EF ipsi perpendicularem: & per F punctum ponatur ducta Logarithmica quæcunque cujus asymptotos sit AB, ad quam illa accedat versus A. Deinde ab A versus E accepta distantia qualibet AD, sit ut C ad L, sive ut AE ad EF, ita AD ad aliam DH; qua tanquam radio, centroque D, describatur Circuli circumferentia HC; ac præterea applicetur ad Logarithmicam recta IG asymptoto perpendicularis, ipsique DH æqualis. Jam sicut L ad duplum C, ita fiat IE ad EK, sumendam in asymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, & applicetur rursus ad Logarithmicam recta KL. Utque duæ simul KL, EF ad earum differentiam, ita sit DH ad DB; quæ sumenda versus A punctum, si AD major sit quam AE; at in contrariam, si minor. Denique erigatur ad asymptoton perpendicularis BC; ea secabit circumferentiam HC in puncto C, quod erit in curva quæsita AFC. Tangit autem hanc recta EF in F.

Porro animadversione dignum est, non simplicem esse curvaturam lineæ hujus cum C major est quam L, sed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM; quarum

hæc in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C, recta ex A educta occurrit curvæ utrique ad angulos rectos, ac proportionales sunt DA, DC, DB.

F I N I S.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA

ASTRONOMICA.

Tomus Tertius.

Tomi tertii contenta.

CHRISTIANI HUGENII

DE

SATURNI LUNA

OBSERVATIO NOVA.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI LUNA
OBSERVATIO NOVA.

ANNO millesimo sexcentesimo quinquagesimo quinto, Mensis Martii die quinto & vicesimo, Saturni planetam per tubum dioptricum aspectans, animadverti præter ansas sive brachia quæ utrimque illi cohærent, stellulam quandam ab occasu adstantem, tribus circiter scrupulis remotam, eratque disposita secundum eam quæ per utraque brachia ducta fuisset rectam. Et cum subdubitarem nunquid fortasse planeta esset ejus generis, quales circa Jovem quatuor

circumferuntur, locum Saturni ſtellulæque & poſitum utriuſque ad aliam quandam quæ tantumdem fere, ſed in contrarias partes, à Saturno diſſita erat annotavi; ex inerrantium numero hanc potiùs quam illam fore ratus, quod ab ea quam dixi recta linea deflectebat. Neque me fefellit opinio. Poſtridie enim repetita obſervatione, eam quæ ad occaſum ſpectabat ſtellam eodem ad Saturnum ſitu, eodemque quo prius intervallo ſejunctam deprehendi; alteram verò ad duplam ferè prioris diſtantiam receſſiſſe. Unde hanc quidem è fixis unam eſſe, atque à Saturno tum temporis retrogradiente longius relictam, illam autem ſimul cum eo progreſſam, comitem ipſi adeſſe intelligere mihi viſus ſum. Sequentium verò dierum obſervationibus omnis dubitatio ſublata eſt. Namque ab eo tempore per tres continuos menſes, quoties ſerenitas aëris patiebatur, novum planetam notavi, oſtendique amicis, nunc dextrum Saturno nunc ſiniſtrum; redactiſque in commentarios obſervationibus, ſexto decimo die periodum explere cognovi. Digreſſio ſumma tribus ſcrupulis paulo minor viſa eſt, ad quam ubi pervenit maximè fit conſpicuus: at cum Saturno appropinquat ante aut ponè tranſiens biduo propter ſplendorem ejus deliteſcit. Tempus verò ſexdecim dierum tam exactè circuitum planetæ metitur, ut cum annus jam & amplius à primis obſervationibus effluxerit, nihil adhuc aut abundare aut deficere deprehendatur, quoque loco prædicimus ibi ſeſe in cœlo ſiſtat. Scio ante annos complures Ant. Mariam de Rheita non unum, ſed ſenos jam Saturno errones attribuiſſe. Verum æquè circa hos, quàm circa alios illos quinque, quos præter Mediceos Jovi circumpoſuerat, deceptum fuiſſe, inde perſpicitur, quod cum meliori Teleſcopio ſeſe uti Clar. Vir Joh. Hevelius demonſtret, nullum tamen Saturno utut diligentiſſimè ſæpiſſimeque inſpecto comitatum adeſſe

ſe ſenſerit. Hoc enim ultrò fatetur. Præter Rheitam verò nemo quod ſciam ſimile quid de Saturno prodidit. Nam gemini illi quos Galilæus detexerat laterones longè aliud eſſe deprehenſi ſunt quàm prima ſpecie videbantur. Quid tamen ſint in incerto eſt, neque adhuc pronunciare audent Aſtronomi. Cæterùm mihi novum Saturniæ lunæ phænomenon ad hæc quoque viam aperuit, tandemque cauſam reſcivimus, cur interdum inter binas veluti anſas Saturnus medius teneatur, alias recta quaſi brachia protendat, tum nonnunquam omnibus amiſſis rotundus inveniatur, qualis anno 1642. ſpectatus fuit, jamque rurſus trimeſtri ſpatio perſtitit. Et harum quidem viciſſitudinum tempora in futurum definire non erit difficile ſi duorum adhuc menſium obſervationibus attendere licuerit, quæ videndum an hypotheſi noſtræ conſentiant. Expectamus enim ut ſub finem Aprilis, ſi non ante, brachia Saturno renaſcantur, non curva illa, cujuſmodi à Franc. Fontana & Hevelio depicta cernuntur, ſed ſecundùm lineam rectam utrimque prominentia, ſi quis melioris notæ perſpicillo intueatur. Nam vulgaria ſi adhibeat binos orbiculos referent, ſicuti Galilæo primum ſeſe obtulere. Noſtrum, quo Saturni aſſeclam reperimus, quinquagies diametrum rei viſæ multiplicat, duodenos pedes æquans: cui poſtea duplum longitudine conſtruximus, multiplicatione centupla. Cum autem longiora etiam hiſce Teleſcopia, utpote triginta & quadraginta pedum ab aliis fabricari dicantur, aliquid aut vitris vitii ineſſe, aut hæc eadem non debita proportione mutuò reſpondere credibile eſt. Neque enim alias huc-uſque aciem eorum effugiſſet novus Saturni ſatelles.

Obſervationes præterito præſentique anno collectas, quibus periodus ipſius demonſtratur, tunc unà edituri ſumus cum integrum Saturni ſyſtema perfecerimus. Cujus interea ſummam ſequenti grypho conſignare viſum

Vvv 2 eſt,

est, ut si quis fortasse idem se invenisse existimet, spatium habeat ad expromendum, neque à nobis ille aut nos ab illo mutuati dicamur.

aaaaaaacccccdeeeeeghiiiiiiillllmmnnnnnnn
nnooooppqrrstttttuuuuu.

Hagæ-Com. 5. Mart. 1656.

CHRISTIANI HUGENII
ZULICHEMII, CONST. F.
SYSTEMA SATURNIUM,
SIVE
DE CAUSIS MIRANDORUM SATURNI PHÆNOMENON;
ET
COMITE EJUS
PLANETA NOVO.

SERENISSIMO PRINCIPI

LEOPOLDO

AB HETRURIA

Christianus Hugenius S. D.

RES in cælo remotissimas, extraque hominum conspectum positas, nisi cum ab arte sibi auxilium adsciscunt, hoc opusculo persequor, Princeps Serenissime, nec dubito quin multis nimia diligentia versatus dicar in his quæ tam parum ad nos attinere arbitrantur, cum eorum quæ hîc coram & in propinquo nobis sita sunt, plurima investigatu digna supersint. Verum hi parum attendere videntur, quantò præstet cæteris omnibus sublimium rerum consideratio, quamque hoc ipsum præclarum sit, ad tam longe dissitas naturæ partes contemplationem mitti; quæ licet visu obscuræ & exiles, reipsa tamen illustres multoque maximæ existunt. Nam si quod procul absunt, ideo parum ad nos pertinere illas putemus, indigni profectò simus mente rationis participe, qua facile immensa cæli spatia transcendimus, indigni etiam egregio illo, nec unquam satis laudato, propagandæ visionis invento, quo ad astrorum regionem ipso quoque oculorum sensu pertingimus.

Cu-

Cujus quidem inventi beneficio ad longinqua Saturni regna propius nunc quam antehac quisquam adivi, & usque eò progressus sum, ut vasti adeo itineris, pars una centesima tantummodo reliqua fuerit: quam si quo pacto superare potuissem, quot qualiaque, dii boni, narranda haberem! Nunc autem ea perscribo quæ ex intervallo isto notare oculis valui, quæque & ipsa miranda esse & relatu dignissima nemo diffitebitur. Quem enim non admiratio capiet, ubi Saturnum annulo circumdatum ac velut corona redimitum viderit? atque hanc eam formam esse, quæ, cum perpetuo eadem sit, diversas tamen facies induat, & pertinaciter hactenus conjecturas Astronomorum frustretur. At neque hoc minus novum atque inopinabile omnium auribus accidisset, Planetam aliquem non antea visum in cælo repertum esse, nisi novitatis gratiam stellæ Mediceæ abstulissent. Verum hic noster Saturni accola, quo diutius latuit, majorique molimine ad terram deducendus fuit, eo magis deprehenso gaudendum est: quodque unus hactenus desideratus, cumulum nunc tandem errantium stellarum explet, numerumque earum duodenarium; quo majorem posthac repertum non iri, prope est ut confirmare audeam. Certè jam majoribus illis ac primariis, inter quos Tellus hæc reponenda est, æquales multitudine minores existunt, & utrique illo, quem perfectum dicimus, numero continentur, ut consilio summi opificis modus hic

præ-

præfinitus videri poſſit. Cæterum multiplicem contemplandi materiam, Philoſophorum ingeniis circa hæc cæleſtia corpora exorituram, quibus veluti nova acceſſione mundum auximus, non perſequar. Unum hoc inanimadverſum eos præterire nolim; nempe quam non leve argumentum ad aſtruendum pulcherrimum illum mundi univerſi ordinem, qui à Copernico nomen habet, Saturnius hic mundus adferat: ſi enim gravatè olim iſti ſyſtemati aſſentientibus, ſcrupulum demere potuerunt quaternæ circa Jovem repertæ Lunæ; manifeſtius utique nunc eos convincet unica illa circa Saturnum oberrans, atque ob hoc ipſum quod unica eſt, noſtratis Lunæ ſimilitudinem magis exprimens: ut omittam nunc aliam quoque Saturnii globi cum hoc noſtro cognationem, quam in ſimili axium utriuſque inclinatione invenient Aſtronomiæ periti. Quæ ſanè cum mecum reputo, fieri non poſſe videtur, ut veritatem hiſce in rebus tam feliciter repertam, tamque manifeſtis indiciis fultam, ulla ætas obliterare valeat, quamdiu modo obſervationum Galilæi aut noſtrarum aliqua memoria ſupererit. Haſce igitur ut ab oblivione vindicarem, utque deficientibus forſan olim organis quibus eaſdem repetere liceat, eſſet tamen unde aliquando extitiſſe probari poſſet, hac qualicunque ſcriptione publicandas cenſui, omnibuſque impertiendas. Quod autem Celſitudini Tuæ commentarium hunc inſcripſerim, feci id non una ratione. Namque in

primis celebritatem claritatemque ei non exiguam ab illustrissimo nomine tuo acquiri posse credidi; cujus cum per orbem universum, quà modo aliquis virtuti aut humanitati locus est, latè fama pervaserit, librum hunc tibi nuncupare, hoc est velut in edito cunctisque conspicuo loco eum deponere. Deinde nec ignorabam quantum momenti accessurum esset invento illi nostro, quo perplexa Saturni mysteria exponere conatus sum, si exactissimo tuo judicio illud probari contingeret: quod utinam non frustra speraverim. Sed ante omnia occasionem aliquam me invenisse gavisus sum, neque omittendam duxi, qua palam commemorarem quantum tibi, Princeps Celsissime, artes disciplinæque optimæ, & in his Mathematicæ præsertim debeant, quod contra invalescentem indies barbariem patronum iis ac defensorem te præstas, quodque familiariter eas colendo, ac velut in contubernium tuum admittendo, plurimum dignitatis ipsis concilias: quod denique præstantissimorum ex omni antiquitate Autorum scriptis in vitam revocatis easdem promoves ac locupletas. Nempe ad hæc facienda, & illustria majorum tuorum exempla & innata virtus & egregia animi tui propensio te impellunt. nos autem ad quos optimæ hujus tuæ voluntatis curæque utilitas pervenit, grato animo illa agnoscere & prædicare æquum est. Hagæ Comitis. 5. Julii. Anno 1659.

NICO-

NICOLAUS HEINSIUS, D. F.
AD AUCTOREM SYSTEMATIS.

LAudibus Hugeni pars addite magna paternis,
Quem totum Uranie vindicat una sibi.
In cunis placiti reptare per avia cæli,
Astra tibi puero volvere ludus erat:
Astra minus patriis non trita penatibus olim;
Cognita natali non minus astra solo.
Jamque eadem populis mirantibus astra recludis,
Perspicua ingenii lumine facta tui.
Qualis sidereo radiatus in æthere Titan
Oppositam nocti spargit ubique facem.
Ardue stellantis salve metator Olympi,
Qui superâ nobis das regione frui:
Per quem, discussâ dubiæ caligine mentis,
Inserimur liquido cominus ora polo.
Devocat in terras, magico sine carmine, Lunam
Æqua Syracosio cui manus arte seni.
Ecce Jovis genitor tenebroso carcere per te
Et fugit, & lætam rursus oberrat humum.
Macte ausis studioque; Deos qui vindice chartâ
Asseris: inventi qui facis astra tui.
Nunc sua Saturno cum vincula demseris ipsi;
Sæcla tuum terris aurea munus eunt.

IN IDEM SATURNI SYSTEMA.

OMnia qui magni dispexit sidera Mundi,
Viderat hæc oculo debiliore Conon.
Attigit illa Conon miris adjutus ab alis,
Attigit, & visu nobiliore, meus.
Perque vias Lunæ, per, qua Cyllenius errat,
Volvitur & Veneri Martia flamma comes;
Quique nitet famulos inter tot Jupiter ignes;
Lumina falcigeri misit ad astra Dei:
Et didicit vario quare mutabilis ore,
Ludat in obscurâ mobilitate Senex:
Quod frontem diadema premat, quo, Circulus illi
Aureus, infaustum cingat honore caput:
Quæ noctes ibi Luna regat, quæque, æmula nostræ,
Expleat amissum Cynthia luce diem.
Nec satis hæc vidisse sibi miracula, testes
Convocat, & visis quærit ubique novis.
Noluit hæc nostros fugerent arcana nepotes,
Ignaros cæli nec sinit esse sui.
Ampla satis Juveni est, ut debita gloria, merces,
Vocibus innumeris quam sua fama sonet;
Gloria sideribus quam convenit esse coævam,
Et tantum Cælo commoriente mori.

CONST. HUGENIUS. C. F.

CHRISTIANI HUGENII

Zulichemii, Const. F.

SYSTEMA SATURNIUM.

CUM ad cælestium contemplationem tubos opticos, nobilissimum Belgicæ nostræ inventum, Galileus admovisset, celeberrimaque illa Planetarum phænomena mortalibus primus aperuisset; in his, ea quæ de Saturni stella prodidit, vel præcipuè admiratione digna fuisse videntur. Nam cætera quidem, etsi suspicienda meritò ac magni facienda, non tamen ejusmodi erant, ut, quibus de causis talia cernerentur, enixè quærendum esset. Saturni vero mutabiles figuræ novum quoddam & reconditum naturæ artificium præferebant, cujus certè rationem neque Galileo ipsi, neque tanto post tempore Astronomorum cuiquam (pace eorum dixerim) divinare contigit. Hunc primò non simplici orbe lucentem, sed veluti tergeminum conspexerat, binis stellis minoribus mediæ majori proximè utrinque adjectis. Eâque formâ triennio fere absque ulla mutatione perseverante, certò sibi persuaserat, quales Jovi quatuor, tales duos comites Saturno obtigisse, nullo tamen motu præditos, eóque simili positu semper lateribus hæsuros. Verùm sententiam mutare coactus est, solitario Saturno prodeunte, ac priore satellitio penitùs destituto. Quod cum admirabundus vidisset & causam rei conjectura assequi tentaret, de reditus tempore, quo prior illa phasis restitui deberet, nonnulla vaticinatus est. Sed neque hæc ita tunc successisse quemadmodum speraverat deprehensum est, nec gemina modò aspectus diversitate Saturnum contentum esse. Etenim aliæ deinceps mirabiles ac prodigiosæ formæ appa-

ruerunt, quas primùm à Josepho Blancano & Francisco Fontana descriptas novimus; adeo quidem insolita specie, ut multis oculorum ludibria censerentur, imaginesque vitris potius quam cælo hærentes: donec pluribus eadem videntibus, haud vano indicio proditas fuisse constitit.

Igitur ipse quoque ad hæc cæli miracula conspicienda magno desiderio actus; cum non nisi vulgaria suppeterent perspicilla, quinum aut senum pedum longitudine; artem eam qua vitra in hosce usus figurantur quanta potui cum cura diligentiaque excolere aggressus sum, nec piguit ipsummet operi manus admovisse; quoad multis superatis difficultatibus (nam plures in recessu hæc ars habet quam prima fronte præferre videatur) ea denique vitra mihi effeci, per quæ ad hæc scribenda præbitum est argumentum. Continuo enim ad Saturnum telescopia dirigens, aliam ibi rerum faciem reperi, quàm plerisque antehac fuerat credita. Nam quæ vicinæ illi hærebant appendices, eas non sane geminos planetas, sed quidvis potius aliud esse, diversum vero ab his unumque numero planetam, majori intervallo à Saturno remotum, diebus sexdecim circa eum ambire apparuit; & hunc quidem omnibus antehac sæculis ignoratum. De qua nova nostra observatione tribus abhinc annis Astronomos certiores feci, prudenti consilio obsecutus viri Illustris, ingenioque juxta ac virtute conspicui, Joh. Capelani. Huic enim, uti & Gassendo aliisque, cum Lutetiæ Parisiorum agens, de Saturni comite à me viso narrassem, multas ob causas censuit, non reticendum tam gratum omnibus futurum nuncium, quoad illud quod meditabar integrum Saturni Systema perscripsissem. Itaque anno 1656 die 5 Martii, de Saturni Luna (ita enim novam stellam nec immerito appellavimus) observationem emisi *, atque unà hypothesin quæ causam reliquorum Saturni phænomenôn contineret; sed hanc confuso elementorum quibus scribebatur ordine, quo tantùm, non ignorasse nos eam illo jam tempore, testatum esset, aliique etiam ad vulganda quæ commenti essent hoc pacto invitarentur, neque sibi præreptam quererentur inventionis gloriam. Deinceps ve-

* Vide supra pag. 523.

vero rogatu ejusdem Viri eximii, solvi quoque hunc literarium gryphum, totamque hypothesin summatim illi exposui: unde jam ad plures forsitan nostra de Saturni phasibus sententia manaverit. Sed pleniorem utique tractationem postulat mira & insolens circa hunc planetam naturæ fabrica, neque expectare debemus ut vel à nobis relatis, vel ad explicanda phænomena adsumtis, fidem omnes habeant, nisi & hæc rationum momentis, & illa observationum testimonio adstructa viderint. Quamobrem horum utrumque nunc præstare nobis propositum est. Ac primò quæ ad comitis planetæ motum periodumque spectant accuratè, quantum fieri poterit, ex observatis definiemus, motusque ejus tabulas condemus. Deinde ipsius Saturni phases singulas suis causis assignabimus, ita ut futuras quoque inde prænoscere in promptu sit.

Sed antequam observationes exhibeamus, de telescopiis nostris quibus cælo eas deduximus, pauca referre expediet, ut sciant hinc, qui comitem Saturni, mirabilesque Planetæ ipsius figuras intueri cupiunt, qualibus ad hoc turbis vitrisque indigeant; útque suos si quos habent, possint cum nostris contendere. Primus quem adhibuimus duodenos pedes non excedebat, duobus convexis vitris instructus, quorum id quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat ad trium paulo minus pollicum, sive unciarum pedis Rhenolandici distantiam. Eo planetam novum & deteximus primùm, & per aliquot menses observavimus, nec non formam eam Saturni, quæ à nemine adhuc percepta fuerat, quámque postea describemus, licet non prorsus erroris expertem. Inde verò duplicata priori longitudine, simul duplo propiores sideribus facti sumus, multóque meliùs faciliúsque phœnomena omnia adnotavimus. Et hi quidem tubi 23 pedum, è ferri bractea constructi sunt, habentque ab altera parte vitrum insertum, cujus latitudo ad quatuor pollices, sed in quo non major pateat circulus quam diametro duorum pollicum cum triente. Ab altera parte, quæ nimirum oculo admovetur, bina sunt vitra minora, $1\frac{1}{2}$ pollicem diametro

Telescopiorum nostrorum descriptio.

æ-

æquantia, juncta invicem, quæque hoc pacto æquipollent convexo colligenti radios parallelos ad intervallum unciarum 3, aut paulo etiam angustius. Ex quo sanè majoris vitri excellentia æstimanda est, tam breve convexum perferre valentis: quoniam quanto minori de sphæra id fuerit, tanto res visæ magis ampliantur. Illud enim in Dioptricis nostris demonstratum invenietur, speciei per tubum visæ ad eam quæ nudo oculo percipitur, hanc secundum diametrum esse rationem, quæ distantiæ foci in exteriori vitro ad illam, quæ in interiori sive oculari vitro est, foci distantiam. Centuplam itaque fere rationem hanc in perspicillis nostris esse constat, cum Galileana non ultra trigecuplam processerint. Nam quantitatem incrementi eodem modo nos atque ille æstimamus; nempe ut tanto major res quæque per tubos quam nudo visu conspici dicatur, quanto majori angulo ad oculum extrema ejus deferuntur, sive quanto latior ejus imago in fundo oculi depingitur.

Quantum iis res visæ amplientur.

Augmentum telescopio perceptum quomodo æstimetur.

Alia ejusdem falsa æstimatio.

Est autem & alia æstimandi augmenti ratio, sed parum ex vero, cùm absque ulla anguli consideratione apparentem perspicillo alicujus rei magnitudinem determinamus; velut cum Jovis orbem circello duorum aut trium digitorum latitudine æqualem nobis cerni putamus. At enim cum idem circulus, trium puta digitorum diametro, major minorve necessario appareat, pro diversa sui ab oculo distantia, nonne etiam adjiciendum sit, quanto ex intervallo conspectus circulus disco Jovis æqualis cernatur? Profectò nisi hoc addatur, nihil certi ea comparatione designari videtur. Et tamen ratio subest cur magis una quæpiam quam alia magnitudo imagini visæ tribuatur, & quidem à pluribus sæpe spectatoribus eadem. Verùm de his aliàs fortasse. In præsentia illud ostendisse suffecerit, fallacem omnino esse hoc modo initam æstimationem. Idque primùm inde liquet, quod Lunâ aut signo aliquo cælesti, velut Orione, prope horizontem conspecto, idem longè majus visus judicet, quam ubi altè jam ac supra verticem penè adstiterit, cum tamen hîc nihilo minori angulo illud comprehendi certum sit. In his autem quæ telescopio in-

intuemur major adhuc error contingit. nam cum, exempli gratia, vel triplo latior secundum diametrum appareat Jupiter, oculo altero per telescopium nostrum spectatus, quam Luna oculo altero vacuo, atque adeo utrâque hac specie, in unum convenire jussâ, latè à Jove Luna contegatur; nihilominus cum seorsim Jupiter inspicitur, trium circiter digitorum latitudinem plerisque spectatoribus æquare tantummodo existimatur. quanquam aliquos repererim qui disco Lunari æqualem faciebant, atque ita tertiam partem saltem tribuebant ejus quæ reipsa apparet amplitudinis. Quamobrem de multiplicatione telescopii malè hoc modo inquiri certum est. Fiet autem rectè Galilei methodo, quam in Sidereo nuntio tradidit; vel, quia hæc in prægrandibus telescopiis difficultatem habet, inquirendo foci distantias in singulis vitris, easque inter se comparando. Qua ratione diximus centuplum fere augmentum tuborum nostrorum reperiri.

Quænam circa planetas cæteros & fixas observata.

Cæterùm libenter intellecturos credo qui hæc legent, qualia etiam eorum ope de reliquis præter Saturnum planetis fixisque stellis observaverimus: de quibus breviter ergo hæc habeant. In primis sæpe illud quæsivimus, num aliqui etiam apud Venerem, Martem aut Mercurium comites circumferrentur, ubi tamen nullos unquam reperimus. Apud Jovem autem quatuor neque amplius. Qui quidem semper ac facilè telescopio nostro patent, nisi cum disco suo aut umbra Jupiter aliquem abscondit. Inde verò quamprimum rursus emergere incipiunt fiunt conspicui, imò priusquam toti exierint, ut non semel me vidisse memini. Porrò quæ in Jove zonæ seu fasciæ quibusdam animadversæ sunt, non semper eâdem formâ præditæ; has ego & qui mecum observarunt perspicuè sæpe animadvertimus reliquo Jovis corpore magis lucidas, cum tamen alii obscuriores asserant; quibus forsitan interjectum spatium inter binas zonas lucidiores pro una obscuriore fuerit. Atque anno quidem 1656, multo majori intervallo, quam sequentibus tribus, illas à se mutuo distare comperimus, sicut in adjunctis delineationibus videre est. Qua ex instabilitate non malè forsan colligemus, ad instar nu-

In Jovis disco zonæ candicantes.

TAB. XLVII. fig. 1. 2.

nubium nostrarum, vapores quosdam vicinum Jovi ætherem insidere, qui nunc his nunc illis climatis crebri magis confertique exoriantur.

In Marte zona obscura. TAB. XLVII. fig. 3.

In Marte quoque cingulum ejusmodi unicum anno 1656 deprehendi, latum admodum, mediámque disci partem offuscans, quemadmodum figura adjecta demonstrat. Insuper discum planetæ hujus parte aliqua deficientem vidi aliquoties, & in Venere phases omnes quales Lunæ. Verùm hæc minoribus etiam telescopiis alii notarunt.

Fixarum diametri nulla latitudine.

Fixarum autem diametros etiam maximè splendidarum nulla unquam latitudine cernere potui, sed tantum minimi puncti instar, quoties vitris usus sum fuligine leviter infectis ad auferendos radios. At ex Hevelii consilio, quod in egregio ejus extat opere Selenographico, exterius vitrum contegens, ita ut exiguum tantum foramen relinquatur, aliquam magnitudinem præ se ferre illas vidi; quam proinde non stellarum propriam esse, sed ex aliqua visus fallacia nasci arbitror. Nam nostra quidem illa methodus, trans fumum, quo lens proxima oculo tincta est, stellas inspiciendi, certa est omnique erroris suspicione carens; atque ita planetas quoque nimia luce radiantes, solemque ipsum intueri solemus. Foramine autem exiguo majorem lucis partem excludendo, non tolli penitus circumfusos sideribus radios, sed in orbem minorem satisque perfectè circinatum eos cogi opinor, qui imprudentibus pro ipsius stellæ corpore imponat.

Phænomenon in Orione novum.

Unum verò circa fixas phænomenon relatu dignum occurrit, à nemine hucusque, quod sciam, animadversum, nec quidem nisi grandibus hisce telescopiis rectè observandum. In Orionis ense tres stellæ ab Astronomis reponuntur inter se proximæ. Harum mediam Anno 1656 fortè per tubum inspicienti mihi, pro stella una duodecim (quod quidem minimè novum) sese obtulerunt; eo positu quem subjecta figura expressimus.

TAB. XLVII. fig. 4.

Ex his autem tres illæ pene inter se contiguæ, cumque his aliæ quatuor, velut trans nebulam lucebant, ita ut spatium

tium circa ipſas, qua forma hîcconſpicitur, multo illuſtrius appareret reliquo omni cælo; quod cum apprime ſerenum eſſet ac cerneretur nigerrimum, velut hiatu quodam interruptum videbatur, per quem in plagam magis lucidam eſſet proſpectus. Idem verò in hanc uſque diem nihil immutata facie ſæpiùs atque eodem loco conſpexi; adeo ut perpetuam illic ſedem habere credibile ſit hoc quidquid eſt portenti; cui certè ſimile aliud nuſquam apud reliquas fixas potui animadvertere. Nam cæteræ nebuloſæ olim exiſtimatæ, atque ipſa via lactea, perſpicillo inſpectæ, nullas nebulas habere comperiuntur, neque aliud eſſe quam plurium ſtellarum congeries & frequentia.

In Lunæ facie autem quàm multa, diligentiſſimis quibusque obſervatoribus prætcrita, tubis noſtris detegantur, non referam; quandoquidem ſchemate ad hoc deſcripto opus eſſet, eoque ampliſſimo. Quem laborem hactenus non ſuſcepimus, credimuſque exiturum in immenſum, ſi montium omnium eminentias & anfractus, qua multitudine nobis videntur, depingere conemur. Itaque ad Saturni obſervationes pergo, de quibus ſciendum eſt, priores omnes, uſque ad eam quam 19 Febr. Anno 1656 annotavimus, tubo 12 pedum peractas eſſe, reliquas pedum 23. Uterque autem everſo ſitu viſibile referebant, ideoque ſchemata omnia, non ut primùm deſcripta fuerant, hîc expreſſimus, ſed ſupera inferis, dextra ſiniſtris permutavimus, ut vera pateret diſpoſitio.

Circa Saturnum obſervationes. TAB. XLVII. fig. 5.

Die igitur, ſecundum Calendarium Gregorianum, 25 Martii, Anno 1655, circa horam 8 veſpertinam, Saturnum conſpexi cum brachiis utrinque ſecundum rectam lineam extentis; tribuſque fere ſcrupulis ab eo diſtantem occaſum verſus ſtellulam quandam exiguam *a*, ſic ſitam, ut ſi per brachium utrumque recta duceretur, ea in illam incurreret, aut certè pauxillo tantum inferior tranſiret. Alteraque item verſus orientem ſtellula *b* aderat, paulo longius à Saturno remota, & brachiorum lineâ multo inferior. Et hac quidem prima vice ſuſpicatus ſum ſtellam *a* Saturnum comitari, quo-

niam alias quoque vicinam illi animadverteram, similique fere positu.

TAB. XLVII. fig. 6. Porrò brachia Saturni recta quidem utrinque extensa cernebantur, sed versus extremas cuspides crassiora paulo quam qua parte Saturni disco cohærebant, qualia sequens schema exhibet.

Eâque formâ usque ad occasum Heliacum Saturnus perstitit. Cæterum cum post phasin rotundam Anni 1656 brachia denuo recepisset, eadem quidem illa forma reversa est duodecempedali tubo spectanda: sed tunc majori tubo 23 pedum adhibito alteram hanc figuram veriorem esse patuit; unde antea quoque talem extitisse credibile fiebat, quæ tamen minori telescopio perfectè conspici nequiisset. At lineam illam obscuram, brachia utraque conjungentem, ac tota tamen infra se relinquentem, etiam 12 pedum telescopio notavimus.

TAB. XLIX. fig. 6.

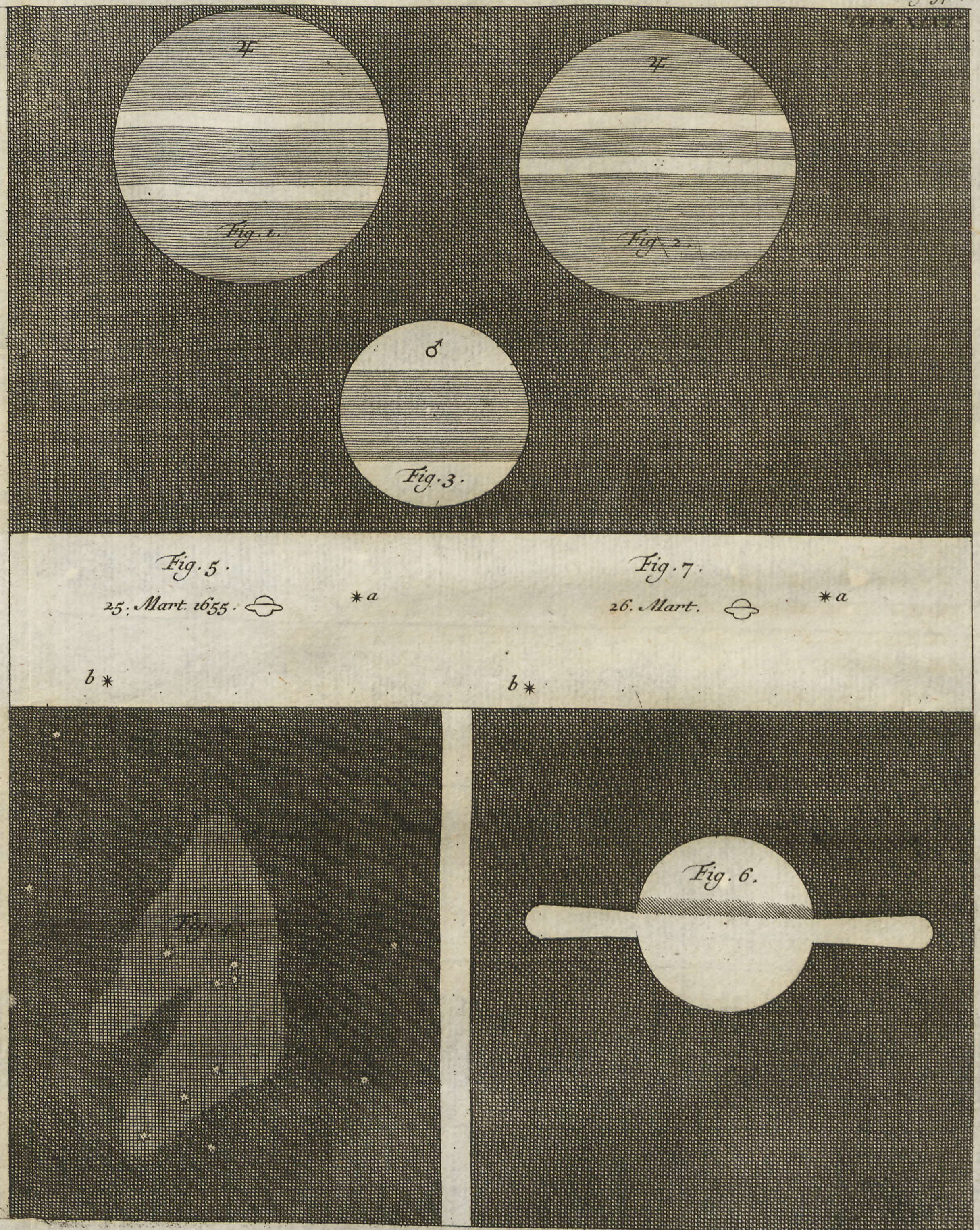
TAB. XLVII. fig. 7. Die sequenti, nempe 26 Martii stella *a* eodem modo eademque qua prius distantia juxta Saturnum collocata erat, *b* verò duplo quam ante remotior. Unde, quum distantia inter se stellularum *a* & *b* major esset effecta, sequebatur vel utramque vel alteram saltem erraticam esse. Et stellam quidem *a* necessario talem judicavi, quoniam Saturnum eo tempore retrogradum esse noveram; itaque oportebat cum Saturno illam in eandem plagam delatam esse, quum alioqui propinquior multo fieri debuisset. Altera vero *b*, quominus fixa censeretur nihil obstabat, imo prorsus ita existimari consentaneum erat, cum una die tantum ab illa Saturnus recessisset, quantum motus ejus postulabat. Neque verò aliter se rem habuisse sequentes observationes ostendunt.

TAB. XLVIII. fig. 1. Martii 27. stella *a* Saturno propior facta erat: *b* verò adhuc longius recesserat.

Inde nubili dies intercesserunt usque ad 3 Apr. quo die fixam *b* non amplius annotavi, sed stellula *a* migraverat ad Saturni latus Orientale, rursusque fere 3 scrupulis distabat. *fig. 2.*

Quinque diebus sequentibus, rursus ut ante impeditæ observationes.

9 Apr.


♃
Fig. 1.
♃
Fig. 2.
♂
Fig. 3.
Fig. 5.
25. Mart. 1655.
a
b
Fig. 7.
26. Mart.
a
b
Fig. 4.
Fig. 6.

9 Apr. denuo ad occidentem ſitus erat comes *a* ſicut 27 Martii, fixaque altera *c* à parte orientali Saturno admodum propinqua animadvertebatur, uno circiter ſcrup. diſtans, lineaque brachiorum, uti præcedens, inferior. TAB. XLVIII. fig. 3.

10 Apr. Saturnus à fixa *c* longius abſceſſerat, & comes à Saturno. *fig*. 4.

Diebus duobus ſequentibus aucta fuit continuè diſtantia ſtellæ *c*, comitis *a* eadem fere manſit. Nempe

11 Apr. hic poſitus fuit. *fig*. 5.

12 Apr. talis. *fig*. 6.

13 Apr. comes videri nequiit, quoniam & Saturno propior factus erat, & Luna adventabat. Fixa *c* ulterius ſemper recedebat, ſed lentiore paſſu. *fig*. 7.

14 & 15 Apr. comes non apparuit ob viciniam Saturni.

16. Cælum nubilum.

17. Comes ad ortum ſitus erat, diſtans fere 3 ſcrup. ſtella vero *c* longius abierat, ſemper tamen oculis notata; Ac poſtea quidem eadem ad Saturnum reverſa eſt, ut ſequentes obſervationes docebunt. *fig*. 8.

18. Apr. comes ſitum mutaſſe non videbatur.

19. Apr. paulo propius ad Saturnum acceſſerat. *fig*. 9.

20. Apr. magis appropinquaverat. *fig*. 10.

21. Apr. Adhuc magis; cernebaturque anſarum lineâ paulo ſuperior. *fig*. 11.

29 Apr. Occidentalior Saturno comes factus erat, ac tantundem diſtabat quantum 21. Apr. *fig*. 12.

Ultima Apr. Comes prope Saturnum delituit.

3 Maji, in quem diem inſtitio Saturni incidit, comes in maxima ab eo diſtantia videbatur, orientem verſus. *fig*. 13.

Diebus inſequentibus uſque ad 27 Maii, ejuſmodi poſitus fuit qualem exhibent ſchemata ſubjecta.

6. Maji. *fig*. 14.

7. Maji. *fig*. 15.

10. Maji. *fig*. 16.

11. Maji. *fig* 17.

12. Maji. *fig*. 18.

14. Maji. *fig.* 19.

15. Maji. ægre conſpectus comes propter inſtans plenilunium. *fig.* 20.

17. Maji, Comes non apparuit.

18. Maji. *fig.* 21.

19. Maji. *fig.* 22.

20. Maji. *fig.* 23.

27. Maji, Comes occidentem verſus in maxima à Saturno diſtantia reperiebatur. Saturnus autem jam rurſus ad ſtellam *c* ſuperius notatam appropinquare cœperat, remotus circiter 10 ſcrup. Ita verò nunc poſita hæc erat, ut linea brachiorum Saturni continuata ſubter eam ferretur, cum die 10 Apr. ſupra tranſiiſſet. Sed & Saturni ipſius ſemita, uti ex ſequenti obſervatione liquebit, ſtellâ *c* inferior hac vice fuit, quæ priori illius applicatione ſuperior contigerat. *fig.* 24.

Ultima Maji, Saturnus ſtellam *c* jam præterierat; comes ad occaſum ſitus erat, ſed aliquanto propior quam die 27. *fig.* 25.

13 Jun. Ultima fuit ante occaſum Heliacum obſervatio, comes in maxima diſtantia cernebatur, Saturno occidentalior. *fig.* 26.

Saturnus brachiorum expers inventus.

Poſtquam ex radiis Solaribus Saturnus emerſiſſet Anno 1656. Jan. 16, hora 12, primùm à me obſervatus eſt, cum ad hoc uſque tempus peregre abfuiſſem. Inveni autem brachiis ſuis ſpoliatum penitus, & comitem ad orientem ſitum, in maxima fere diſtantia. *fig.* 27.

TAB. LI. fig. 4.

Rotundum autem Saturnum, ſub finem Novembris, aliqui jam obſervaverant; eâque formâ perſtitit uſque dum rurſum radios Solis ſubiret.

TAB. XLVIII. fig. 28.

19 Febr. tubo 23 pedum primùm uſus ſum, comitemque Saturno propinquum reperi, ubi priori teleſcopio ægre potuiſſet animadverti.

16 Martii, circa octavam adhuc propiorem Saturno comitem vidi, ad orientem ſpectantem, uti obſervatione ſuperiori. *fig.* 29.

30 Martii, hora 8, pari propinquitate, ſed ad alteram partem comes ſtabat. *fig.* 30.

18 Apr.

18 Apr. ad ortum ſitus erat comes in maxima diſtantia. *fig.* 31.

17 Jun. hora 9½ ultimò ea vice obſervatus fuit Saturnus, ſatellite verſus occidentem adſtante, & mediocriter remoto. *fig.* 32.

Hiſce autem obſervationibus omnibus quandiu Saturnus rotundus apparuit, tranſverſa illa linea, cæteris diſci partibus paulo obſcurior, ex æquo medium ejus diſcum ſecabat, eratque ad ſatellitem directa. Et hac quidem obſervatione 17 Junii habita, primùm animadverti motum Saturni, eum ſcilicet quo propter telluris vertiginem cum cælo pariter quotidie circumferri putatur, ſecundum eandem illam incedere lineam.

Brachia Saturno renata. TAB. LI. fig. 5.

Eodem Anno 1656, Octobris die 13, manè hora 6, rurſus Saturnus videri cœpit, cui jam brachia erant renata; ſerius quidem quàm in obſervatione edita prædixeram, verùm haud aliâ formâ, quæ nimirum eadem planè fuit atque anno præcedenti: licet melius nunc cujuſmodi eſſet diſcerneretur, ob adhibitos tubos præſtantiores.

Faſcia autem illa ſeu zona obſcurior, paulò inferior brachiorum linea nunc apparebat, cum anno 1655 ſuperior fuiſſet. Eratque Saturni motus, quo cum cælo corripi videtur, ſecundum hujus zonæ ductum, ac proinde ſecundum rectam quoque lineam per utraque brachia protenſam, ac ſemper poſtea quotquot obſervationibus idem inquirere libuit, eodem modo rem ſeſe habere comperi. Comes conſpici hac vice nequiit, forte an ob ingruentem Solis exortum, aëremque craſſiorem prope horizontem.

TAB. XLVIII. fig. 33.

Die autem 19 Oct. hora 6 mat. apparuit comes Saturno occidentalior, vix mediocri diſtantia abſiſtens, quæ diebus ſequentibus duobus aucta eſt continuè.

21 Oct. hora eâdem, erat comes in diſtantia maxima occidentali. *fig.* 34.

25 Oct. hora 6. mat. non apparuit comes.

9 Nov. hora 5½ mat. propinquus Saturno comes exiſtebat, occidentalis rurſum, ac lineâ anſarum paulo ſuperior. *fig.* 35.

26 Nov. hora 6½ mat. comes latuit. Brachia verò paulo la-

latiora evaſerant, & quà Saturno junguntur, minus intenſa luce quàm verſus extremas cuſpides lucebant, & hac fere ſpecie ad occaſum uſque Heliacum Saturnus permanſit.

27 Nov. hora 6 mat. ſatelles ægre conſpiciebatur, ad orientem ſitus, & brachiorum linea ſuperior. *fig.* 36.

16 Dec. 6 mat. videbatur ſatelles in maxima diſtantia orientali. *fig.* 37.

Anno 1657, 5 Jan. hora $12\frac{1}{2}$ comes latebat.

18 Jan. hora 12, erat in mediocri diſtantia, orientem ſpectans. *fig.* 38.

A Saturno autem polum verſus dimidio circiter gradu diſtabat fixa 3 magnitudinis, quæ eſt in ventre Leonis, longitudine reſpondens Virginis gr. 4. 5'. cum latit. borea gr. 2. 49'.

22 Martii hor. $7\frac{1}{2}$ veſp. comes in maxima diſtantia orientali, & anſarum linea paulo ſuperior; linea obſcura non ſatis erat conſpicua.

Scripſit mihi Hevelius ſe quoque pridie hujus diei comitem Saturni obſervaſſe ad orientem ſitum in maxima diſtantia, quod ſatis bene cum noſtra hac obſervatione convenit.

29 Martii hora $7\frac{1}{2}$ comes erat in mediocri diſtantia occidentem verſus, & in eadem cum brachiis recta. *fig.* 39.

30 Martii, comes in maxima diſtantia occidentali. *fig.* 40. Qua veſpera Hevelius quoque ad eandem partem ſibi conſpectum aſſerit, ſed difficulter, unde fortaſſe de diſtantia minus recte judicaverit, nam $1\frac{1}{2}$ ſcrupulo tantum abfuiſſe à Saturno ſcribit.

18 Maji, comitem mecum obſervavit Bullialdus occidentaliorem Saturno, & in mediocri diſtantia. *fig.* 41.

19 Maji, proximus Saturno adſtabat comes occidentem verſus, vix anſarum linea ſuperior. *fig.* 42.

Brachia Saturni in anſas mutari cœpta. TAB. XLIX. fig. 7.

Anno eodem 1657. 17 Dec. hora $5\frac{1}{2}$ manè, quo die primùm poſt ortum Heliacum Saturnum obſervavi, comes mediocriter diſtabat orientem verſus, eratque anſarum lineâ ſuperior. *fig.* 43. Brachia verò prope Saturni diſcum adaperta ac bifida inveniebam, qualia ante non videram, lineâ quoque obſcurâ verſus inferiora ulterius promotâ.

Et

Et hac quidem figurâ permansit, donec rursus radiis solis occultaretur.

18 Dec. comes erat in maxima distantia, orientem spectans, & in ipsa ansarum linea. *Tab.* XLVIII. *fig.* 44.

22 Dec. h. 6½ mat. comes non apparuit.

27 Dec. h. 6½ mat. comes occidentem versus in maxima fere distantia situs erat, & ansarum linea paulo altior. *fig.* 45.

Anno 1658. 24 Febr. h. 10, comes videri nequiit.

1 Mart. h. 10, idem comitis situs erat qui 27 Dec.

11 Martii, h. 10, comes difficile conspiciebatur, quippe propinquus admodum Saturno. Orientem spectabat, eratque ansarum linea aliquanto inferior, & quasi sub Saturno transiturus. *fig.* 46.

16 Mart. h. 10 quantum poterat à Saturno comes recesserat occidentem versus, vixque erat ansarum linea superior. *fig.* 47.

23 Martii, in contrariam partem pene tantundem distabat, lineâ ansarum rursus paulo superior. *fig.* 48.

3 Apr. paulo remotior erat à Saturno comes, quam 11 Martii, & occiduum latus tenebat, lineaque ansarum sublimior cernebatur. *fig.* 49.

Ansæ Saturni amplius patefactæ.

Anno eodem 1658. 10 Nov. hor. 6½ mat. postquam Heliace ortus esset Saturnus, jam latius aperiri ansæ videbantur, quanquam ob humilitatem sideris, surgentesque vapores, & auroræ claritatem non admodum distincte poterant discerni: comes occidentem versus adstabat, remotus ut cum maximè, ansarum linea nonnihil tamen superior. *fig.* 50.

16 Jan. anno 1659. hora 5½ mane, comes ad occidentem denuo situs erat, non longe à Saturno distans, linea autem ansarum integra fere Saturni diametro superior. *fig.* 51.

12 Febr. 6 mat. tantundem infra lineam ansarum descenderat, occidentalis rursus. *fig.* 52.

TAB. LI. fig. 6.

Forma verò ansarum distincte hac vice percipi potuit, quam figura hæc exhibet; atque ea ad ultimam usque harum observationum talis extitit.

24 Febr. hora dimidia post mediam noctem, comes erat in mediocri distantia, orientem versus, rectâ ansarum pau-

lo inferior. *Tab.* XLVIII. *fig.* 53.

25 Febr. horâ eadem orientalis denuo comes cernebatur, una Saturni diametro ab ipſo remotus. *fig.* 54.

Comes infra Saturnum tranſire viſus.

14 Martii, hora 12, comes rectà fere infra Saturnum obſervatus, unius circiter diametri longitudine diſtans; paulum tamen verſus occidentem declinabat. *fig.* 55.

16 Martii, hora 11, ad latus occiduum poſitus erat, fere in maxima diſtantia, inferiorque paulo eâ quæ per anſas ducitur. *fig.* 56.

Idem ſupra Saturnum tranſiens.

21 Martii, hora 11, rurſus ad eandem partem conſiſtebat comes, motu latitudinis integra Saturni diametro ſupra anſarum lineam elatus, longitudinis motu tantum dimidia diametro diſtans. *fig.* 57.

22 Martii, horæ quadrante ante undecimam; rurſus integra diametro ſuperior erat rectâ anſarum, ac fere ſupra orientalis anſæ extremam cuſpidem collocatus. *fig.* 58.

26 Martii, hora $10\frac{1}{2}$ comes in maxima diſtantia videbatur; quam accuratè hac vice dimenſus, inveni inter comitem centrumque Saturni intervallum trium ſcrupulorum primorum, 16 ſecundorum. *fig.* 59.

Hucuſque obſervationes, & plures quidem quam neceſſe fuerat, recenſui; rem gratam tamen iis me facturum ratus, qui triennio iſto ſimul forſitan mecum novo Planetæ obſervando vacaverint; quibus procul dubio jucundum erit conſenſum mutuum ſuarum cum noſtris obſervationibus deprehendere. Jam enim & Hevelius Gedani eum conſpicere ante biennium cœpit, ut ſupra quoque retuli, & in Anglia D. Paulus Nelius eques cum Clariſſimo Wrennio ipſo jam Anno 1655, ſibi animadverſum quandoque aſſerunt, nec tamen Planetam eſſe cognoviſſe donec à nobis eſſent admoniti. Nunc quo pacto periodum ejus inveſtigaverim, quæque porro ad illam pertinent expediam.

Lunæ Saturniæ periodus.

Penſitatis priorum aliquot menſium obſervationibus, cum circiter 16 dierum ſpatio Saturnum à Luna ſua ambiri compeviſſem; nam quo loco animadverſa fuerat 25 Mart. 1655, ad eum ſexto decimo inde die rediiſſe viſa eſt, 10 nimirum

Apr.

Apr. Itemque eodem anno die 3 & 19 Apr. idem situs fuerat deprehensus; nec non 13 & 29 ejusdem mensis. Hisce igitur animadversis, circulum descripsi orbitam comitis referentem, in cujus centro Saturnus esset, atque in partes 16 distribui, uti Schema subjectum exhibet. In eo comitem, secundum signorum ordinem, circumduxi; nulla tum quidem observatione ut ita statuerem cogente, sed quod in eam partem Luna quoque nostra & Jovis comites deferrentur. Postmodum autem stabilita hypothesi, qua phænomena ansarum explicantur, patuit recte ita hunc motum me constituisse. Porro in hoc circulo locum comitis quærendo quo in prima nostra observatione stetisset, sæpiusque eundem retractando, ut observationibus per id tempus habitis congruerent etiam reliqua loca in circulo comiti assignata; ita demum commodissimè representari omnia visum est, si prima observatione, nempe 25 Mart. 1655, ad numerum 12 comes reponeretur, 3 partibus cum dimidia, qualium 16 circumferentia continet à loco perigæo B remotus; nam diametrum AB ad visum nostrum vergere ponimus, & utrasque hujus epicyclii apsides determinare. Fuerit igitur 26 Mart. ad num. 13, Saturni comes: & 27 Mart. ad num. 14, & 3 Apr. ad num. 5, atque ita deinceps iis orbitæ locis quæ observatis primi anni exactè satis conveniunt, quanquam aliquid subinde addendum auferendumve 16 dierum periodo existimaverim. Cum autem scirem etiam orbitæ terrestris, qua nos circa Solem ferimur, ipsiusque Saturni motus rationem habendam esse, si accuratè comitis periodum definire vellem, proinde sequenti methodo eam deinceps investigavi.

TAB. LI. fig. 1.

Bina tempora quæsivi quibus in apogæo vel perigæo comes versatus esset; quorum alterum inveni 14 Martii, anno 1659, vesperi circa horam octavam. Quia enim hora noctis 12 tantum prætergressus erat locum perigæi quantum ex observatione illo tempore habita apparet, oportet eum circiter octavam in perigæo ipso fuisse. Alterum similem comitis situm colligo contigisse die 23 Martii, anno 1656, hora itidem octava post meridiem. Etenim quia die 16 & 30 ejusdem

Eadem periodus accuratius supputata.

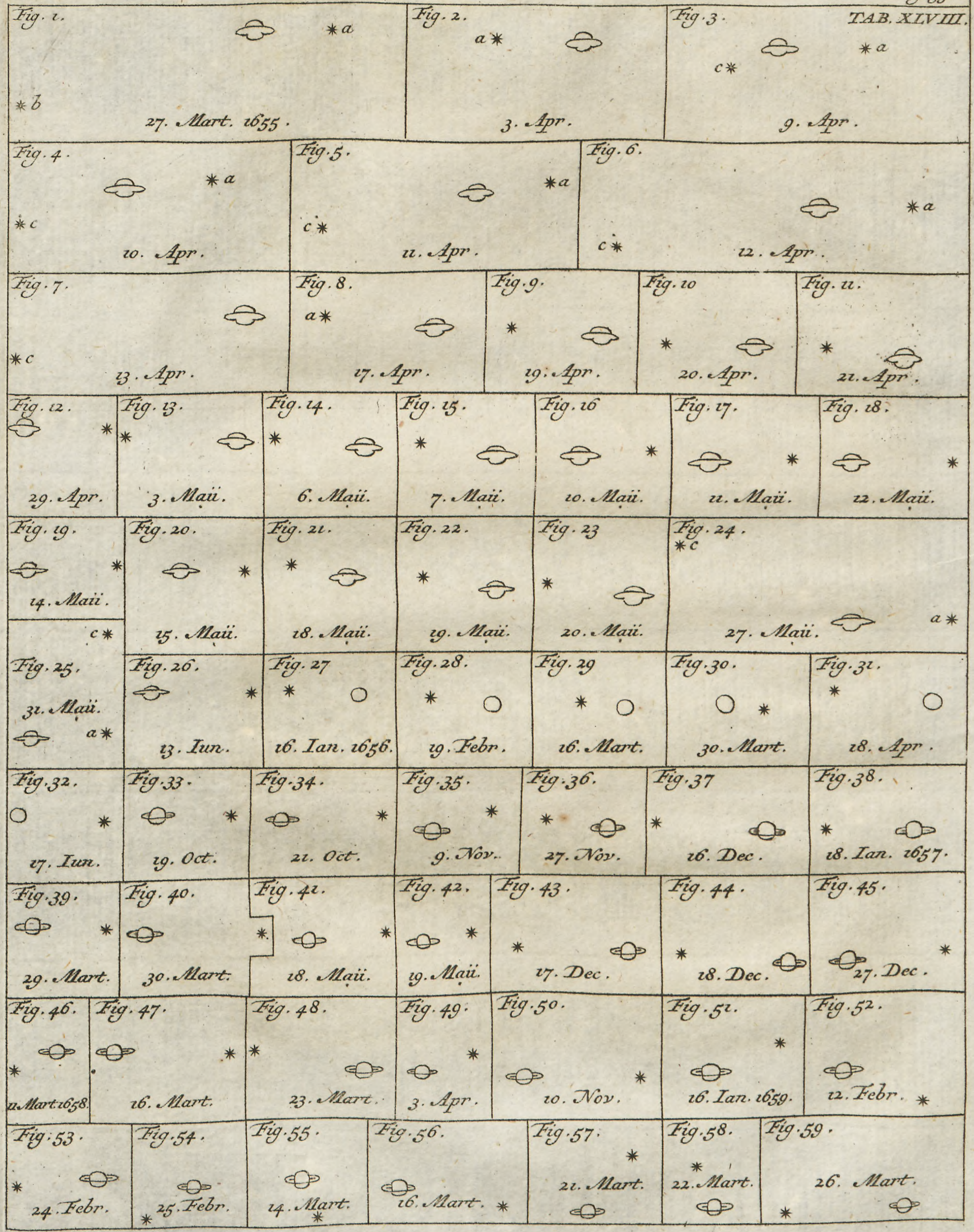
 dem

dem mensis hora 8 p. m. æquali spatio à Saturno remotus apparuit, quibus diebus circa partem suæ orbitæ superiorem versatum constat, sequitur 16 Martii medium locum eum tenuisse inter puncta 1 & 2 circuli modò descripti; 30 verò Martii medium fuisse inter puncta 15 & 16; quoniam 14 dierum intervallum est. Ac proinde necessario perigæus fuit die 23 Mart. post meridiem circa horam octavam.

TAB. XLIX. fig. 1. Cognitis hisce temporibus describo circulum A B C, qui Saturni orbitam designet, itemque G F orbitam Telluris, in cujus centro Sol. Saturni locum sumo ad diem 23 Martii 1656, hora 8 post mer. fuisse in A; quo tanquam centro describo comitis orbitam D E L; Tellurem vero eo tempore fuisse in G. Locus itaque comitis erat in D, ubi recta G A circulum comitis intersecat, siquidem perigæum fuisse constat. Rursus posito ad diem 14 Martii 1659 hora 8. post mer. loco Saturni in B, tellure vero in F; necesse est comitem fuisse in H, ubi recta F B secat circulum ejus N H K. Est autem temporis intervallum inter 23 Martii 1656, & 14 Martii 1659, dierum 1086, quibus Saturnus ab A progressus est ad B: Comitem vero spatio dierum 16 circuitum unum absolvere scio, atque insuper exiguum quid, quod in annis tribus circuitum integrum conficere nequeat. Quum igitur divisis diebus 1086 per 16 fiant 67, atque aliquot dies abundent, apparet 68 circuitus integros nostri respectu comitem peregisse, quia in H rursus perigæus fuit. Sit B K parallela A G. Si igitur 14 Mart. 1659, comes non in H sed in K positus fuisset; sequeretur eum hisce 1086 diebus sexagies octies orbitam suam decurrisse fixarum respectu, hoc est, totidem menses periodicos, sive sidereos potius, Saturni incolis præbuisse. Nam quando rectæ A D, B K secundum quas ex Saturno comes prospicitur, inter se parallelæ sunt, eundem inter fixas locum illis obtinere cernitur. Nunc verò insuper arcum K H emensus est, qui totidem est graduum quot apparenti motu Saturnus inter prædicta duo tempora transivit; quoniam angulus H B K æqualis est ei quem constituunt rectæ F B, G A, motus apparentis indi-

ces;

TAB. XLVIII.


Fig. 1. a b 27. Mart. 1655.
Fig. 2. a 3. Apr.
Fig. 3. a c 9. Apr.
Fig. 4. a c 10. Apr.
Fig. 5. a c 11. Apr.
Fig. 6. a c 12. Apr.
Fig. 7. c 13. Apr.
Fig. 8. a 17. Apr.
Fig. 9. 19. Apr.
Fig. 10 20. Apr.
Fig. 11. 21. Apr.
Fig. 12. 29. Apr.
Fig. 13. 3. Maii.
Fig. 14. 6. Maii.
Fig. 15. 7. Maii.
Fig. 16 10. Maii.
Fig. 17. 11. Maii.
Fig. 18. 12. Maii.
Fig. 19. 14. Maii.
Fig. 20. 15. Maii.
Fig. 21. 18. Maii.
Fig. 22. 19. Maii.
Fig. 23 20. Maii.
Fig. 24. c a 27. Maii.
Fig. 25. c a 31. Maii.
Fig. 26. 13. Iun.
Fig. 27 16. Ian. 1656.
Fig. 28. 19. Febr.
Fig. 29 16. Mart.
Fig. 30. 30. Mart.
Fig. 31. 18. Apr.
Fig. 32. 17. Iun.
Fig. 33. 19. Oct.
Fig. 34. 21. Oct.
Fig. 35. 9. Nov.
Fig. 36. 27. Nov.
Fig. 37 16. Dec.
Fig. 38. 18. Ian. 1657.
Fig. 39. 29. Mart.
Fig. 40. 30. Mart.
Fig. 41. 18. Maii.
Fig. 42. 19. Maii.
Fig. 43. 17. Dec.
Fig. 44. 18. Dec.
Fig. 45. 27. Dec.
Fig. 46. 11. Mart. 1658.
Fig. 47. 16. Mart.
Fig. 48. 23. Mart.
Fig. 49. 3. Apr.
Fig. 50. 10. Nov.
Fig. 51. 16. Ian. 1659.
Fig. 52. 12. Febr.
Fig. 53. 24. Febr.
Fig. 54. 25. Febr.
Fig. 55. 14. Mart.
Fig. 56. 16. Mart.
Fig. 57. 21. Mart.
Fig. 58. 22. Mart.
Fig. 59. 26. Mart.

ces; isque motus ex Ephemeridibus invenitur fuisse gr. 40, 48'. Sic itaque colligo; si diebus 1086 absolvit periodos 68, atque insuper gr. 40, 48', hoc est gr. 24520, 48', quantum ergo die una? Prodeuntque gr. 22, 34', 44'', qui motus comitis diurnus est respectu fixarum. Ad mensis siderei longitudinem inveniendam ita calculum instituo; si gr. 24520, 48' percurrit diebus 1086, quot dies impendet gradibus 360? fiunt dies 15, horæ 22, scr. 39. spatium quo ad eandem fixam Saturni incolis Luna sua revertitur.

Deinde medium motum diurnum à sole (qui minor est motu quo respectu fixarum comes progreditur, ut in nostra quoque Luna evenire novimus) ita reperio; Saturni motum medium diurnum qui 2 est minutorum, aufero ab invento motu diurno respectu fixarum gr. 22, 34', 44''. unde supersunt gr. 22, 32', 44'', diurnus motus à Sole. Atque hinc facile quoque mensis Synodici Saturnicolarum media longitudo computatur. Nempe si gr. 22, 32', 44'', uno die percurruntur, quot igitur diebus gr. 360? Fiuntque dies 15, horæ 23, scr. 13. Reliquis duntaxat 47 scrupulis ad dies 16. Atque illud etiam medium tempus est quo nostri respectu ad apogæum suum Saturni comes revertitur, sive intra quod cum Saturno bis conjungitur.

Mensis Saturnicolarum vera longitudo.

Cæterum quia ex motu comitis illud præcipue investigari meretur, quo pacto ad datum quodvis tempus situs ejus apud Saturnum exhiberi possit; ostendemus nunc brevissimam ad hoc calculi rationem, sequentium tabularum ope absolvendam; in quibus motum comitis æqualem qualis ex Saturno fixarum respectu appareret, proponimus. Hunc autem diurnum adsumsimus gr. 22, 34', 44'', sicut modo inventus fuit. Etsi enim expertus sum, iterato eodem examine adhibitisque aliis duobus temporibus quibus comes fuit apogæus aut perigæus, aliquot secundis scrupulis majorem interdum minoremve eundem motum reperiri, istum tamen medium quodammodo inter alios retineri posse ratus sum, post plures abhinc elapsos annos facile emendandum. Nam & inæqualitas puto aliqua, & eccentricitas, quemadmodum in Luna nostra, ita circa hanc quoque, diligenti observatione olim deprehendi poterit.

Tabula motus æqualis Lunæ Saturniæ in orbita sua respectu fixarum.

In Annis Julianis.

	Gr.	Min.
1	321	18
2	282	35
3	243	53
4	227	45
5	189	3
6	150	21
7	111	38
8	95	31
9	56	48
10	18	6
11	339	24
12	323	16
13	284	34
14	245	51
15	207	9
16	191	2
17	152	19
18	113	37
19	74	55
20	58	47

In Diebus.

	Gr.	Min.
1	22	35
2	45	9
3	67	44
4	90	19
5	112	54
6	135	28
7	158	3
8	180	38
9	203	13
10	225	47
11	248	22
12	270	57
13	293	32
14	316	6
15	338	41
16	1	16
17	23	50
18	46	25
19	69	0
20	91	35
21	114	9
22	136	4
23	159	19
24	181	54
25	204	28
26	227	3
27	249	38
28	272	13
29	294	47
30	317	22

In Horis.

	Gr.	Mi.
1	0	56
2	1	53
3	2	49
4	3	46
5	4	42
6	5	39
7	6	35
8	7	32
9	8	28
10	9	24
11	10	21
12	11	17
13	12	14
14	13	10
15	14	7
16	15	3
17	16	0
18	16	56
19	17	52
20	18	49
21	19	45
22	20	42
23	21	38
24	22	35

Primo Jan. anno 1653, meridie, distantia Lunæ Saturniæ ab apogæo erat gr. 274. 21′. Saturni locus apparens, eodem tempore in ♌ gr. 11. 41.

In Mensibus anni Juliani ineuntibus.

Janu.	0	0
Febr.	339	57
Mart.	252	9
April	232	6
Maji	189	28
Junii	169	25
Julii	126	47
Aug.	106	43
Sept.	86	40
Octo.	44	2
Nov.	23	59
Dec.	341	21

Si fuerit datus annus intercalaris, post Februarium unus dies, eoque & unius diei motus addendus est.

Harum tabularum auxilio primùm Epocham, quæ præcederet omnes obſervationes noſtras, conſtitui diem 1 Jan. meridie, anno 1653. Nempe ex eo, quod 14 Martii, 1659, hora 8 pom. in perigæo Saturni Luna verſaretur, collegi retrorſum numerando, ad prædictam diem 1 Jan. 1653, abfuiſſe illam ab apogæi loco gr. 274, 21′. Jam vero ut ad quodlibet datum tempus, epocha poſterius, inveniatur ejus ab apogæo diſtantia, (namque hinc facile deinde perſpicere eſt quam propinqua Saturno apparitura ſit) *addendus eſt ad motum Epochæ, motus comitis uſque ad tempus datum, ex tabulis collectus; hinc auferendus Saturni motus apparens per idem temporis intervallum, qui ex Ephemeridibus cognoſcitur; reliquum erit diſtantia comitis ab apogæo quæſita.* Ut ſi datum fuerit tempus dies 25 Martii, anno 1655, hora 8 pom. quæ prima noſtra fuit obſervatio: Motus Epochæ, ſive diſtantia Lunæ Saturniæ ab apogæo tempore Epochæ, quæ eſt gr. 274, 21′, addita ad motum ejuſdem Lunæ inde ab Epocha ad tempus datum, colligit gr. 278, 31′; Hinc ablato Saturni motu apparente per idem tempus, qui invenitur gr. 22, 58′, relinquuntur gr. 255, 33′, diſtantia Lunæ Saturni ab apogæo, quæ invenienda erat. Unde apparet in circulo (Tab. LI. fig. 3.), ubi A apogæi locum referebat, fere ad numerum 12 illam conſtitiſſe, eoque in maxima propemodum diſtantia viſam, uti revera contigit. Calculum autem ſubjicimus qui ſic ordinatur.

Locus Lunæ Saturniæ quomodo ſupputetur.

Gra-

	Gra.	Mi.		G. M.
Motus Epochæ,	274	21	♄ Locus app. 25 Mart. 1655,	4 39 ♍
Anni 2	282	35		
Martii 1	252	9	♄ Locus app. tempore Epochæ,	11 41 ♌
Dies 24	181	54		
Horæ 8	7	32	Restat ♄ motus apparens,	22 58
Summa	278	31		
Motus Saturni apparens	22	58		
Reliquum	255	33	distantia Lunæ Saturni ab apogæo.	

Ejus calculi comprobatio. TAB. XLIX. *fig. 1.*

Ut verò constet methodi ratio, intelligatur in superiori diagrammate, Saturnus die 1 Jan. 1653 positus fuisse in A, terra in G, Luna Saturni in E, gradibus 274, 21′ ab apogæo L. Rursumque 25 Martii 1655, Saturnus ponatur in B, terra in F, Luna Saturni in M: sitque BN parallela AL. Quoniam igitur Lunæ motus periodicus inter bina illa tempora, additus motui Epochæ, hoc est, arcui LDE graduum 274, 21′, efficit gr. 278, 31′; erit idcirco arcus NKM hoc graduum numero. Distantia autem Lunæ Saturniæ ab apogæo est arcus OKM, qui ut cognoscatur, auferendus est ab arcu NKM arcus NO. Ergo cum arcus NO totidem sit graduum atque angulus quem constituunt rectæ OF, LG; hujus autem quantitas definiatur apparenti Saturni motu inter duo prædicta tempora; apparet nos rectè ab inventis gr. 278, 31′, hoc est ab arcu NKM, subtraxisse Saturni motum apparentem gr. 22, 58′ (quippe æqualem arcui NO) ad consequendum arcum OKM, gr. 255, 33′, distantiam nempe Lunæ Saturni ab apogæo.

Nondum hic locus est explicandi alium quendam hujus lunulæ motum in latitudinem, observationibus aliquot præcedentibus jam sese prodere incipientem; quo nempe ab linea recta per ansarum extrema transeunte plerumque exorbitat, apparetque circa Saturnum ellipsin percurerre, interdum quidem satis latam, alias verò angustiorem, & rotundo

do Saturno lucente, in rectam lineam abeuntem. Etsi enim, ad verum lunulæ situm respectu Saturni determinandum, hujus quoque motus ratio est habenda, cum tamen causæ ejus cum cæterorum phænomenôn causis prorsus conjunctæ sint, simul cum illis atque una opera exponendum censeo.

Illam igitur Systematis hujus partem alteram nunc aggredior, in qua formæ Saturni instabilis atque à se ipsa discrepantis ratio reddenda, tum qua periodo singulæ mutationes contingant dicendum est. Harum aliquas quæ nobis sese obtulere supra exhibui; sed eæ partem tantummodo periodi complectuntur. Ideoque ut omnem phænomenôn diversitatem ab iis quas dicemus causis pendere constet, aliorum quoque temporum observationes examinare necesse erit, quas à 40 atque amplius annis complures scriptis prodiderunt. At verò cum Saturni figuras omnes quas nobis delinearunt oculis lustro, eas multiplices adeo ac prodigiosas invenio, ut si qua hypothesis comminiscenda foret quâ cunctis fieret satis, nemo non, ut opinor, in ea excogitanda operam lusurus sit: cum nulla tam crebræ atque enormis transformationis causa esse possit, nisi ponatur ipsam Saturnii corporis molem identidem aliam atque aliam faciem induere, quod ab omni verisimilitudine est alienum. Quamobrem delectus adhibendus est observatis illorum, & inquirendum quænam ex iis fidem mereantur, quæve contra ut suspecta rejicienda sint. Quo in examine illud concedi nobis postulamus, ut quoniam Saturni comitem primi perspicillis nostris deteximus, ac quoties libet clarè intuemur, præferantur propterea nostra hæc illis quibus alii ad stellam eandem nequaquam pertingere potuere, licet quotidie Saturno observando intenti: eoque nostræ etiam circa formam planetæ observationes veriores habeantur, quoties eodem tempore nobis atque illis diversæ phases animadversæ fuerint. Adjuncta itaque tabella omnes eas exhibet quas ex variis autoribus descripsimus. TAB. LII.

Hæ singulæ examinantur.

Ac prima quidem harum formarum est quam Galilæus ad-

TAB. LII. fig. 1. notavit anno 1610, in qua triceps Saturnus ſpectatur, minoribus duobus orbiculis majori utrinque adjacentibus. Hanc alii quoque permulti viderunt, aut certè ſe vidiſſe crediderunt. Nam ſi grandiores tubos adhibuiſſent atque optimis vitris inſtructos, haud dubiè pro triplici hac globulorum facie eadem ſeſe illis obtuliſſet quam nobis diximus anno 1655, ac rurſus anno inſequenti, die 13 Oct. viſam. Hoc enim inde colligimus quod dum illis bini ad latera globuli apparent, nobis porrecta in longitudinem brachia tubi noſtri referunt; uti contigit eo ipſo anno 1655, menſe Aprili ac Majo, quo tempore triſphærica illa figura Ricciolo Hevelioque obſervata fuit. Etenim quo certius conſtet ob perſpicillorum parvitatem talem hanc cerni, experimur nobis quoque, quoties breviori perſpicillo, quinûm puta aut ſenûm pedum, Saturnum aſpicimus, binos globulos dictorum loco brachiorum apparere; etiam illâ anni 1658 jam exiſtente phaſi.

Quænam autem fallacis imaginis cauſa ſit facile perſpicitur. Quippe enim quum circa extremas cuſpides ampliorem lucem brachia hæc ſive alæ emittant, quam qua parte medio Saturni diſco adhærent, ubi ſemper umbræ aliquid intercedit, non modo cum manifeſto jam bifida evaſerunt, velut anno 1658, ſed antea quoque ut anno 1657; non mirum eſt lucem illam intenſiorem, debiliori interjecta, penitus à medio orbe ſeparatam videri. Neque item rotundam ex oblonga fieri mirandum eſt, cum idem accidat omni figuræ eminus, nec ſatis diſtinctè ob exilitatem, perceptæ, atque eo magis quo fuerit lucidior. Itaque plane conſtat teleſcopiorum culpa phaſin hanc vitiatam eſſe, licet obſervatores bona fide eam tradiderint.

TAB. LII. fig. 2. Quæ ſequitur hanc nihilo melius ſe habet, à Scheinero obſervata anno 1614. Atque equidem dubito, perfectioribuſne an deterioribus perſpicillis, quam qui præcedentem dederunt, hanc deprehenderit. Quoniam hactenus quidem ad veram magis accedit, quod affixas Saturno auriculas exhibet; at contra in eo aberrat, quod plus juſto earum contra-

trahat longitudinem. Hæc autem phasis tum sibi ipsi tum superiori fidem derogat, alterutram certe haud veram fuisse arguit; quoniam eodem tempore, anno nimirum 1614, altera à Scheinero, altera à Galilæo aliisque observata perhibetur. Ut proinde dubitandum non sit, quin & hæc similis extiterit ei quam nos anno 1657 vel 1658 in commentaria retulimus. Neque aliud de tertia hujus tabellæ existimandum est, quæ Ricciolo secunda ponitur, quamque anno 1640 & 1643 observatam scribit. Veritati tamen propior hæc videri potest, quod pro orbiculis oblongas atque olivæ similes figuras habeat. TAB. XLII. fig. 3.

Quarta est quam in locum trisphæricæ formæ Hevelius adsumsit in libro *de Saturni nativa facie*; ubi secundum leges hypotheseos suæ asserit talem quandoque cerni debere, quæ tamen ex visus hallucinatione in trisphæricam degeneret. Quanquam mihi ne istiusmodi quidem forma satis convenire hypothesi illius videatur, ut postea ostendemus. fig. 4.

Ejusdem Hevelii etiam quinta est, cui similem Gassendus edidit. Et hæc quidem satis prope cum nostra illa anni 1658 consentit, nisi quod partes brachiorum tenuiores, qua medio disco adnectuntur utriusque tubi non sint assecuti. fig. 5.

Idemque in 6 & 7 contigit, quæ ambæ ab Hevelio quoque traduntur, similes iis quas circa eadem tempora Ricciolus observavit, nimirum anno 1648, 1649 & 1650, quæ hic octavo nonoque loco exhibentur. Neque alia re differunt, quàm quod medius orbis Hevelio nonnihil oblongus apparuit, cum Ricciolo rotundus fuerit: quodque hic connexas ansas cum inter se tum Saturno ipsi spectaverit, quæ Hevelio pauxillo à contactu abesse visæ sint. Verum ipse Hevelius causam cur separatæ videantur visus imbecillitati adscribit, cum alioqui reipsa cohærere eas Saturno statuat. fig. 6. 7. fig. 8. 9.

Tales autem & Eustachius de Divinis notavit anno 1646, 1647 & 1648, à quo editum schema ad num. 10 hic exhibuimus. Isque cum præstantissimus perspicillorum artifex habeatur, credibile est omnium emendatissimè nativam Saturni faciem nobis descripsisse, nisi quod umbras illas quæ in fig. 10.

ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.

TAB. LII. fig. 11.

Porro ab hiſce figuris non multum recedit ea quæ à Fr. Fontana vulgata fuit, undecima tabellæ noſtræ. Quam quidem & Ricciolus anno 1646 ſibi viſam ſcribit. Sed minus bonis teleſcopiis tunc uſum crediderim, quam quibus modo dictas octavam nonamque detexit. Siquidem eodem anno 1646 ſeptimam formam ſe vidiſſe teſtatur Hevelius, cui potius hic ſtandum eſt. Nam Fontanæ obſervationes quominus in dubium vocare verear facit, quod etiam olim magis monſtroſas formas Martis publicavit, veluti trilateræ cujuſdam rupis, ac rurſus aliter cum nigra in medio orbe macula; quæ nos cum aliis multis fabuloſa comperimus. Hæc tamen, quam in Saturno prodidit formæ diverſitatem, neque magna eſt, ut dixi, neque miranda.

fig. 12. 13.

Plus negotii poſteriores duæ, duodecima decimatertiaque, exhibituræ videntur: quarum priorem præter Blancanum etiam Gaſſendus prodidit; reliquam Ricciolus, aliunde tamen acceptam, nobis impertiit. Mirabilis præſertim illa Gaſſendi apparet. Verumtamen ſi bene perpendatur, facile eſt intelligere, quo pacto ab nona figura hæc defluxerit. Nam ſi tantum in locum rotundarum lacunarum, lunatæ ſubſtituantur, cornibus ſeſe mutuo reſpicientibus, jam profecto nona illa exiſtet, quam Ricciolus adnotavit. Nihil mirum autem Gaſſendo ac Blancano, cum non magnis perſpicillis uterentur, rotundas potius eas maculas quam lunularum forma apparuiſſe, ſiquidem partes harum acuminatas diſtinctè percipere illis negatum fuit. Tertiadecima denique quam Ricciolus à Fontana, itemque ab aliis Romæ viſam memorat, anno 1644 & 1645: eam quoque pro octava ac nona ſuppoſitam eſſe certum eſt, vel etiam pro ſeptima quam Hevelius prodidit. Non ſolum enim Ricciolus hanc ſibi unquam oblatam negat, ſolas octavam, nonamque cum anſis ſe vidiſſe affirmans: ſed & eodem anno 1645 Heveliano teleſcopio ſeptima illa conſpecta fuit. Nempe anſas Saturno conjungi rectè hîc Fontana animadvertit; ſed cum præcipuus earum ſplendor à parte gibba procederet, orbicularem ibi figuram conſtituere viſus eſt.

Non

Non adscripsi phasibus hisce eam qua Saturnus ellipsis formâ conspectus dicitur, absque illis comitibus brachiisve; quoniam satis constat ob exilitatem telescopiorum, in ipso inventi hujus exortu, talem apparuisse; postquam verò ad majorem perfectionem eadem adducta sint, neminem amplius solitarium Saturnum vidisse nisi simul & rotundus fuerit.

Non esse alteram ansarum quandoque altera minorem.

Omisi etiam phænomenon aliud à nonnullis quidem relatum, sed vanum proculdubio atque à sola imaginatione profectum: quo nempe alterum quandoque Saturni sive comitem sive ansam altera minorem deprehendi asserunt. Ego vero existimo non tam ab indiscreta perceptione phasin hanc enasci (cur enim hanc ansam potius quam illam minorem dicerent?) quam quod ubi hypothesin quispiam commentus fuerit, ex qua talem prodire necesse sit, facile sibi ipsi imponat, quodque cupit evenire credat. Itàque viro eximio J. Hodiernæ qui ad nos è Sicilia Systema suum Saturnium, de quo pluribus mox agemus, misit, accidisse reor. Hic enim anno 1655 & sub finem anni insequentis, orientalem globulum reliquo minorem sibi apparuisse scribit, quum tamen eodem tempore, nobis inspectantibus, eadem utrique magnitudo, claritas ac figura adfuerit, non quidem orbicularis, sed rectà in longitudinem utrinque à Saturni disco procedens. Quin etiam frustra causam hujusce rei ex hypothesi sua adducere Hevelius laborat, quum planè contrarium ex ea sequatur, perpetua videlicet utriusque ansæ æqualitas. Nam cum faciem Saturni nativam ejusmodi fingat, qualis superiori tabella ad numerum septimum exhibetur, utrâque scilicet ansâ pari formâ ac magnitudine corpori medio adnexâ, non sinunt ullæ opticorum leges, ut qualicunque hujus corporis conversione, aliter una atque alia ansa sese videndam nobis præbeat. Nobis, inquam, in tam immensa positis distantia. Cum enim 3000 fere diametris Saturni maximis ab eo remoti simus, quo pacto existimat vir Clar. nos percepturos discrimen angulorum quibus propior remotiorque ansa spectari debeat?

TAB. LII. fig. 7.

Non etiam unam quam

Æquè parum rationi consentaneum est quod, ob eandem il-

alteram citius ad medium Saturni corpus applicari.

illam diſtantiæ differentiam, unam anſarum citius quam alteram cum medio diſco coaleſcere poſſe exiſtimat. Hoc enim, admiſſa licet Heveliana hypotheſi, atque etiamſi centuplo præſtantiores tubos haberemus, nequaquam tamen nobis viſu deprehendere liceret. Cæterum & hujus ſententiam viri ſolertiſſimi, quo certè nemo hac tempeſtate majori animo atque induſtria rem promovet Aſtronomicam, pluribus exponere, & aliorum inſuper de propria Saturni forma opiniones, priuſquam noſtram adferamus, recenſere placet, quas poſt editam de Luna Saturni obſervationem omnes accepimus. Hevelius igitur, in eo libro quem peculiarem huic argumento dicavit, cauſas phænomenôn redditurus, ſphæroidis oblongi figuram medio corpori Saturni tribuit, cui ab utroque latere appendices iſtæ, ut jam dixi, brachiorum ſive anſarum forma, firmiter adhæreant, quemadmodum ſupra 7 loco expreſſimus. Porro ſimul cum Saturno haſce anſas, ſpatio 30 circiter annorum, circa minorem ſphæroidis axem converti facit, qui quidem axis plano orbitæ Saturni ſit ad angulos rectos. Enimverò his poſitis ſeptimæ quidem ſuperioris figuræ phaſin nec non rotundam quoque repræſentari certum eſt: ut nimirum in duobus eclipticæ locis oppoſitis anſata hac facie Saturnus appariturus ſit, aliiſque rurſus duobus rotundus anſiſque prorſus exutus. Quinimo & ſexta ac quodammodo quinta quoque exhiberi poſſent, niſi quod conjunctæ cum medio diſco anſæ videri debebant. Sed quarta phaſis nequaquam ab eadem forma proficiſci poterit. Nam cum ponatur Saturnus cum annexis ſibi anſis, qualem 7 figura oſtendit, rectus conſiſtere ad planum eccentrici ſui, atque ita perpetuo manere, licet circa axem proprium vertatur; eveniet quidem ea converſione, ut paulatim arctius ad medium orbem anſæ applicentur, veruntamen ſemper geminas lunas referent ejuſdem cum dicto orbe altitudinis, minimeque in tam compreſſas formas abibunt. Nam quod hoc efficere poſſe declinationem Saturni orbitæ ab ecliptica Vir Cl. cenſet (ita enim mihi reſpondit cum difficultatem hanc ei moviſſem) ſi diligentius rem expendat in-

Hevelii hypotheſis circa anſas Saturni examinatur.

TAB. LII. fig. 7.

intelliget fieri non posse, cum Saturni orbita tantum 3 gradibus ab eclipticæ plano recedat, ut inde ansarum figuris ulla nobis percipienda mutatio adveniat. Cæterum nec veram quidem esse hanc quartam phasin superius indicavimus, sed cum hæc, sive trisphærica potius, minoribus telescopiis cernitur, nostris prægrandibus illam comparere quam adnotavimus anno 1655 & 1657. Quæ cum adhuc minus Hevelianæ hypothesi conveniat, clarius demonstrat illam scopum non attigisse. Neque sanè vel rotundæ phasis phænomena satis congruunt præstitutis ab Hevelio limitibus; ut patet non tantum ex prædictione ejus, eventu refutata, quæ ferebat rotundam phasin anni 1656 continuatum iri usque in Mensem Septembrem anni 1657, cum tamen jam inde à 13 Oct. 1656, ansas Saturnus recuperaverit, neque postea amiserit; sed & ex Galilæi observatis circa rotundam phasin anni 1612. Solstitio enim hujus anni, Saturnus gr. 18, 22'. ♓ obtinens, tricorpor adhuc Galilæo apparuit, quum per tabulas Hevelii debuisset rotundus observari, ac vicissim 1 Dec. ejusdem anni 1612, cum versaretur in gr. 11, 27'. ♓ rotundus Galilæo repertus est, quo loco Hevelius trisphæricum expectasset.

Causæ phænomenon Saturni à Robervallio excogitatæ.

Alteram hypothesin, ingenio suo acutissimo dignam, summus Geometra E. Robervallius nobis exposuit. Qua quidem Saturnum perinde ut cæteros planetas rotundum statuit; egredi autem è Zona ejus torrida, hoc est, quæ rectiores solis radios excipit, vapores quosdam non admodum spissos, qui procul à superficie ejus in sublime evolantes, undique illum ambiant, præterquam polos versus, ubi fortassis intensum frigus eos à sole attrahi prohibeat. Hi si quando omne spatium complent à Saturno ad usque extremam ipsorum regionem, elliptica forma, inquit, eum videri faciunt. Cum vero minus densi exoriuntur, interque eos ac Saturnum locus ingens medius relinquitur, ob tenuitatem solares radios non reflectunt, nisi inde ubi magis conferti iisdem opponuntur; quod nostri respectu necesse est fieri in partibus à medio disco Saturni remotioribus. Ubi pro-

proinde ansarum formam ex ea reflexione produci oportet, illasque inter ac Saturnum spatia utrinque obscura vel certè minus lucida intercedere. At quoties nullæ prorsus hujusmodi exhalationes ascendunt, rotundus planeta spectabitur.

Equidem rectè hoc consideravit vir sagacissimus esse aliquid quod æqualiter undique Saturnum circumdaret; suadente scilicet periodo Lunæ Saturniæ dierum 16, etiam ipsum circa axem suum, & breviori tempore, conversiones facere; ex quibus conversionibus intra paucos dies diversas phases nasci oporteret, nisi undique eodem modo materia quædam circumposita esset. Nec dissimili collectione usi fueramus dum nostrum Systema effingeremus, ut postea dicetur. Verumtamen ex illa sua hypothesi neque phasis nostra anni 1655 & 1657, satis commodè exponitur, neque certis Saturni orbitæ locis phases quæque peculiares sunt, quod tamen ita se habere observationes omnes evincunt, & rotundi Saturni inprimis. Hæ enim in duobus oppositis Eclipticæ locis accidere animadversæ sunt, contraque in iis qui quadrante hinc distant, ansæ quam maximè expansæ: cum tamen causa non appareat cur aliis quidem orbitæ partibus nullos vapores Sol è Saturno, aliis maximam eorum copiam extracturus sit. Deinde vapores isti, nescio quam bene, at multum certè dissimiles nostris hisce qui terram ambiunt ponuntur, tum quod immenso spatio, prout hi solent, à Saturno ascendant, tum quod versus polos paucissimi aut nulli sint, cum circa terræ polos plures contra atque altiores existant quam circa Zonam torridam. De elliptica autem forma Saturni diximus supra, eam revera nunquam talem cerni, ut proinde causam ejus adferre superfluum fuerit.

Hodiernæ Siculi circa eadem phænomena opinio.

Nunc verò tuam quoque Hodierna doctissime sententiam excutiamus, quam novo nuncio meo de Saturni Luna & promisso Systemate excitatus, subito publicam fecisti. Meretur tuus ille in hæc studia non vulgaris amor, ut melioris notæ telescopia tibi suppeditentur, qui qualibuscunque etiam instructus, non cessas in cælum quà licet eniti, summum-

numque illum planetarum, formarum varietate omnes frustrantem, certis legibus astringere aggressus es. At ille te quoque ut opinor delusit. Nam si posthac ea facie se tibi offerat, qua mihi anno 1655 & 1657 apparuit, vel ea quoque quæ successit anno 1658, cognosces utique has non quadrare illi quod tibi finxisti corpori. Sphæroidi nimirum, cujusmodi aut ovum aut prunum est, sed magis etiam oblongo quam Hevelianum illud, similem Saturnum imaginaris; in quo binæ utrinque sint maculæ lucis expertes, quales in tabula superiori phasis octava exhibet, quæ nobis interstitia illa inter ansas Saturni mediumque ejus discum referant. Inde conversiones hujus corporis circa axem, eadem periodo qua & Hevelius, definis; & rotundum tunc videri asseris, cum longior sphæroidis axis ad nos dirigitur, ideoque bis hoc accidere annorum 30 decursu. Verùm enim cum prorsus rotundus ac orbe integro lucens appareat Saturnus, quoties brachiis suis nudatus est, expendendum tibi amplius relinquo, qua ratione lacunas quasdam expleas quas à maculis illis nigris superfuturas rectè ipse prævidisti. Præterea & phases illas te considerare velim quas hæc tua hypothesis non potest non producere, nec à quoquam tamen observatæ perhibentur. Quas ut facilius omnes coram inspicias, ovum aut aliud quod eam formam habeat, istis maculis ornatum, tibi proponito, atque ita ut Saturnum converti vis circumducito; videbis non pauca in tuo hoc Saturno phænomena quæ cælestis Saturnus nunquam exhibuit, atque alia rursus, quæ inesse huic certo tibi affirmare audeo, non videbis, ipséque de Systemate tuo statues.

TAB. XLIX. fig. 6. 7.

TAB. LII. fig. 8.

Quod autem rei veritatem neque tu neque illi viri egregii, quorum antea opiniones recensui, assecuti sitis, minimè mirandum est, aut vobis imputandum, utpote ad quos falsa plurima pro veris phænomenis delata sint; alia vero quæ de Saturno citra visus fallaciam observantur, non pervenerint. Quæ si nobiscum aspicere vobis contigisset, eadem inde quæ nos de nativa Planetæ forma collecturos fuisse credibile est. Me vero præter phases illas synceriores, etiam Lunæ Satur-

niæ motus jam inde à principio animadverſus, non parum hîc adjuvit; ſiquidem ex hujus circa Saturnum gyratione, prima mihi ſpes de conſtituenda hypotheſi affulſit. Quæ cujuſmodi ſit deinceps explicare aggredior.

Noſtra hypotheſis qua ratione excogitata.

Quum ergo 16 dierum periodo circumferri Saturno planetam novum comperiſſem, haud dubiè minori etiam temporis ſpatio Saturnum in ſeſe ſuper axem ſuum revolvi arbitratus ſum. Namque antea quoque, in eo cum Tellure hac noſtra cæteris primariis Planetis convenire, ſemper credidi, quod ſinguli in ſe ipſis rotentur, atque ita tota eorum ſuperficies lumine ſolis per vices gaudeat. Quin imo in univerſum ita cum magnis Mundi corporibus comparatum eſſe, ut illa quibus alia minora circumferuntur, ipſa quoque in medio poſita minori tempore circumeant. Ita enim Solem diebus 26 circiter in ſe redire maculæ ejus declarant: circa Solem vero Planetarum ſinguli, inter quos Tellus quoque reponenda eſt, prout quiſque remotior eſt ita tardius curſum conficiunt. Rurſus Tellus hæc diurno ſpatio gyratur, quam Luna menſtruo motu ambit. Jovis autem Planetam quatuor minores, hoc eſt, totidem Lunæ circumſtant, eâdem hac lege, ut propiores quæ ſunt, celeriore curſu ferantur. Unde Jupiter quidem breviori forſitan tempore quam 24 horarum converti cenſendus eſt, cum citima ei lunularum minus biduo impendat. Quæ omnia cum pridem cognoviſſem, Saturno quoque jam tum ſimilem motum ineſſe judicabam. De celeritate autem periodi, comitis ſui obſervatio me certiorem fecit. Qui cum 16 diebus orbitam expleat, Saturnum in centro orbitæ ſitum, multo frequentius circumagi arguit. Jam verò & hoc credibile videbatur, omnem cæleſtem materiam, Saturnum inter comitemque ejus interjectam, eidem motui obnoxiam eſſe, hoc pacto ut quo Saturno propinquior eſt, eo magis ad ipſiuſmet celeritatem accedat. Unde illud ſequebatur deniquè, etiam appendices ſive brachia Saturni, vel medio globoſo corpori conjuncta atque affixa, ſimul cum eo volvi, vel, intervallo aliquo diſcreta, non multò tamen lentiorem periodum ſortita eſſe. Fi-

Figura porro brachiorum, dum hæc circa motum eorum mente agitabam, ejusmodi apparebat, qualis in superioribus observationibus anni 1655 expressa est. Nempe medium Saturni corpus omnino rotundum erat, brachia vero utrinque secundum eandem rectam lineam protendebantur, velut si axe quodam medius planeta trajiceretur, quanquam tubo illo 12 pedum quo tunc utebar, utraque versus extremas cuspides paulo crassiora clarioraque videbantur, quam ubi mediæ sphæræ cohærebant, ut indicat figura. Quum itaque quotidie eandem hanc speciem præ se ferret, intellexi id alia ratione fieri non posse, siquidem tam brevis esset Saturni eorumque quæ illi cohærent circuitus, nisi ut globus Saturni à corpore alio æqualiter undique cinctus poneretur, atque ita annulus quidam medium eum ambiret. Hinc enim, quacunque celeritate circumvolveretur, eandem semper faciem nobis oblatum iri, si nimirum axis ad istius annuli planum erectus esset.

TAB. XLVII. fig. 6.

Annulo Saturnum cingi.

Et sic quidem ei quæ per id tempus aderat phasi causa sua constabat. Ergo deinceps expendere cœpi anne reliquæ etiam, quæ de Saturno ferebantur, eidem annulo imputari possent. Hoc autem non tardè successit ex animadversa, per frequentes observationes, brachiorum Saturni ad eclipticam obliquitate. Cum enim lineam rectam, secundum quam utrinque ea extabant, non sequi ductum eclipticæ, sed intersecare eam angulo 20 partibus majore comperissem, statui proinde planum annuli quem imaginatus eram tali circiter angulo ad eclipticæ planum inclinari. Perpetua videlicet constantique inclinatione, quemadmodum in tellure hac nostra plano æquatoris contingere notum est. Hinc autem necessario illud sequebatur, ut diversis aspectibus nunc ellipsin satis latam, nunc eandem strictiorem, nonnunquam denique & rectam lineam idem annulus nobis exhiberet. Quod autem ansæ effingerentur, intellexi id inde fieri, quod non arctè Saturni globo annulus cohæreat, sed pari interstitio undique ab eo removeatur. Quibus proinde sic ordinatis, ac præterea adsumta ea quam dixi annuli inclinatio-

Eum ad Eclipticæ planum obliquè positum esse.

ne, omnes mirabiles Saturni facies ficut mox demonftrabitur, eo referri poffe inveni. Et hæc ea ipfa hypothefis eft quam anno 1656 die 25 Martii permixtis literis una cum obfervatione Saturniæ Lunæ edidimus *.

* vide fupra pag. 523.

Erant enim Literæ aaaaaaa ccccc d eeeeeg h iiiiiii llll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu *; quæ fuis locis repofitæ hoc fignificant, *Annulo cingitur, tenui, plano, nufquam cohærente, ad eclipticam inclinato*. Latitudinem vero fpatii inter annulum globumque Saturni interjecti, æquare ipfius annuli latitudinem vel excedere etiam, figura Saturni ab aliis obfervata, certiufque deinde quæ mihi ipfi confpecta fuit, edocuit: maximamque item annuli diametrum eam circiter rationem habere ad diametrum Saturni quæ eft 9 ad 4. Ut vera proinde forma fit ejufmodi qualem appofito fchemate adumbravimus.

* vide pag. 526.

TAB. XLIX. fig. 2.

Occurritur iis quæ de annulo objici poffent.

Cæterum obiter hic iis refpondendum cenfeo, quibus novum nimis ac fortaffe abfonum videbitur, quod non tantum alicui cæleftium corporum figuram ejufmodi tribuam, cui fimilis in nullo hactenus eorum deprehenfa eft, cum contra pro certo creditum fuerit, ac veluti naturali ratione conftitutum, folam iis fphæricam convenire, fed & quod annulum hunc folidum ac permanentem (talem enim arbitror) Saturno ita circumponam, ut nullis compagibus retinaculifve ei cohæreat, ac nihilominus æqualem ab omni parte diftantiam fervet, unáque cum Saturno motu velociffimo transferatur. Hos autem reputare illud oportet, non ex mera inventione atque arbitrio meo hanc me fingere hypothefin, ficut Aftronomi fuos epicyclos, nufquam in cælo apparentes; fed oculorum fenfu, quo nempe reliquarum rerum omnium figuras dignofcimus, hunc quoque annulum fatis evidenter me percipere. Neque verò caufam effe cur corpus aliquod inter cæleftia hac forma præditum exiftere nequeat, quæ fi non fphærica at faltem rotunda eft, atque ejufmodi ut motum circa centrum æquè commodè atque ipfa fphærica fufcipiat. Nam minus utique mirandum, hujufmodi figuram tali corpori tributam, quam inconcinnam

quam-

quampiam miniméque tornatilem. Porrò quum certo satis colligi posse videatur, ob similitudinem ac cognationem magnam quæ Saturno cum Tellure nostra intercedit, illum perinde ut hæc in medio sui vorticis situm esse, centrumque ejus versus omnia naturâ suâ tendere quæ illic gravia habentur; inde necessario quoque efficitur, annulum istum omnibus sui partibus æqualivi ad centrum nitentem, hoc ipso ita consistere, ut undiquaque pari intervallo à centro absit. Planè sicuti quidam contemplati sunt, quod si continuum fornicem per totum terrarum ambitum exstrui possibile esset, is absque ullo fulcimine semet ipsum esset sustentaturus. Ergo tale quid in Saturno reipsa effectum esse ne protinus absurdum credant, sed suspiciant potius infinitam naturæ potentiam & majestatem, quæ subinde nova suorum operum specimina in lucem promens, plura etiam superesse admonet. Verum ad propositum jam revertamur.

Saturni major diameter Æquatori parallela ostenditur.

Diximus brachiorum lineam anno 1655 eclipticæ occurrere visam angulo partium plus minus 20. Quod cum præcipuè faciat ad phænomena ex hypothesi nostra deducenda, antequam ad illa accedamus, ita se habere ex observationibus ostendendum est.

TAB. XLIX. fig. 3.

Cum igitur 25 Martii, anno 1655, Saturni in A positi ad stellam fixam B ea fuerit constitutio quæ hîc adnotata est, ut constat ex superioribus observationibus; die autem sequenti sicut in D & B, tertioque item die sicut in C & B, ita ut quotidie linea ansarum producta altius supra stellam B ascenderet; hinc perspicuum fit viam Planetæ A C nequaquam congruere directioni ansarum, sed diversam ferri angulo A C E, quem 20. gr. majorem invenio. Eo autem tempore nihil admodum mutabatur latitudo Saturni apparens, unde constat viam A C eclipticæ parallelam fuisse; ac proinde eodem illo 20 gr. angulo etiam ab ecliptica lineam ansarum deflexisse.

TAB. XLIX. fig. 4.

Rursus 9 Apr. & tribus sequentibus continuè diebus ad aliam fixam C talis annotatus fuit Saturni positus qualis in L, M, N, O cernitur. Ubi similiter apparet, lineam an-

ſarum OP, Saturni tramitem LO ſecare angulo LOP, qui 20 plus minus graduum deprehenditur. Eclipticam verò vel eclipticæ parallelam lineam RQ, angulo PQR, paulo etiam majore quam LOP, quoniam decreſcebat per eos dies Saturni latitudo, quæ borea erat.

TAB. XLIX. fig. 5. Denique cum poſt ſtationem Saturnus ad fixam eandem C revertiſſet, factuſque eſſet auſtralior, die 27 Maji, eo poſitu juxta hanc adſtabat quo hîc ad S deſignatus eſt. Die vero Maji poſtrema, eo qui ad T. Ita ut hic quoque linea SV, quæ ſecundum brachia ducitur, interſecet ST, quam quatriduo illo Saturnus permeaverat, angulo VST, 20 gradus exiguo ſuperante. Eclipticam vero vel eclipticæ parallelam XY, paulo minore angulo SXY, quoniam minuebatur adhuc continuè Planetæ latitudo, etſi directus jam incedebat.

Et his quidem intellectis, inclinatio brachiorum Saturni ad eclipticam, in dubium vocari amplius nequit, etſi, fateor, non admodum accuratè quanta ſit hoc modo definiri poſſit. Si tamen 21 graduum per id tempus apparuiſſe ponatur, quantam ferè adductæ obſervationes comprobant, ac porro ad locum Saturni, qui tunc fuit, attendamus, inveniemus æquatori planè parallela brachia extitiſſe. Cum enim circa 3 gr. Virginis Saturnus verſaretur, ubi parallelus æquatoris eclipticam interſecat angulo gr. 21. quo angulo etiam brachiorum linea illam interſecabat; manifeſtum eſt hanc ſecundùm dictum parallelum atque adeo ſecundùm ipſum æquatorem incedere debuiſſe.

Cæterum alio nunc irrefragabili argumento eandem hanc brachiorum inclinationem, & cum æquatore circulo paralleliſmum confirmabimus. Suprà in obſervationum Hiſtoria ad diem 13 Octob. anni 1656, adnotatum eſt, motum Saturni, quo cum cælo quotidie defertur, ſecundum ipſam anſarum lineam procedere nobis viſum, non ea die tantum, ſed quotieſcunque exinde idem inquirere libuit: inquiritur autem hoc modo. TAB. L. fig. 1. Teleſcopio ad Saturnum obverſo, eoque intra tubi aperturam, quam hic refert circulus AB, recepto, ita ut primùm in extremo margine conſiſtat, vergat-

que

que linea brachiorum ad aperturæ centrum, immotum inde tubum sistimus, quo ita manente, mox totam tubi capacitatem A B percurrere Saturnus conspicitur, motu qui cælo tribuitur abreptus, atque exire ad partem oppositam B, quo tendebat brachiorum linea. Quoniam ergo Saturnus, hoc motu suo, circulum æquatori parallelum percurrit, cujus circuli pars est linea A B, manifesto patet brachiorum lineam æquatori quoque parallelam extendi. Hujus vero rei periculum facere licet quoties Saturni observandi facultas datur, neque alia certiori ratione directionem ansarum investigari posse credimus. Non defuere tamen qui diversimode idem examen instituerunt, quorum observationes sententiam hanc nostram comprobant. Nam Galilæus quidem ipse, qui primus phænomeni hujus indicium fecit, non omnino eclipticæ parallelam lineam, in qua Saturni comites positi essent, sibi visam scribit, sed evidenter ab ea deflectere; & fortasse, inquit, æquatori parallela est.

Post hunc vero quicunque rem examinaverunt, omnes hanc ejus conjecturam nequaquam aberrasse ostendunt, & in his Astronomi insignes Gassendus, Bullialdus & Ricciolus; quorum hic stellarum fixarum ope (alia tamen methodo quam qua modo nos usi sumus) non semel illum ansarum cum æquatore parallelismum liquido sibi compertum demonstrat.

Hevelii de inclinatione ansarum contraria opinio.

Clarissimus tamen Hevelius, suis observationibus confisus, quæ cujusmodi fuerint non indicat, diversam hîc opinionem tuetur, contenditque excentrico Saturni parallelam esse brachiorum inclinationem, ut proinde eclipticæ quoque ferè conveniat, non amplius unqnam quam $2\frac{1}{2}$ gr. deflectens: & hoc quidem cum circa nodos intersectionis Saturnus versatur. Quo fiet ut cum in Libræ & Arietis gr. 20, ubi limites statuuntur, positus fuerit, prorsus eclipticam sequatur brachiorum dispositio. At circa hæc loca maximam omnium inclinationem nostræ & aliorum observationes produnt, nam nostræ quidem, Saturno prope libræ signum atque in ipso signo versante, habitæ sunt; aliorum vero quædam

cum

cum non procul ab oppoſito limite diſtaret. Ergo quod & plurium autoritas & propria experientia confirmat, haud cunctanter hac in re amplectemur: Neque vero dubito, quum certam ſemperque obviam obſervandi methodum tradiderim, quin ea adhibita vir veri amantiſſimus priorem ſententiam volens abdicaturus ſit. Illud utique nobiſcum novit, fruſtra ſive hunc ſive alium quemlibet obſervandi modum, ad dirimendam inter nos hanc litem, uſurpari, quando circa ſigna Cancri vel Capricorni Saturnus commoratur, quoniam ibi diſcerni nequit utrum æquatori an eclipticæ parallela ſit quæ per anſas ducitur, eò quod in his locis parallelus æquatoris eclipticam non interſecet ſed tangat. Quamobrem miror etiam quo pacto Ricciolus, obſervationem Grimaldi adferens anno 1650, 18 Martii habitam, quæ probat eo tempore hanc anſarum lineam eclipticæ obliquam incidiſſe, non animadverterit contrarium ejus quod intenderat illa obſervatione evinci: ſi enim tunc, Saturno prope initium Cancri agente, non erat eclipticæ parallela anſarum linea, ne quidem æquatori parallela fuerit, ut conſtat ex modo dictis. Semper autem æquatori parallelam cerni, & aliis multis obſervationibus docuit, & hac ipſa oſtendere voluit. Ergo & experientiæ propriæ & ſententiæ ſuæ, quam veram eſſe demonſtravimus, planè hîc adverſatur. Grimaldi autem obſervatio, quanquam alioqui in hoc negotio verſatiſſimi atque experientiſſimi, vitio aliquo laborare cenſenda eſt; in qua forſitan priore fixa à Saturno contecta, vel ob fulgorem cerni prohibita, aliam deinde teleſcopio detexerit prius non animadverſam, proque eadem illa habuerit. Nos verò, cum parallelam æquatori brachiorum lineam eſſe indubitatis rationibus ſatis jam adſtruxerimus, deinceps ad annuli noſtri hypotheſin hunc ejus ſitum applicemus, indeque phænomenôn cauſas ſingulas derivari doceamus.

Ricciolus ſibi contrarius. lib. 7. Almag. novi.

Eſto itaque Saturni orbita, quam 30 circiter annis ille emetitur, ABCD; & in eodem plano (nam exiguæ declinationis gr. $2\frac{1}{2}$ non hic rationem habebimus) circulus FE, orbem magnum ſive telluris orbitam referens, quam ap-

Ulterior hypotheſeos noſtræ explanatio.

TAB. L. fig. 2.

annuo spatio cum illa nos obimus: inque hujus centro G consistat Sol. Jam sicuti axem terra habet semper sibi parallelum, circa quem in sese volvitur, ita Saturnus quoque habere ponatur, qui sit ad annuli sibi circumdati planum erectus. Adeo ut circa unum eundemque axem gyrentur & corpus Saturni sphæricum, & annulus, & in eodem annuli plano positus Saturni comes sive Luna. Intelligatur autem Saturni hic axis axi terræ circiter æquidistans. Unde & planum annuli plano æquatoris nostri parallelum erit, ac proinde angulo partium $23\frac{1}{2}$ ad planum eclipticæ inclinabitur. Nam sic constituendum esse inde intelleximus quod ansarum Saturni inclinatio æquatori parallela deprehendatur, ut modo demonstratum fuit.

Nobis itaque in circulo EF circumlatis, varias annuli hujus, à Sole pariter cum Saturno illustrati figuras cerni debere perspicuum est, prout nimirum nunc has nunc illas orbitæ suæ partes Saturnus peragrabit. Nam eodem quidem orbitæ loco, quacunque tandem celeritate super axem suum converti dicatur, diversas phases non exhibebit, quoniam ea conversione situm annuli, nostri respectu, nihil immutat, sed ita demum si in eccentrico suo sive orbita spatio aliquo progressus fuerit. Cumque triginta fere annis ad loca eadem revertatur, hinc necessario intra id tempus omnium phasium vicissitudinem conspici necesse erit, atque alias quidem bis, alias quater: quas singulas nunc expendemus.

Causa phaseos ansarum latissimarum.

Primò itaque duos orbitæ locos esse liquet è diametro oppositos, velut A & C, in quibus Saturnus constitutus latissimas, maximeque omnium diductas ansas exhibeat; cum nimirum à plano per centra Telluris & Saturni acto, atque ad orbitæ Saturniæ planum erecto, annuli quoque planum ad angulos rectos secatur, eoque viginti trium circiter partium angulo supra planum annuli visus noster attollitur.

TAB. L. fig. 3.

Cujus phaseos vera proinde forma, secundum ea quæ supra circa annulum definivimus, ejusmodi erit qualis hîc delinea-

lineata cernitur, majori ellipsis diametro ad minorem se habente fere ut 5 ad 2. Atque hæc ea figura est quam ab Hevelio, Ricciolo, & Eustachio de Divinis, anno 1648, 1649, & 1650 spectatam fuisse diximus. Cujus itaque locum, hinc inter signa ♊ & ♋, inde inter ♐ & ♑ constitui oportere certum est, quandoquidem istis annis signum ♊ Saturnus peragrabat & in ♋ signum transibat. Postea vero accuratius hunc locum latissimè ansarum phaseos inquirentes ostendemus eum cadere in 20° gr. ♊ & ♐.

Clarior Saturnus propter ansas cernitur.

Illud vero manifestum est, Saturnum, quoties hanc præfert speciem, multo lucidiorem sese intuentibus ostendere debere, quàm dum nullis brachiis auctus est: quum tantundem luminis fere ab hisce emanet, quantum ab toto interiore disco. Atque ita semper quo propius versus Cancri & Capricorni signa accesserit, eo majorem, aut certè splendidiorem, etiam absque telescopio apariturum; quippe annuli ellipsis semper latius se pandente, ut in sequentibus declarabitur.

Lunæ Saturniæ motus apparens ellipticus.

Sed & aliud circa hanc phasin observandum occurrit, motus nimirum insolens Saturnii comitis, qui quidem motus observationibus anni 1659 adnotari jam cæpit, verùm hac latissimâ ansarum phasi existente, omnium evidentissimè ut sese prodat necesse est. Etenim quum eodem plano & annulus Saturni & comitis orbita contineantur, aut certè parum diversis; constat simul cum annulo etiam orbitam hanc latissimam omnium ellipsin nobis explicaturam: eoque futurum ut comes apparente motu altè supra Saturnum atque infra transire conspiciatur, ita ut corpore ejus vel radiis nimium propinquis nequaquam nobis occultetur, quemadmodum aliàs accidere solet. Atque ea quidem ellipsis quam tali motu describere hisce in locis cernetur, longitudinem latitudinis suæ duplam sesquialteram habere invenietur, sicut & annuli, quam diximus, ellipsis latissima. Verum recedente hinc Saturno sensim angustior ipsa quoque evadet, quippe annuli ellipsi semper similis, adeo ut primum fulgore planetæ transitus comitis conspici prohibeatur, deinde corpo-

ris ipſius Saturni ante vel pone comitem objectu. Ita namque obſervationes anni 1655 & 1657, quo tempore exilia & quam maximè compreſſa brachia erant, oſtendunt comitem etiam in ea recta tunc perpetuo apparuiſſe quæ per utrumque illorum extendebatur.

Et hac quidem in re diſſidet Saturniæ Lunæ curſus ab eo qui in noſtrate Luna animadvertitur; ſiquidem hæc non æquatoris noſtri ſed magis eclipticæ plano obnoxia eſt, à quo quinque tantummodo partibus exorbitat.

Quomodo anſarum latitudo ſenſim contrahatur. TAB. L. fig. 2.

Verum ad Saturni phaſes revertamur: quo poſito ad H vel I, vel ex adverſo ad O vel P, paulo anguſtiorem jam annuli ellipſin, eadem tamen qua prius longitudine nobis aſpici oportet, quum ſupra planum annuli minus altè hoc ſitu viſus noſter efferatur. Unde illa phaſis exorietur quæ in tabellæ LII. ſerie octava poſita eſt; vel, minus accuratè perſpicere valentibus, ea quæ ſexta eſt efficietur.

Rurſus autem eum ad K aut L Saturnus pervenit, vel ad loca hiſce oppoſita N & M, magis adhuc contrahi apparet minorem ellipſis diametrum, quippe magis ex obliquo inſpectam. Ut jam ea Saturni facies proditura ſit quam nos anno 1658 obſervavimus (T. XLIX. *fig.* 7.); quæ minus bonis teleſcopiis excepta degeneravit in illam quæ quinta in tabella LII. recenſetur; pejoribus etiam in triſphæricam.

Quomodo patulæ videri anſæ deſinant.

Deinde cum penè quadrante circuli à latiſſimæ phaſeos loco Saturnus remotus invenitur, velut in Q & R, vel S & T; uſque eo ellipſis annuli conſtringitur, ut ſi qua adhuc rima ſuperſit viſui pervia, ea tamen propter exilitatem & reliqui corporis ſplendorem conſpici nequeat; ac proinde Saturni forma ejuſmodi appareat qualem anno 1655 & 1657 nos ſpectaſſe ſupra meminimus (T. XLIX. *fig.* 6 T. LI. *fig* 5), quæ quomodo aliis omnibus hactenus teleſcopiorum culpâ triſphærica exiſtimata ſit, antea quoque oſtenſum eſt.

Sola dehinc rotunda phaſis explicanda reſtat; ad quam priuſquam tranſeam, de inclinatione magnæ Saturni diametri, ſive anſarum lineæ, ut ſupra eam vocavi, pauca adnotanda ſunt.

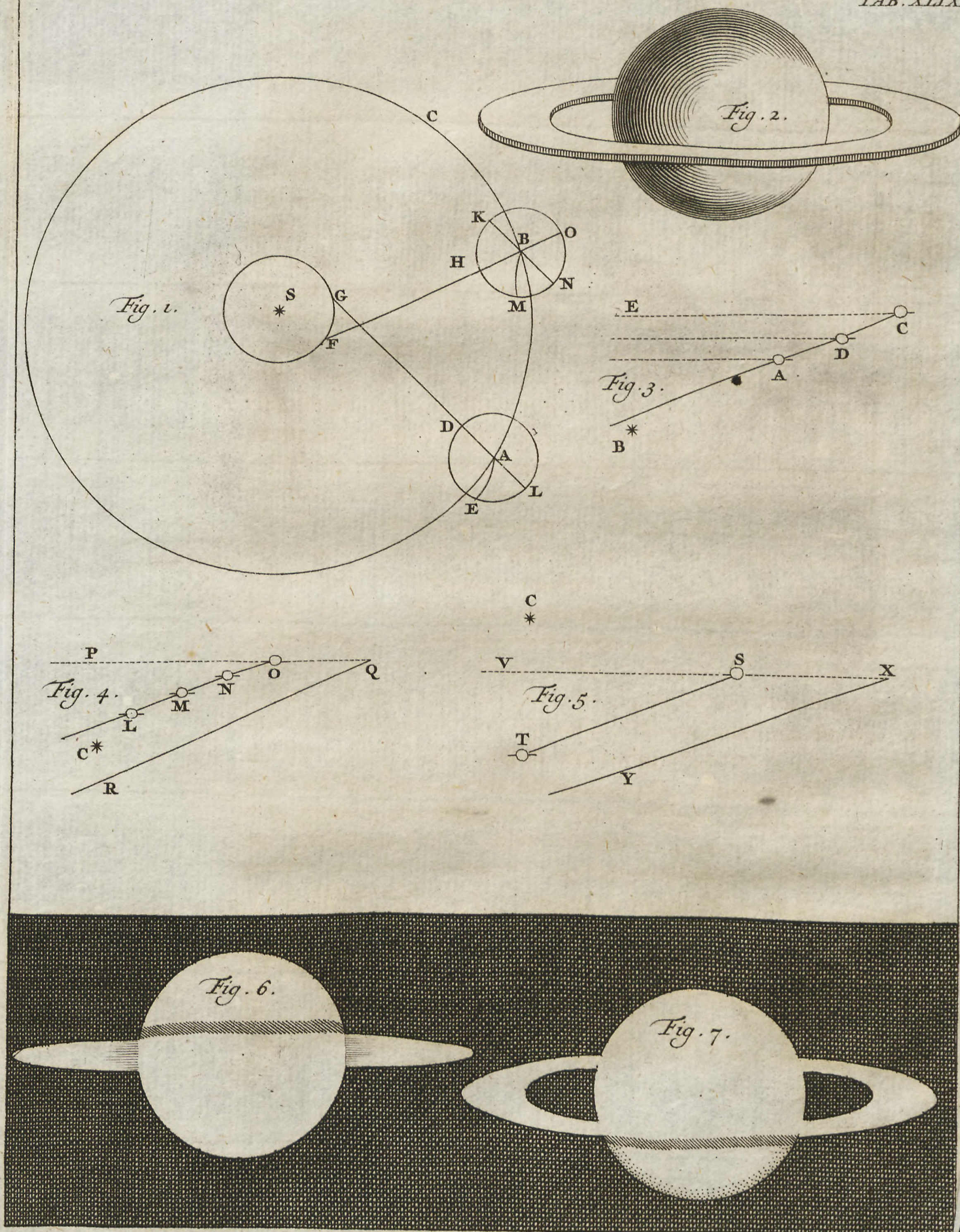
Majorem Saturni diametrum necessario Æquatori parallelam semper videri.

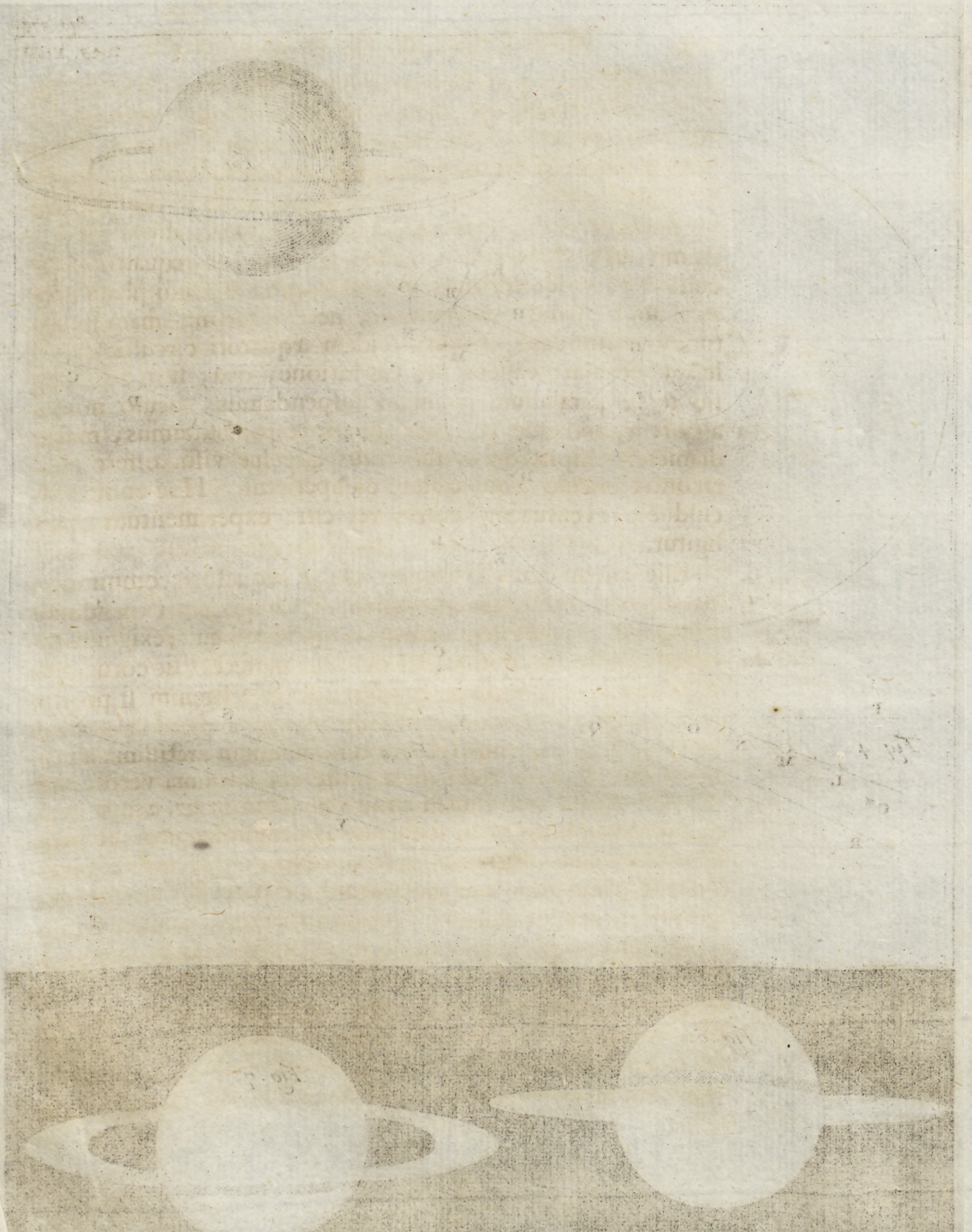
Ajo itaque in omnibus prædictarum phasium, posito, ut hactenus fecimus, parallelum esse annuli planum plano æquatoris, necessario fieri ut major diameter Saturni, sive ellipseos ejus cui annulus assimilatur, semper æquatori circulo parallela spectetur, planè quemadmodum revera contingere nostris aliorumque observationibus supra probavimus. Quum enim visus noster respectu cælestium in centro æquatoris circuli, atque adeo in plano ejus collocatus sit, cui plano planum annuli parallelum ponitur, necesse est maximam longitudinem annularis ellipseos eidem æquatori circulo parallelam extendi: eâdem prorsus ratione, quâ, si in aëre plano terræ parallelum circulum suspendamus, oculo nostro altiorem, indeque passibus aliquot retro absistamus, major diameter ellipsis quam suspensus circulus visui offert Horizontis circulo æqui distare comperietur. Hoc enim proculdubio eventurum, cuivis vel citra experimentum intelligitur.

Revera tamen minimum quid nonnunquam aberrare.

Esse autem annuli planum plano æquatoris omnimodis parallelum, etsi observationibus, quas quidem expendimus hactenus, minimè repugnantibus statuere licuit; exiguum tamen quid deesse, quo minus omnino perfectus sit eorum parallelismus, alia ratione deprehenditur. Etenim si prorsus inter se parallela forent utraque plana, sequeretur ut cum in pr. ♈ & ♎ Saturnus spectaretur, omnium arctissima annuli ellipsis, & quasi recta linea existeret, latissima verò in pr. ♋ & ♑. Atqui arctissimam annuli phasium in gr. 20½ ♍ & ♓ cadere invenimus, ut in sequentibus demonstrabitur, ac proinde latissimam in gr. 20½ ♊ & ♐. Non igitur exactè parallela esse plana annuli & æquatoris hinc patuit, ideoque nec semper revera parallelam, licet ita videatur, magnam Saturni diametrum æquatori circulo fore. Quæsitoque per sphærica triangula, quibus in locis & quanta sit maxima inclinatio, inveni eam gr. 4 8′. quando Saturnus in gr. 25, 15′. ♊ & ♐ versatur. Tali nimirum angulo, nec unquam majori, ansarum linea circulum æquatori parallelum per Saturnum transeuntem iis in locis intersecabit; qui cum sit adeo exiguus,

TAB. XLIX.


Fig. 1.
C
S
G
F
K
B
O
H
N
M
D
A
L
E
Fig. 2.
E
C
D
A
Fig. 3.
B
P
O
Q
N
M
L
Fig. 4.
C
R
C
V
S
X
Fig. 5.
T
Y
Fig. 6.
Fig. 7.



guus
nus.
nemp
paral
cæ v
pe q
nemp
autem
terse
& 16
Fort
loca
incli
quin
ca tr
teris
ratio
Sc
tegro
perv
dirig
quid
dem
nunc
la o
cto,
rum
chia
quoc
Gali
cem
nos
que
ansæ
tund
seme

guus, vix puto obſervabilis erit: aliis autem locis multo minus. Nam iis quidem quæ quadrante Zodiaci inde abſunt, nempe cum gr. 25.15′. ♍ aut ♓ Saturnus obtinebit, prorſus parallela æquatori eadem anſarum linea conſpicietur. Eclipticæ vero parallela fiet Saturno gr. 20½ ♊ aut ♐ tenente: quippe quam in locis per quadrantem circuli inde diſtantibus, nempe in gr. 20½ ♍ & ♓, maximo angulo interſecat. Hunc autem maximum angulum quo linea anſarum eclipticam interſecat eſſe circiter gr. 23½ obſervationibus anni 1655, 1656 & 1657 apparuit, talemque ad iſta ſupputanda adſumſimus. Fortaſſe autem, longo ſæculorum lapſu, ſenſim omnia hæc loca mutari continget, ſimili quodam motu Saturni globum inclinante atque in Tellure noſtra eſt is qui præceſſiones æquinoctiorum efficit: atque ita phaſium quoque omnium loca transferri neceſſe erit. Hoc verò non tam facile in cæteris phaſibus quam in rotunda pateſcet, ad cujus conſiderationem deinceps veniendum.

Rotundæ phaſeos cauſa.

Schema itaque repetenti manifeſtum eſt Saturnum integro orbitæ ſuæ circuitu non poſſe non ad eum locum bis pervenire, (eſto in B & D) ubi planum annuli recta ad nos dirigatur, productumque in oculos noſtros incurrat. Quod quidem in locis è diametro oppoſitis contingeret, inque iiſdem perpetuò, ſi ex Sole Saturni motum proſpiceremus; at nunc propter motum Terræ in ſua orbita annuum, nonnulla oritur inæqualitas. Annulo igitur ſecundum latus inſpecto, nec niſi rectam lineam referente, quum neutra planarum ejus ſuperficierum appareat, ad nihilum rediguntur brachia ac prorſus intereunt, ſolo rotundo Saturni corpore quod intueamur reliquo. Cujus phænomeni primum teſtem Galilæum ſupra commemoravimus, qui anno 1612 ſimplicem hanc Saturni formam obſervaverit. Inde verò poſt annos 30 Gaſſendum alioſque complures; ac nos etiam denique anno 1656. Verùm enim ſi hôc tantum annuli poſitu anſæ evaneſcerent, nequaquam tanto tempore perſtare rotunda phaſis poſſet atque obſervationes teſtantur, toto enim ſemeſtri rotundus Saturnus ſpectatus fuit. Quamobrem porro

ro quærendum eſt quæ cauſa, præter eam quam jam attulimus, anſas quandoque cerni prohibeat: eſt autem quæ ſequitur manifeſtiſſima.

Frequenter nimirum evenire conſtat Saturno circa locos modo dictos B vel D commorante, ut tum hujuſce tum Solis reſpectu ita poſiti ſimus, ut ſi produci planum annuli intelligatur, id inter nos ac Solem tranſiturum ſit: velut in ſchemate, cum Saturnus prope D conſiſtit, nos autem cum Tellure in E. Quo fit ut illam annuli ſuperficiem quæ ſolis radiis illuminatur conſpicere nequeamus, ſed alteram tantummodo quæ tunc umbræ vices patitur. Nulla itaque ne hîc quidem brachia Saturno annulus præſtat, ſed oculis noſtris ereptus orbum ac ſolitarium relinquit. Atque hæc cauſa ad continuos quinque aut ſex menſes rotundæ phaſi interdum ſufficit, uti poſtea accuratius docebimus.

At non immerito dubitari poſſit, cur & hôc & præcedenti quoque annuli poſitu cum planum ejus rectà ad nos vergit, non ſaltem exterior ejus limbus à Sole illuſtratus appareat: quid enim dicemus? anne tam tenue eſſe totum annuli corpus, ut licet revera ſplendeat extrema ejus margo, exilior tamen ipſa ſit quam quæ noſtris teleſcopiis percipi poſſit? Nequaquam: verùm res eadem quæ cauſam hanc prætexi vetat, eadem veram cauſam quoque haud dubiè ſuppeditat: faſcia nimirum illa reliquo Saturni diſco obſcurior, quam & rotundo illo apparente, & rurſus brachiis aucto, nobis viſam narravimus. Hæc ita comparatum eſſe exteriorem illum annuli ambitum evincit, ut aliqua quidem craſſitudine præditus ſit, verum ejus naturæ, ut ſolis lumen, vel nihil prorſus, vel certè leviter admodum reflectat. Quia enim in Saturno etiam brachiis prædito tractus iſte nigricans animadvertitur, nempe cum ſuperficiem annuli eandem quæ à Sole illuſtratur deſpicimus; quo poſitu nulla ejus regio obumbrata oculis noſtris obverſa eſt; ſequitur nigredinem illam ex alia cauſa manare non poſſe, niſi quod ejuſcemodi quadam materia annuli margo cooperta ſit, quæ non perinde ut reliqua ejus ſuperficies repercutiendo lumini ſit idonea.

Quid ſit in Saturni diſco Zona nigricans.

nea. Sic in lunari quoque disco maculas aliquas, cæteris partibus multo obscuriores, cernimus; quæ quidem non planè omni luce defectæ apparent, verùm si æquè procul ac Saturnus à Sole distarent, ubi tantum centesimam partem ejus, quod nunc accipiunt, luminis ab illo mutuarentur, credibile est penitus nobis invisibiles fore, nisi quatenus lucidioribus undique terminantur; præsertim si tenuem modo lineam, ut Saturnii annuli margo, constituerent. Alioqui vel illud forsitan dici possit, materiam quandam aquæ similem, aut certè lævi & splendida superficie præditam, extrema annuli præcingere, quæ unico tantum veluti puncto Solis radios reflectens, nequaquam nobis conspicua erit, ut rationibus opticis clarum est.

Sed quæ ad rotundam phasin attinent ulterius etiam expendamus, in qua plura animadvertenda supersunt. Diximus paulò ante, tunc eam potissimum existere, cum productum annuli planum inter nos Solemque medium transit. Hoc verò quando contingat, quo pacto cognoscere possimus, atque ex Astronomicis tabulis definire, deinceps explicandum est. Sit itaque denuo Saturni orbita A B C, Telluris annua D E F, locus solis L. TAB. L. fig. 4.

Jam quia positum fuit, Saturni axem, qui ad annuli planum erectus est, semper sibi parallelum ferri, sequitur communem quoque planorum annuli & orbitæ intersectionem uni cuidam lineæ semper fore parallelam. Esto ea linea per Solem ducta A C, quæ proinde in cælo locum Saturni æquinoctiorum designabit. Posito igitur Saturno in H, Tellure verò in D, utroque ad partem eandem rectæ A C, verum ita ut minus ab ea Saturnus quam Tellus distet: necessario intersectionis linea planorum annuli & orbitæ Saturni H M, quæ nimirum ex H parallela ducitur A C inter Solem L, Terramque in D positam excurret, ac propterea annuli quoque planum manifestò inter utrumque medium incedet. Quod ubi contingit, rotundæ phasi locum esse demonstravimus. Contra verò, cum Saturnus quidem ac Tellus ad eandem partem rectæ A C consistunt, verum ita ut

ut illa propius ad eam accedat, ut cum ille est in N, hæc in F: vel cum diversas partes respectu A C obtinent, velut cum Saturnus est in N, Tellus in *f*; utroque casu linea intersectionis annuli atque orbitæ Saturni, ut hic N Q, quæ nimirum ipsi A C æquidistans acta est, Terram Solemque ab eadem parte habebit. Unde intelligitur, utrovis positu eandem annuli superficiem à Sole & nobis aspici: quod requiri jam supra advertimus, ut brachia Saturni aut ansæ apparere possint. Quanquam ne sic quidem semper cernuntur, uti postea manifestum fiet.

Saturnus quando necessario rotundus spectari debeat.

Hi autem diversi situs ut ex tabulis Astronomicis parvo negotio cognoscantur, indeque rotunda phasis, quatenus ab hac causa pendet, prædici possit, sciendum est, quandocunque Saturni locus apparens locusque ex Sole sive eccentricus, diversas partes obtinent ejus loci quem inter fixas designat recta A C, (quam in gr. 20½ ♍ & ♓ incidere post hæc ostendemus) id ejusmodi situm Saturni ac Telluris indicare qualis in H & D, ut nimirum ab eadem parte ambo reperiantur rectæ A C, atque propior huic Saturnus consistat; eoque tunc rotundam phasin conspiciendam dari. Illo enim posito, sit Saturnus in H. Primùm itaque dico ab hac parte lineæ A C etiam Tellurem consistere. Etenim si ad alteram partem sita esse dicatur, velut in P; liquet rectam ex P ad H ductam & versus fixas porro continuatam, quæ locum Saturni apparentem, itemque rectam L H, quæ producta locum ejus ex Sole demonstrat, ab eadem parte puncti æquinoctiorum, quod L A producta inter fixas determinat, utraque ea loca exhibituras; contra quàm positum fuerat. Est ergo Tellus necessario ab eadem parte lineæ A C, qua Saturnus H. Esto jam ea alicubi puta in D. Quoniam igitur D H ad fixas protracta locum Saturni apparentem designat, L H vero, uti diximus, locum ejus eccentricum, inter quæ loca intercedere ponitur locus æquinoctiorum quò tendit L A, necesse est rectam D H tandem ipsam L A intersecare, ideoque punctum D, locum videlicet Telluris, amplius distare à linea A C quam punctum H in quo Saturnus.

nus. Constat itaque quando locus Saturni apparens & eccentricus ad partes diversas cadent loci æquinoctiorum, necessario tunc Tellurem cum Saturno ab eadem parte rectæ A C inventum iri, atque ita ut minus ab ea Saturnus removeatur. At vero quoties apparens locus Saturni itemque eccentricus ab eadem parte habentur rectæ A C, sive loci æquinoctiorum Saturni, inde certo colligi ajo, Tellurem ac Saturnum ita positos esse uti in F & N. Nempe ut vel diversas ad partes ipsius A C collocati sint, vel ad easdem quidem, sed ita ut Saturnus amplius ab ea quam Tellus distet. Ideoque, secundum ante demonstrata, eandem annuli superficiem quæ à Sole illustratur oculis quoque nostris obversam esse. Nam cum L N producta ostendat inter fixas locum Saturni excentricum, F N vero locum ejus apparentem, ac uterque cadere ponatur in partem eandem loci illius quem inter fixas exhibet L C: manifestum est rectam F N ab N porrò productam neque secare debere neque parallelam esse rectæ L C, sed semper ab ea magis recedere. Quare necessario punctum F vel propinquius erit rectæ A C quam punctum N, si sint ambo ad eandem partem dictæ lineæ; vel N ad istam, F ad illam partem situm erit. Quod probandum erat.

Denique advertendum etiam, quando vel Saturni locus ex Sole, vel apparens locus incidit in alterutrum æquinoctiorum, quæ determinat producta A C, nempe in gr. 20½ ♍ vel ♓, necessario quoque rotundam phasin exoriri. Si enim locus ex Sole inibi reperiatur, hoc est, si Saturnus occupet punctum A vel C, tunc planum annuli protractum per Solem transire liquet: unde sequitur neutram annuli superficiem tunc luce aliqua perfundi. Rursus vero cum locus ejus apparens incidit in dictos æquinoctii locos, hoc est, quando recta à Tellure ad Saturnum extensa parallela incedit ipsi A C; velut cum Saturnus situs est in O, tellus in *f*, eo positu productum annuli planum oculo nostro occurrere constat, quoniam communis ejus intersectio cum plano orbitæ Saturni ipsa est O *f* recta: Unde fit ut neutram superfi-

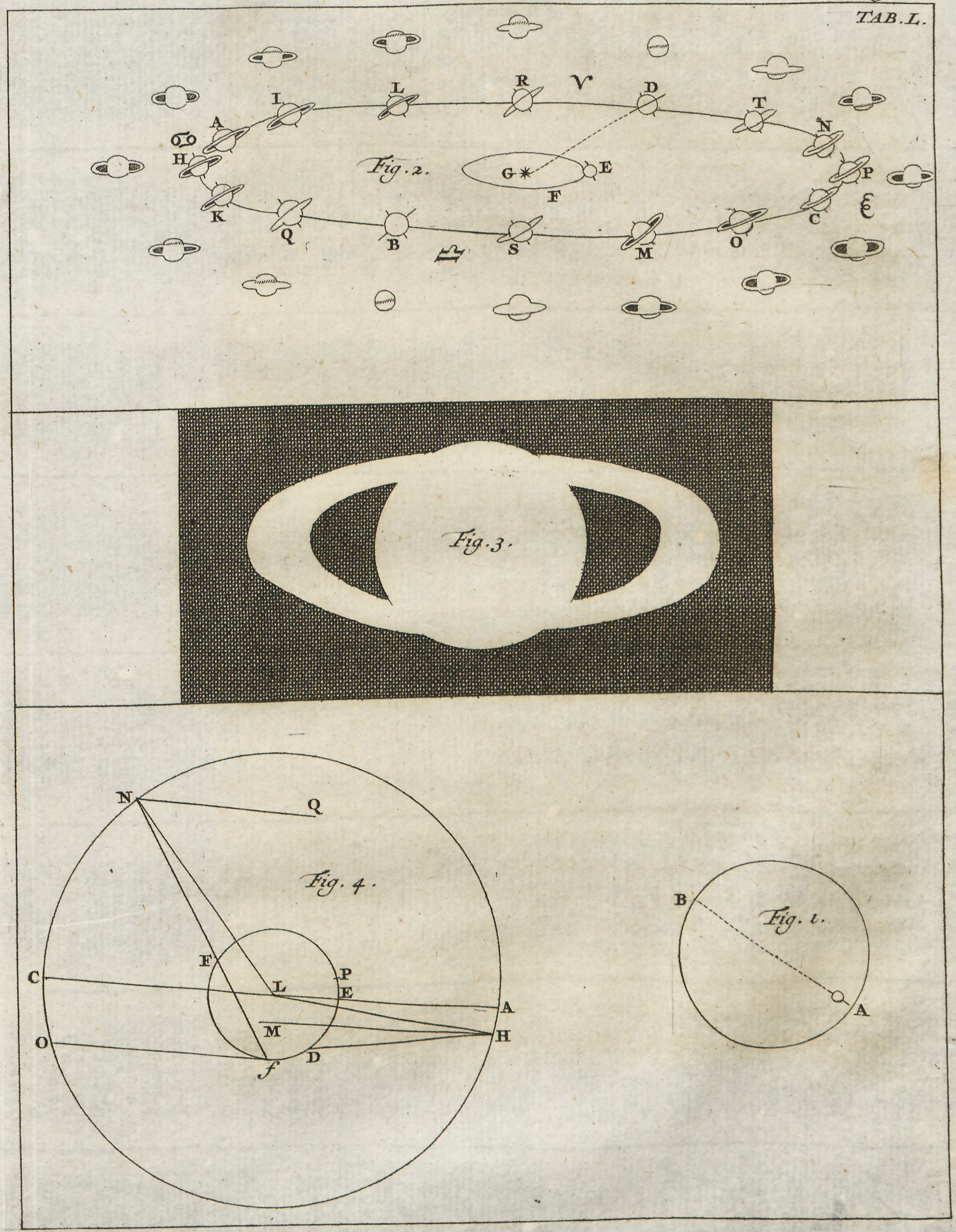
ciem annuli, etiamsi altera jam illarum Solis radiis splendeat, conspicere possimus.

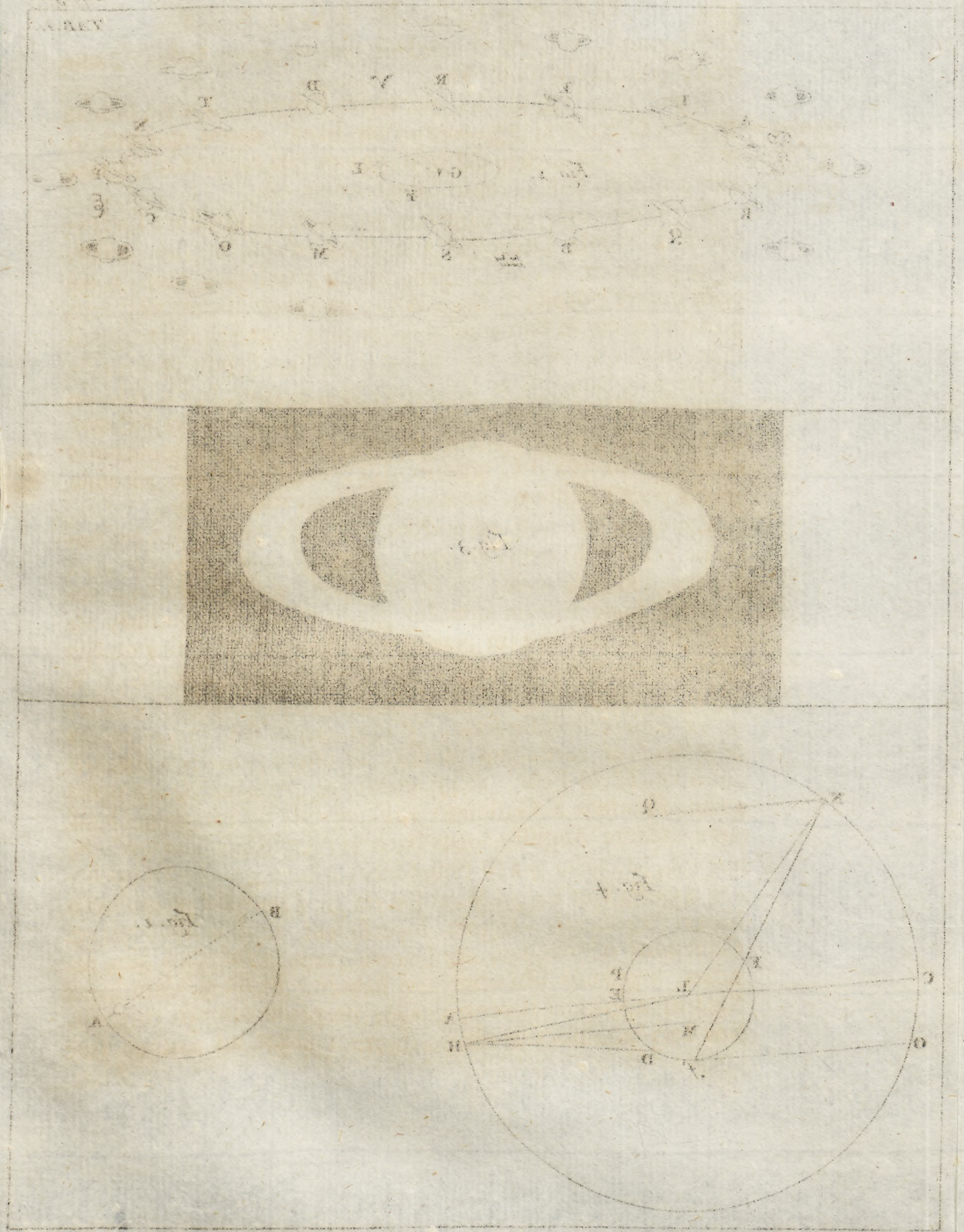
Quanam Saturnicolis sint loca æquinoctiorum.

Nunc illud videamus, quemnam Eclipticæ locum teneat recta A C Saturni æquinoctiorum linea: quam quidem in ♍ & ♓ gr. $20\frac{1}{2}$ cadere diximus, verum qua ratione id ex observationibus collegerimus declarandum est.

Saturnum brachiis carentem ac prorsus rotundum spectavimus à Mense Decembri anni 1655, usque in Jun. 1656. Quæ phasis ex ea causa, quam modo retulimus, tanto tempore durare potuit, si linea A C eum ipsum locum obtinere ponatur quem & Saturnus tenebat tunc cum Soli esset oppositus, hoc est, ♍ gr. 20. Hinc enim fieri debuit ut toto illo tempore Saturnus ac Tellus ab eadem parte lineæ A C simul consisterent, atque ita quidem ut Saturnus ei vicinior esset; semel autem eodem momento, nempe oppositionis tempore, in ipsa A C reperirentur: unde non nisi rotunda phasis potuit existere, sicut ex prædictis intelligitur.

Cæterum uti non admodum versimile est (etsi fieri potuerit) eo ipso tempore oppositionem illam contigisse cum Saturnus in æquinoctii sui linea A C situs esset, ita non verebimur hanc lineam dimidio gradu emovere loco illo, atque in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ eam transferre; quum hoc positu melius satisfiat aliis rotundæ figuræ observationibus, anni 1642 & 1612, ac nihilo secius nostra illa anni 1656 conciliari quæat, ut ex sequentibus liquebit. Posita itaque A C in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ & ♓ sequitur rotundam phasin, ab usque principio Augusti anno 1642, ad Febr. 1643, continuè perseverasse, prorsus quemadmodum à Gassendo aliisque fuit adnotatum. Erat enim ineunte Augusto locus Saturni eccentricus in 20 gr. ♓, hoc est, dimidio gradu præcedebat locum æquinoctii: at locus apparens in 24 gr. ♓, atque ita gr. $3\frac{1}{2}$ eundem æquinoctii locum transierat. Quare superficiem annuli illuminatam Gassendus nequaquam conspicere potuit, sed eam quæ tenebris tegebatur sibi obversam habuit. Et sic quidem locus Saturni apparens eccentricusque perpetuo diversis in partibus loci æquinoctiorum perstiterunt usque ad initium fere Febr.


Fig. 2.
G
E
F
A
I
L
R
D
T
N
P
C
O
M
S
B
Q
K
H
Fig. 3.
Fig. 4.
N
Q
F
L
P
E
C
A
M
H
O
D
f
Fig. 1.
B
A



Febr.
ut an
Ide
obtul
obser
Satur
Ar
cie af
la de
ni, ti
duob
misisl
ret, p
que c
erat,
thesi
appar
re fu
locus
serit
præce
labi p
Septe
lilæus
gr. 1
Adeo
bant
tamen
gr. 2
obite
netæ
nos c
Quan
li sui
angul
nita c

Febr. 1643, unde non nisi rotunda forma prodire potuit, ut antea demonstratum est.

Idem quoque phænomenon anno 1627, proculdubio sese obtulit, sed observatorum penuria an supinitate præteriit inobservatum; cum nemo, quod sciam, prodiderit, utrum Saturnus eo anno cum globulis apparuerit an secus.

Anno autem 1612, à Galilæo primo omnium rotunda facie animadversus est. Scribit is ad Marc. Velserum Epistola de Solaribus maculis 3. circa solstitium quidem illius anni, tricorporem adhuc Saturnum sibi visum, inde verò, cum duobus mensibus atque amplius telescopio eum inspicere omisisset, ut qui nullam formæ mutationem animo præsagiret, postea nihil minus cogitanti solitarium oblatum, talemque deinceps in illam usque diem, quæ prima Decembris erat, permansisse. Quæ quidem observatio hactenus hypothesi nostræ consentit, ut si eo transitu lineæ A C rotundus apparere Saturnus debuerit, id hoc anno neque alio accidere fuerit necesse. Sed cum per totum hunc annum Saturni locus, quà apparens, quà eccentricus, ab eadem parte manserit loci æquinoctiorum, sive ♓ gradus $20\frac{1}{2}$; videbatur ex præcedentibus colligendum, salvis brachiis suis eum præterlabi potuisse, quod tamen contra evenit. Et sexto quidem Septembr. dicti anni 1612, quo tempore jam rotundum Galilæus reperit, erat ejus locus ex Sole simul & apparens, in gr. 14, 44′ ♓. Hoc est g. 5. 46′ citra locum æquinoctii sui. Adeo ut solares radii atque ii qui à visu terricolarum fluebant in eandem annuli Saturnii superficiem inciderent: non tamen angulo g. 5. 46′ desuper in planum ejus directi, sed gr. 2. 15′ duntaxat. Hic enim elevationis angulus, ut hoc obiter adnotemus, sic se habet ad illum gr. 5. 46′, quo Planetæ locus distat ab æquinoctio suo, quemadmodum apud nos declinatio Solis ad ejusdem ab æquinoctio distantiam. Quandoquidem non aliud respectu Saturni est planum annuli sui, atque nobis est planum æquatoris, similique etiam angulo ad eclipticæ planum inclinatur. Proinde cum cognita est distantia loci Saturni eccentrici ab æquinoctio suo,

si scire libeat quali angulo Solis radii in superficiem annuli deferantur; quærendum in tabula declinationis Eclipticæ, qualis apud Astronomos in usu est, quanta sit declinatio loci alicujus qui tantundem à princ. Arietis absit. Ea enim est ipse angulus quæsitus. Ac simili quoque ratione cum data erit distantia loci Saturni apparentis ab æquinoctio suo, hoc est, à gr. 20½ ♍ aut ♓, invenire licebit quonam angulo desuper planum annuli nos inspectemus; qualemque propterea ellipsin ille nobis exhibere debeat. Ex eadem nimirum tabula capiendo declinationem huic distantiæ à pr. Arietis respondentem, quæ declinatio rursus hîc quæsitum angulum æquat. Quorum demonstrationem adferre operæ pretium non est, quippe quam Astronimiæ periti facile perspicient.

Illud verò videndum, qui evenerit ut visu nostro ac Sole simul supra planum annuli plus quam 2 gr. altis, nullum tamen brachiorum apud Saturnum vestigium apparuerit. Anne hæc fortasse causa fuit quod ellipsis annuli, tam obliquè inspecta ut magis tenuissimæ lineæ similitudinem præferret, exiliorem lucem emittebat quam quæ Galilæi tubo percipi posset. Hoc quidem non improbabile videri queat, nisi eodem tubo, circa solstitium ejusdem anni 1612, brachia Saturni sive bini illi, ut tum putabant, satellites Galilæo animadversi fuissent, quo tempore Saturnus observabatur circa gr. 18, ♓. hoc est gr. 2½ ab æquinoctio suo remotus, ideoque visus noster vix uno gradu plano annuli superior. Etenim si hoc positu brachia cerni potuere, multo clarius cerni debuissent tunc cum gr. 2. 15′ supra idem planum visus extolleretur, initio nimirum Septembr. magisque etiam 14 Nov. ejusdem anni 1612, tempore stationis Saturni; quia tunc gr. 11. 10′ ♓ tenebat, eoque gr. 9. 20′ ab æquinoctio suo aberat; adeo ut angulo gr. 3. 42′ radii visus in planum annuli descenderent. Atqui hîc, vel certe circa hæc loca brachiorum expers mansit, quum satis utique diligentem ac intentum observationibus Galilæum fuisse per eos dies credibile sit, qui rotundæ phaseos miraculo nuper esset excitatus.

Ita-

Itaque in tenuitatem brachiorum, cur ea penitus latuerint causa conferri non potest. At neque transponendo amplius Saturni æquinoctiorum locum, quicquam proficimus; ne quidem si mobilem statuamus lento quodam progressu, ad similitudinem nostrorum æquinoctiorum, quæ sensim in præcedentia referuntur. Quamobrem non aliam hujus rei causam esse crediderim quam quæ nunc dicetur.

Certum est cognitæque experientiæ, superficiem quamlibet ab eodem lumine plus minusve illustrari, prout directis vel obliquis radiis exposita est: quod & à Galilæo, dialogo 1. de Mundi systemate, optimè est demonstratum. Quamobrem cum exiguo admodum angulo supra annuli Saturnii planum Sol attollitur, puta gradus unius vel duorum vel etiam duorum cum dimidio, hoc est, cum Saturni locus eccentricus non ultra gr. 6. ab æquinoctio suo aberit, etiam prætenui tantum luce annuli superficies à Sole impertietur. Hanc autem, ita leviter splendentem, verisimile est à meris tenebris nos discernere non posse, præsertim Saturnii globi vicino fulgore præpeditos; eoque ansas tunc nullas animadverti. Qua tamen in re illud ante omnia statuere necesse est, superficiem annuli non esse asperam montibusque obsitam, veluti maxima ex parte Lunæ nostræ est superficies: sed æqualem planamque velut in iis Lunæ regionibus, quas nonnulli maria esse ob insignem planiciem arbitrati sunt.

Alioqui enim, sicut Luna plena circa disci sui extrema, ubi tamen obliquos Solis radios excipit, nihilo languidiori lumine quam versus medias partes cernitur, scilicet quia illic tota montosa atque aspera est, ita annuli quoque superficies si simili natura prædita foret, non secus obliquè incidentibus radiis quam directis splendesceret. Quamobrem necessario plana, uti diximus, censenda est. Atque hinc jam intelligere licet cur Galilæo à Mense Septembri anni 1612 usque in Febr. 1613, quoad nempe Heliacè Saturnus occideret, nullæ circa eum ansæ conspicerentur. Quia nempe inde à Septembri continuè locus Saturni eccentricus ad æquinoctii locum appropinquavit, eoque altitudo Solis supra an-

nuli planum, quam initio Sept. tantum gr. 2. 15', fuisse diximus, simul imminuta est. Pari ratione nec Gassendus brachia ulla percipere potuit mense Febr. anni 1643. etsi tunc quoque Sol oculusque observantis eandem annuli superficiem intuebantur; scilicet quia Saturni locus eccentricus in gr. 26. ♓ inveniebatur, hoc est 5½ gr. à loco æquinoctii, eoque altitudo Solis supra annuli superficiem tantum g. 2. 11'. Denique & anno 1656, mensis Martii diebus aliquot, quibus similiter eadem annuli superficies ad nos Solemque spectabat, multo minus brachiorum ullum vestigium apparere debuit, quod nunquam dimidio gr. supra planum annuli Sol attolleretur. Nam reliquo tempore fulsionis illius, diversas partes loci æquinoctiorum locus Saturni ex Sole atque observatus locus obtinebant, unde ex superius allata causa brachiorum expertem cerni oportuit.

Neque verò magis conspicuum nobis annulum fieri credendum est, si altius supra planum ejus oculus attollatur, Sole tamen ex obliquo tantum radiis suis eum perstringente, quemadmodum contigit dicta Saturni statione ad 14 Nov. 1612; quippe quo tempore Sol gradu 1. 36' supra planum annuli ascenderat, visus autem noster gr. 3. 53'. Idem enim in quacunqne plana superficie experiri licet, in quam si à latere radii luminis incidant, non apparebit illustrior quocunque in loco visus statuatur, sed tum demum, si radios à lumine rectiores accipiat. Uti contra quoque si amplius ad lumen obversa directiusque illuminata fuerit, non refert quàm obliquê in eam radii visus incidant, sed undecunque spectata æque lucida apparebit. Atque ita fit ut cum Sol paulo altius supra planum annuli sese extulit, tribus puta gradibus aut paulo amplius; visu licet nostro non nisi uno gradu extante; splendere jam nunc annulus incipiat, Saturnoque brachia adnascantur. Sicut anno 1612. circa solstitium accidit, Saturno ex Sole circa gr. 12. ♓, hoc est, gr. 8½ ab æquinoctio suo agente, ac proinde Solis altitudine supra planum annuli graduum 3. 23': Galilæi verò oculo vix uno gr. supra idem planum elevato. Videbatur enim Saturnus

nus in gr. 18. ♓, hoc eſt 2½ gr. à loco æquinoctii, quæ diſtantia dat declinationem gr. unius.

Ut igitur ſecundum hæc de rotunda phaſi judicium feratur, illud in primis reſpicere oportet, quod gradibus ab æquinoctio ſuo, hoc eſt, à gr. 20½ ♍ vel ♓, Saturni locus eccentricus abſit. Ac mihi quidem phænomena antecedentia expendenti, videtur ita ſtatuendum, ut quoties non amplius quam 6 gr. circiter in alterutram partem, à dictis locis Saturni locus ex Sole diſtabit, nunquam brachia ejus conſpici queant, quicunque demum oculi noſtri ſitus fuerit; hoc eſt, nulla ducta ratione Saturni loci apparentis. Quod tamen ita accipiendum eſt, ſi perſpicillis non melioribus quam quibus Galilæus & Gaſſendus uſi ſunt Saturnus inſpiciatur. Nam ſi noſtris ſimilia adhibeantur, forſitan jam in illa 6 graduum diſtantia tenue quoddam brachiorum exordium percipi poſſit. Certè anno 1656, 13. Oct. renata illa vidimus, cum Saturni locus ex Sole tantum gradibus 6. 46′. æquinoctii ſui punctum prætergreſſus eſſet. Erant autem æquè conſpicua ferè atque ante phaſin rotundam, anno 1655. At ii qui minoribus teleſcopiis eum tunc obſervitabant, ut Joh. Hodierna, penè adhuc rotundum repererunt: ait enim is, tantum tenuiſſimos quoſdam veluti radios utrinque è lateribus Saturnum vibrare viſum. Quamobrem noſtris teleſcopiis fortaſſe arctiores paulò prædicti limites ſumendi ſint; quod tamen minimum quid erit, ſequentiumque annorum experientiâ definiendum.

Saturnus brachiorum expers futurus quo modo cognoſcatur.

Rurſus cum amplius 9. gradib. vel forſan ſupra 8. gr. ſolum, ab æquinoctiis ſuis ſive 20½ gr. ♍ aut ♓ locus Saturni eccentricus diſtare invenietur, jam inde brachiis anſiſve præditum dicemus: nullâ ne hic quidem apparentis loci conſiderátione, quoniam hinc jam apparens locus & eccentricus ab eadem parte loci æquinoctialis habentur; ac propterea eadem annuli ſuperficies, per ea quæ ſupra demonſtrata ſunt, Soli & viſui noſtro obverſa eſt, idque ita ut Sol plus tribus gr. ſupra ipſam elevatus ſit, viſus vero noſter ut minimum gr. uno: quo fit ut brachia ſaltem tenuia animadverti debeant.

At

At cum nondum gr. 8 aut 9, plus verò quam senis, eccentricus locus Saturni à 20½ gr. ♍ aut ♓ aberit, videtur etiam apparens locus expendendus esse, nempe circa quadratum quem vocant Saturni cum Sole aspectum. Fieri enim poterit ut non ultra gradus unius semissem locus apparens ab æquinoctii loco remotus sit, ideoque visus noster tantum 12′ super annuli superficiem exurgat; quæ cum à Sole simul debiliter illuminetur, vix puto se videndam præbebit. Quum autem duo contingant quadrati aspectus singulis Saturni fulsionibus, priori eorum ita demum illud quod diximus perpendere opus erit, si locus planetæ ex Sole præcedat gr. 20½ ♍ aut ♓, posteriori verò non nisi sequatur. Nam si secus fuerit jam certo brachiis auctus cernetur.

Et sic quidem quod maximè perplexum in toto hoc negotio inerat, nulla dissimulata difficultate, pertractavimus. Illud enim inquirere voluimus an certis locis rotunda phasis alligari posset, ita ut omnibus huc usque observatis fieret satis. Quod & præstitimus tandem, etsi arctis adeo limitibus circumscripti, ut ne minimum quidem ultra citrave ab iis discedere salvis apparentiis licuerit. Simul verò hoc operæ pretium fecimus, quod de futuris Saturni phasibus haud dubia prænuntiare in posterum licebit. Etenim si modo tabularum Astronomicarum ope inveniatur, quo tempore Saturni locus ex sole sive eccentricus, cadat in gr. 20, 30′ ♍ vel ♓; senis mensibus qui id tempus præcedunt totidemque sequentibus brachia nulla percipi posse manifestum erit; quoniam scilicet in menses singulos gradu uno Planetæ locus ex Sole promovetur. Præterquam quod aliquando uno etiam atque altero mense citius rotunda phasis existet, aliquando tanto diutius videri perseverabit; si nempe quadrante cæli per id tempus Saturnum à Sole distare contingat, locusque Planetæ eccentricus, ea qua diximus lege, præcedat vel sequatur ♍ aut ♓ gr. 20. 30′.

Secundùm hæc igitur, quoniam in gr. 20, 30′ ♓ incidit locus eccentricus die 12. Jan. 1672″, existimo anno 1671 & 1672 Saturnum brachiis cariturum; non toto utriusque anni tem-

tempore, sed hoc pacto, ut mensibus quidem Aprili, Majo, Junioque anni 1671, nondum iis spoliatus cernatur, sed tenuia etiamnum utrinque extent qualia sub finem anni 1656 observavimus. Julio autem aut Augusto gracilescant prorsus tandemque disspareant & rotundum Saturnum relinquant. Quo vultu non tantum ad Heliacum occasum usque conspiciendus erit, hoc est usque ad finem Februarii anni 1672; sed eundem quoque exoriens rursus mense Aprili referet, nec amittet nisi Julio mense aut Augusto. Circa hoc enim tempus adcrescere denuo brachia cernentur, ac paulatim evidentiora fieri; tandemque etiam singula prope medium Saturni orbem bifida evadent, quemadmodum ab anno 1656 deinceps augeri ea vidimus.

Quibus temporibus rotunda phasis reversura sit prædicitur.

Manebunt autem ad annum usque 1685, quando rursus evanescentia spectare continget, nempe circa Martii initium. Inde rotundus planeta observabitur per annum integrum, excepto eo tempore quo propter Solem delitescit. Adeo ut mense Martio sequentis anni 1686 brachia demum recuperaturus sit, sed tenui tantum incremento quandiu illa vice visendus erit. Locum Saturni ex Sole reperio in gr. $20\frac{1}{2}$ ♍ die secunda Sept. anni 1685, unde prædictas vicissitudines consequi necesse erat.

Rursus verò anno 1701, 15 Jun. redit Saturni locus ex Sole ad ♓ gr. 20, 30′. Unde circa finem anni 1700, principiumque 1701, priusquam Heliace occidat, rotundus lucebit, ac porro quoque ubi jam ex Solis radiis emerserit, ea facie permanebit ad initium usque anni 1702: à quo tempore ad occasum usque Heliacum tenuia fortasse brachia cerni poterunt. Absque dubio autem, mense Majo ejusdem anni, cum denuo observari cœperit, restituta invenientur.

Atque ita porro singulis quatuordecim aut quindecim annis, nimirum bis ad singulas Saturni in sua orbita revolutiones, rotunda forma conspicienda dabitur; neque enim unquam æquinoctii sui locos transire quin brachia amittat potest. Ac facile quidem accurata mutationum ejusmodi tempora vestigiis nostris insistendo, quilibet inposterum præfi-

niet, certiusque etiam ubi renascentes Saturni ansas conspexerit.

Cæterum ad eos observandos, quos hic adnotavimus, alatæ formæ ad rotundam transitus, Astronomos omnes intentos esse cupimus. In quorum prædictione si à veritate aut nihil aut pauxillum tantum aberrasse nos invenient, tum procul dubio causas quoque horum phænomenôn germanas qualesque revera sunt sibi explicitas credant. Sin longè hallucinati fuerimus, adeo ut brachiis præditus planeta cernatur, quo tempore ex sententia nostra vel maximè iis carere deberet; indicio id erit, quædam circa rotundam phasin accidere nobis nondum satis perspecta, nec ulli mortalium forsitan pervidenda. Nec tamen annuli propterea hypothesin rejiciendam existiment, quandiu reliquis quæ circa ansas animadvertentur ad amussim, uti hactenus, consentiet.

Quando latissimæ omnium ansæ apparituræ sint.

Porro in hisce ansatis Saturni phasibus, cum nulla adeo subita mutatio locum habeat, ideo nec tempora singularum tam accuratè ut in rotunda distinguere necesse fuit; sed in universum scire sufficit, phasin ansatarum latissimam medio tempore inter duas rotundas incidere; ut proinde circa annum 1663 & 1664 illa reversura sit; iterumque anno 1678 & 1679; ac postea anno 1693. Reliquis enim inter istos intercedentibus annis, tanto angustior annuli ellipsis cernetur, quanto magis rotundæ phaseos tempus imminebit. Et hactenus quidem eorum quæ circa Saturnum observantur causas ac tempora digessimus.

Nunc fortasse haud alienum proposito videatur, si quemadmodum ex nostra hac statione hucusque systema ejus contemplati sumus, ita ad ipsius Saturni globum deinceps cogitationem transferamus, atque illud dispiciamus, qualis inde universi facies, quænam futura sint intervalla annorum mensium ac dierum, quæve æstatis hyemisque vicissitudo, ac præsertim qualia ob annulum planetæ circundatum contingere eum inhabitantibus necesse sit: ut nonnunquam longo tempore aliquos conspectu Solis privet, aliàs rursum nocturnas tenebras imminuat, arcus lucidi specie horizonti illo-

lorum superstans. Verum eo labore supersedere rectius arbitror, tum quod Astronomiæ gnaris singula hæc expendere, sibique ob oculos ponere, non sit difficilè futurum; tum quod in his ipsis multi sint, (ut alios mittam) quibus otiosa & inanis ejusmodi disquisitio videretur; ac tanto quidem magis, quanto absurdius putant ut animantia aliqua ratione prædita Saturnum ac reliquos Planetarum incolere credamus.

De Saturni magnitudine & a terris distantia.

De magnitudine autem Saturni ejusque à terris distantia operæ pretium videtur ut sententiam nostram his subjiciamus, siquidem & alio modo illas inquisivimus quam quo fieri solet, & aliquanto aliter de utraque statuimus. Nempe sphærulam illam annulo cinctam quam sub exiguis modo lineamentis spectavimus, diametrum quindecies circiter majorem habere, quam nostra hæc in qua degimus terra, putandum est; abesse autem à nobis, cum poxima est, terræ diametris 100344; cum longissimè distat, 122000. Quæ quidem sequenti ratiocinio nituntur.

Docuit nos novo suo ac divinitus invento systemate Copernicus, quamnam inter se proportionem servent singulorum à Sole Planetarum distantiæ, apparentes vero eorundem diametri quanto aliæ aliis majores sint telescopii ope innotescit. Collatis ergo invicem rationibus utrisque, tum distantiæ tum magnitudinis apparentis, vera inde planetarum ad se mutuo, nec non ad Solem magnitudo cognoscitur. Et ad Saturnum quod attinet, primùm annuli ejus diameter quum in minima à nobis distantia comprehendatur angulo sexaginta & octo scrupulorum secundorum; talem enim ad summum reperimus; cumque minima hæc Saturni distantia ad mediocrem Solis distantiam sit fere octupla; sequitur, si tam propinquus nobis fieret Saturnus quam Sol in distantia mediocri, apparituram tunc annuli diametrum octuplam ejus quæ nunc apparet, hoc est 9′, 4″. Solis autem diameter in media distantia est 30′, 30″. Ergo revera ea erit proportio diametri annuli Saturnii ad diametrum Solis quæ 9′, 4″, ad 30′, 30″, hoc est, fere quæ 11 ad 37. Diameter vero Sa-

Quanta appareat major Saturni diameter.

turni ipsius, quam superius diximus ad annuli diametrum se habere ut 4 ad 9, hoc est fere ut 5 ad 11, ad diametrum Solis erit paulo minor quam 5 ad 37.

Quanta vero sit Saturni diameter ad Telluris diametrum collata haud æque certo definiri potest. Astronomi ita hoc investigant, ut primò intervallum inter terram ac Solem ad certum terrestrium diametrorum numerum revocent, inde quæsitam magnitudinum rationem eliciant. At in illo Solis terræque taxando intervallo nimium quantum inter se dissentiunt; nec mirum, quum nulla adhuc tolerabilis methodus ad dimetiendum hoc spatium reperta sit. Nam sive per Eclipses sive per Lunæ dichotomias id deprehendere conentur, facile ostendi queat inanem operam sumi. Quare mihi quidem unica illa, quam dicam, ratio reliqua esse videtur, qua saltem verisimiliter de Planetarum omnium ad terram magnitudine ac distantia statui possit. Telescopio diametri Planetarum apparentes explorentur; ex his singulorum deinceps ad Solem comparata magnitudo investigetur, ut de Saturno modo exemplum dedimus; omnibusque perpensis, ea Telluris ad cæteros assumatur magnitudo, quæ totius systematis ordini aptæque dispositioni quàm maxime congruere videbitur. Ita cum proportio diametrorum Telluris ac reliquorum Planetarum ad Solis diametrum constituta fuerit, constetque insuper quot suis diametris Sol à nobis distet, ex angulo videlicet quem subtendit diameter ejus apparens, jam terræ quoque ad Solem magnitudo nota erit; atque unà Solis distantia, tum à terra tum à cæteris Planetis, Terræ diametris æstimabitur. Hanc itaque nunc viam ingredi placet, ideoque sicut Saturnum cum Sole modo comparavimus, ita de reliquis quoque simile examen instituemus.

Jovis terris proximi diameter apparens quanta observetur.

Jovis diameter, cum proximè nobis adest, sexaginta quatuor secunda scrupula comprehendere mihi videtur; quumque hæc ejus distantia ad mediam Solis distantiam sit ut 26 ad 5, hinc si fiat ut 5 ad 26 ita 64″ ad aliud, invenientur 5′, 35″, amplitudo anguli quem obtineret Jovis diameter si tam propinquus nobis fieri intelligatur atque Sol in distantia me-

mediocri. Sol autem hîc apparet diametro 30′, 30″. Ergo Jovialis diametri ad Solarem hæc proportio erit quæ 5′, 35″ ad 30′, 30″, hoc eſt paulo major quam 1 ad 5½.

Veneris diameter apparens. Accuratè etiam diametrum Veneris dimenſus ſum, ea quam poſtmodum exponam methodo, invenique cum terris proxima eſt, non majorem fore quam octoginta quinque ſecundorum ſcrupulorum. Eſt autem diſtantia hæc Veneris perigææ ad mediam Solis à Tellure diſtantiam circiter ut 21 ad 82. Ergo ſi apud Solem Venus conſiſteret appareret ejus diameter duntaxat 21″, 46‴. Unde conſtat ita eſſe diametrum Veneris ad Solis diametrum ut 21″, 46‴ ad 30′, 30″, hoc eſt ut 1 ad 84.

Martis diameter. At Martis diametrum terris proximi non excedere 30″ deprehendi, etſi obſervatione non tam exacta quam qua in Saturno, Jove & Venere uſus ſum, quippe cujus rationem noviſſimo Martis ad Tellurem acceſſu nondum inveneram. Unde quum diſtantia Martis minima ſit ad mediocrem Solis ut 15 ad 41; colligitur ratio diametri Martis ad diametrum Solis ea circiter quæ 1 ad 166. Mars itaque duplo minor Venere ſecundum diametrum hac ratione efficitur. Atque adeo manifeſtum eſt in Planetis non ubique eum ſervari ordinem, ut qui remotiores à Sole ſunt iidem quoque majori ſint mole: nam & Jovis ſphæra Saturno ſine annulo major inventa eſt. Quo fit ut minus liquido de Terræ ad cæteros Planetas proportione æſtimatio iniri poſſit. Nam ſi pro ratione ordinis magnitudines eſſent attributæ, ut Saturnus Jove major eſſet, Jupiter Marte, hic Venere, hæc Mercurio; inde quidem penè certo colligere liceret, Telluris magnitudinem eſſe inter Martem Veneremque mediam. Cum verò in aliquibus contrarium deprehendatur, non æquè quid ſequendum ſit apparet. Veruntamen ut quatenus fieri poteſt totius ſyſtematis concinnitas obſervetur, id nunc quoque maximè conſentaneum videtur, ut ſicut loco media Terra eſt inter Martem & Venerem, ita quoque ſit magnitudine. Martis diametrum diximus diametri Solis eſſe $\frac{1}{166}$; Veneris verò diametrum $\frac{1}{84}$. Inter utramque mediam igitur terræ dia-

metrum ponendo fiet ea $\frac{1}{111}$ diametri Solis. Hujus autem $\frac{5}{37}$ diametro Saturni æquales repertæ ſunt; ergo Saturni diameter Telluris diametrum continebit quindecies, diameter vero annuli Saturnii eandem Telluris diametrum circiter trigeſies & quater Unde eximia horum corporum magnitudo cognoſcitur; quæ ſane omnem ab aliis hactenus traditam facile exuperat.

Hinc verò & intervallum inter Terram ac Solem neceſſario omnium exiſtimatione majus conflabitur. Si enim diameter terræ diametri Solis $\frac{1}{111}$ continet; Solis autem diameter ſuæ à nobis mediæ diſtantiæ $\frac{1}{113}$ æquat, uti ſequitur ex eo quod diameter ejus obſervetur 30′, 30″; erit certè Terræ diameter $\frac{1}{12543}$ diſtantiæ quæ eſt inter ipſam ac Solem. Deinde cum Saturni minima diſtantia ſit ad mediam Solis diſtantiam ferme octupla, hinc Saturni, cum Terræ proximus eſt, diſtantia habebitur diametrorum terreſtrium 100344; cum verò plurimum aberit, circiter 122000.

Fateor equidem lubrica eatenus ratione hæc niti, quatenus nimirum Terræ magnitudinem inter Martem Veneremque mediam adſumſimus, nullo niſi veriſimilitudinis argumento: adeoque vel millenis aliquot Terræ diametris facile à veritate aberrari potuiſſe Verùm ut jam duplo majora minorave quam reipſa ſunt intervalla iſta definiverimus, aut triplo etiam; non tamen parum videri debet hactenus ſaltem menſuram eorum comprehendiſſe, quum alia nulla ratio ſuperat qua non vel decuplo major error timendus ſit. Ita enim omnino exiſtimo. Ad reliquum verò calculum quod attinet, quo Planetarum diametros Solis diametro comparavimus, ſciendum eſt nihil in eo conjecturæ tribui, ſed ex iis quæ data ſunt certa ratione illum procedere. Atque adeo poſitis iis Planetarum diametris apparentibus quas à nobis obſervatas diximus, non poſſe non Solis diametrum ad diametrum annuli Saturno circumdati ſeſe habere ut 37 ad 11; ad diametrum vero Saturni ipſius, ut 37 ad 5; ad Jovis diametrum ut 11 ad 2; ad Martis ut 166 ad 1; ad Veneris ut 84 ad 1. De Mercurio non definiam priuſquam ritè eum dimen-

Diametri Solis ad Planetarum diametros ratio.

mensus fuero; quod hactenus non successit, cum ob exilitatem sideris, tum quod horizonti plerumque vicinum inveniatur, ubi vapores è Terra surgentes tremula quadam refractione figuram ejus præciso ambitu terminari non sinunt. Patet autem & Saturnii globi diametrum ad diametrum Jovis rationem habere quam 55 ad 74: diametrum vero Martis continere amplius quam vicies & bis, ad Veneris diametrum esse ut 34 ad 3. Jovis item diametrum diametri Martis amplius quam trigecuplam esse; diametri vero Veneris amplius quam quindecuplam; ac denique Martis diam. ad diametrum Veneris circiter subduplam. Quæ omnes proportiones ratæ fixæque permanent, quantacunque distantia Solem inter ac Tellurem statuatur, si modo apparentes diametri quales tradidimus retineantur. Hasce autem quo modo observaverimus denique dicendum est, atque eo magis quod longè ab aliorum sententia alicubi recedamus: veluti cum Veneris diametrum triplo minorem asserimus quam à Ricciolo definita est, qui tamen summa cura circa hæc versatus videtur. Nostrum igitur artificium est hujusmodi.

Locus quidam est intra tubos qui Solis convexis vitris instructi sunt, circiter altero tanto amplius quàm convexum oculare ab oculo distans; quo in loco si quid intra tubi cavitatem visui objiciatur, quantumvis subtile aut exiguum, id distinctè prorsus ambituque exquisitè terminato conspicitur, atque ita pro ratione latitudinis suæ partem aliquam rei lucidæ, velut Lunæ per telescopium spectatæ, visui subducit. Exacta loci determinatio, his quibus nullo vitio visus laborat, in focum convexi ocularis cadit; myopi aliquanto propinquius punctum accipiendum est, contraque, qui tantum à longinquo clare vident, paulo remotius; quod experientia protinus docere potest. Hîc igitur si primò annulus statuatur cum foramine paulo angustiore quam sit vitrum ipsum oculo proximum, eo tota tubi apertura, sive spatium circulare quod uno obtutu in cælo detegitur, præcisâ circumferentiâ descriptum habetur. Cujus spatii diameter, quot scrupula comprehendat, aliquo pacto inquirendum est, atque optimè qui-

Ratio observandi Planetarum diametros apparentes accuratissima.

quidem ex tranſitu ſideris alicujus, cujus tempus numeretur vibrationibus perpendiculi, vel ope Horologii noſtri oſcillatorii nuper inventi, teleſcopio interim immoto manente. Scimus enim 4 ſcrupulis horariis unum cæli gradum & exiguum quid amplius tranſire: ideoque ſi verbi gratia numerentur ſcrupula ſecunda 69 interea dum ſtella quædam fixa totam teleſcopii capacitatem emetitur, argumento id erit $17\frac{1}{4}$ ſcrupula prima, teleſcopii hujuſmodi apertura comprehendi, ſicut noſtro evenit. Quo invento virgulam unam atque alteram ex ære aliave materia parare oportet, decreſcente paulatim latitudine, tubumque perforare utrinque circa locum illum paulo ante memoratum, quo poſſint in ipſo ejus puncto virgulæ tranſverſæ ante oculum obtendi. Cum igitur Planetæ alicujus diametrum metiri cupimus, adhibitâ eo quo diximus loco virgulâ, notandum eſt quænam hujus latitudo totum Planetam contegere poſſit. Eâ enim latitudine acuto deinde circino acceptâ, atque ad totius foraminis amplitudinem collatâ, Planetæ diameter apparens facili ratiocinio innoteſcet. Sic die 29 Dec. 1658 diametro Veneris invenimus convenire virgulam cujus latitudo æquabat $\frac{1}{20}$ totius foraminis: eſt autem hoc, uti diximus, 17′, 15″. Ergo Veneris diameter erat 51″, 45‴. Diſtantia autem Planetæ ad minimam ſuam à Terris diſtantiam ſe habebat circiter ut 27 ad 16, ergo diameter ejus terris proximæ efficitur 87″, 20‴. Rurſus anno 1659, 8 Mart. hora 6 mat. Veneris diametrum obſervavimus quæ æquabat $\frac{4}{67}$ aperturæ teleſcopii. Ideoque erat 61″, 30‴. Diſtantia autem eo tempore ad minimam Veneris à terris diſtantiam ſe habebat ut 430 ad 316, ergo diameter ejus maxima fit 83″, 40‴. Sed & alias eadem methodo ſemper tantum paulo majorem minoremve invenimus, nam ſæpius examen hoc repetivimus, atque ex omnibus medium quid ſumentes, 85″ pro maxima Veneris diametro ſupra ſtatuimus. Hanc autem Ricciolus 4′, 8″, taxavit, atque adeo triplo quam nos majorem exiſtimat, ſed procul dubio nuda illa oculi æſtimatione, qua hîc uſus eſt, in tantum deceptus fuit. Nam Saturni Joviſque diametros, quas methodo certio-

Diameter Veneris obſervata.

tiori, appulsu nimirum ad fixas investigavit, eadem fere qua & nos amplitudine definiit, paullum tantum excedens: Saturni enim maximam 72″ continere asserit, Jovis item maximam 68″, quæ mihi sunt 68″ & 64″. Certum autem est non magis in Venere, quam in Jove aut Saturno dimetiendis, errori obnoxiam esse rationem nostram. Et Veneris quidem diametrum Hevelius quoque, ad Lunæ maculas instituta comparatione, tantum 82″ se invenisse testatur cum circa perigæum versaretur, unde diameter ejus maxima non multum sanè nostram superabit. Porro illud in methodo à nobis tradita commodissimum accidit, quod nec Lunæ, nec sideris cujusquam conjunctionem, cum eo quem metiri volumus planeta, opperiri necesse est, sed omni tempore ejus usus conceditur. Nec ad planetarum tantum diametros pertinet, sed ad lunares quoque maculas accuratè describendas, comitumque Jovialium distantias accipiendas rectissimè adhibebitur. Ad planetarum autem diametros longis atque optimæ notæ telescopiis opus esse sciendum est. Nec negligendum in Venere ac Mercurio, ut fuligine leviter inficiatur lens oculo proxima, quo perfectius planetæ ambitus circùm terminetur.

FINIS.

EUSTACHII DE DIVINIS SEPTEMPEDANI

BREVIS ANNOTATIO

IN

SYSTEMA SATURNIUM

CHRISTIANI HUGENII.

AD

SERENISSIMUM PRINCIPEM

L E O P O L D U M

Magni Ducis HETRVRIÆ Fratrem.

Eustachii De Divinis Septempedani

BREVIS ANNOTATIO IN SYSTEMA SATURNIUM CRISTIANI HUGENII.

SERENISSIME PRINCEPS

NOn ita pridem Christiani Hugenii liber de Saturnio systemate Celsitudini tuæ Serenissimæ inscriptus in meas manus incidit, in quo, & de me unum quidpiam, & de reipsa nonnulla esse comperi, quæ cum veritate minùs consentiant. Nollem literatos homines, quibus telescopii majoris copia non est, in errorem induci; cum jam alioquin satis proclives sint ad excipiendam credulis auribus, vel oculis eam rerum cœlestium novitatem, quæ hactenus incompertæ orbi fuerunt: Accedit, quod libelli auctor eam diligentiam à se adhibitam esse attestatur, qua certè quispiam majorem in illo non desideret; quod revera non parvi ponderis est, ad captandam hominum credulitatem, errorem que in eorum animos insinuandum. Itaque meum esse duxi, tum ea, quæ mihi affiicta sunt, tum ea, quæ cœteris omnibus errandi occasionem facilè præbere possent, brevi hoc & publico scripto refellere; brevi quidem, ne plus æquo legentibus molestum sit; publico verò, ne privati Hugenii errores publici fiant; aut si jam publici facti sunt, ne quid

inde respublica literaria detrimenti capiat, ut publicè à me configantur. Quia vero Hugenius tuis auspiciis libellum suum vulgavit, iisdem ego potiori jure brevem hanc discussionem in publicam lucem prodire volui, qui tot nominibus Celsitudini tuæ Serenissimæ, totique plusquam regiæ Mediceorum familiæ obstrictus sum.

Tria igitur in hac scriptione præstabo; primò enim affictam mihi fraudem amoliar; aliquot deinde Auctoris errores indicabo, ea tamen styli moderatione, quæ & Christianum, & ingenuum, ne dicam, EUGENIUM, hominem deceat: cum demum Auctor scripserit pag. 1. phænomeni Saturni rationem & causam nec Galilæo, nec Astronomorum cuiquam compertam fuisse, eamque dumtaxat explicari posse, inserta Saturnio globo splendentis annuli corona, ne Jovi, quem astra Medicea jure coronant, detrahi corona & jam olim exauctorato Saturno restitui videatur, Fabriani systematis rudimentum quoddam breviter exponam, in quo, adducta Saturni phænomena ea facilitate explicantur, qua, nescio, an major excogitari possit; in ea scilicet terræ quiescentis hypothesi; quam catholici Astronomi amplecti dumtaxat & contra Heterodoxos Aristarchos tueri debent. Cæterùm illa omnia, quæ à me scribentur, æquissimæ tuæ censuræ, ac recto judicio subjecta esse velim; nec abs re, opinor, cùm te literati omnes, ut Mecænatem; & politiorum operum artifices, ut singularem patronum colant; sed ad rem venio.

Primo igitur loco Hugenius, antequam systema Saturnium aggrediatur, præmittit sui telescopii descriptionem; cum enim, ut ipse ait, alia perspicilla non essent, nisi quinque aut sex pedes longa, seriò & maximo studio ad longiora fabricanda animum & manum applicuit: sed advertere potuit ac debuit, in illa observatione mea Saturni, quam ipse refert, mentionem à me factam fuisse telescopiorum variæ longitudinis, quæ ad prædictas observationes adhibueram, scilicet 15. 24. & 36. palmorum; multa autem hujusmodi fabricavi; Illustrissimus Eques Dighby, vir ut nobili genere, ita ingenio perspicacissimo & omni doctrinæ genere conspicuus sex, cum

Ro-

Roma discessit, secum detulit; unum Thomas Paggi nobilis Anglus; Taurinum alterum missum est; Fabritius Guastaferrus Romanus, vir consuetudine & amicitia mihi conjunctissimus, rerumquè optimarum studiosissimus, unum habuit; Bononiam unum misi ad Illustrissimum Comitem Carolum Antonium Manzinum, virum sanè rerum istarum peritissimum, doctorem eximium, cujus Dioptricam in dies expectamus, in qua haud dubiè ea legemus, quæ multi hactenus desiderarunt: Unum etiam fabricavi Illustrissimo D. Caramuel Campaniæ Episcopo; omitto alia; nihil enim aliud jam à multis annis ago.

Tum describit telescopium à se fabricatum, longum pedes Rhenolandicos 23. qui si reducantur ad palmos Romanos, quos adhibent architecti, faciunt palmos 31. uncias 4. Vitri objectivi (sic vulgò vocant) orbis apertus diametrum habet pollicum 2. cum triente: seu palmi Romani unc. 3. scrupul. 1. Vitrum oculare ex duobus invicem unitis constans, lenti æquivalet, & radios, parallelos colligit, ac projicit in focum, distantem pollic. 3. prædicti pedis, id est, uncias 4. scrup. 2. palmi Romani: inde porrò deducit Hugenius, vitrum suum objectivum exquisitum esse, cum sit patiens lentis adeo acutæ, ut vocant, & ad veras Saturni observationes, ejusmodi tubos, & vitra adhiberi vult.

Hæc facilè omittere Hugenius potuisset; nec enim his regulis opus erat, cum longè ante fabricata fuerint telescopia, quæ tum longitudine, tum vitrorum figura, tum operis perfectione Hugenianis minimè cedunt; adhibui aliquando tubum 36. palmos longum, ac proinde longiorem Hugeniano palmis 4. unc. 8. orbis autem aperti diameter fuit unc. 4. scrup. 2. sed sublatis 2. illis scrup. propter longitudinis differentiam 4. scilicet palm. unc. 8. restat diameter orbis mei vitri, major diametro orbis vitri Hugeniani unc. 1. ac proinde vel hoc nomine, meum telescopium Hugeniano præferendum, ex vulgari & ab omnibus accepta regula; cum scilicet majoris aperturæ, ut sic loquar, vitrum objectivum patiens sit.

Præ-

Præterea fruſtra omnino duo vitra in vitrum oculare utrinque convexum conjunxit; cùm unica lens ſufficiat: Ego lentem in prædictis obſervationibus adhibui, radios parallelos colligentem, & projicientem in focum diſtantem unc. 3. ſcrup. 2. ſed hæc diſtantia minor eſt diſtantia projectionis Hugenianæ unc. 1. igitur lens mea acutior: licet tubi mei longitudo major ſit; & cum ex hoc teleſcopia cenſeantur, ut optimè ipſe obſervat; inde certè pari jure deduco, meum teleſcopium præſtantius eſſe, idque triplici nomine. Primò, quia longius eſt. Secundò, quia vitrum objectivum habet majoris aperturæ patiens. Tertiò quia lentem acutiorem ſuſtinet.

Hugenius pagina libelli 37. de me ita ſcribit. *Tales autem* (Saturni ſcilicet anſas) *Euſtachius de Divinis notavit annis* 1646. 1647. 1648. *à quo editum Schema ad numerum* 10. *hic exhibuimus; iſque cum præſtantiſſimus perſpicillorum artifex habeatur, credibile eſt, omnium emendatiſſimè Saturni faciem deſcripſiſſe, niſi quod umbras illas, quæ in ſchemate apparent, de ſuo, ut opinor, adjecit.* Eſt ſanè, quod multas illi gratias habeam, pro iis laudibus, quas mihi ignoto homini ac minimè cogitanti aſperſit; ſed quid hoc eſt, *de meo adjeciſſe*, niſi hominibus impoſuiſſe? Si enim de meo eſt, fictum eſt, nec reipſa talem Saturnum exhibui, qualem obſervavi; quia de meo umbras illas adjeci, quas in Saturno non vidi, nec videre potui, cùm revera in Saturno non ſint; fabula igitur eſt, fictio eſt; immo in re tanta pro luculenta fraude haberi debet, cum inde homines in errorem facilè inducantur. At ſi umbras de meo adjeci, Hugenius ejuſdem criminis reus eſt, qui paſſim, ut ſuum annulum Saturno injectum meliùs exprimeret, longe majores umbras adjecit: ſed profectò neuter adjecit de ſuo; ut enim globus, corpus ſcilicet ſolidum, in plano deſcribatur, aliquid umbræ accerſendum eſt, quo figura ſolida exprimatur & appareat, alioquin merus circulus evadet: Quis vel tyro in arte graphica hoc neſcit? Umbras ſcilicet accerſendas eſſe ad figuras ſolidas deſignandas. Umbram igitur de meo

TAB. LII. fig. 10.

meo non adjeci, sed globum in plano descripsi, qui tamen sine umbræ beneficio describi non potuit; Umbra enim facit, ut reliquum figuræ quasi extare, ac prominere videatur; in quo uno stereometria ab ichnographia discrepat: aut fortè dicere voluit, cavitatem ansulæ Saturniæ nigriore, quàm par sit, umbra, à me fuisse fœdatam: cum tamen ejusdem cum reliquo cælo coloris esse videatur; sed pace illius dixerim; quotquot ansarum cavitates vidimus, nigriores reliquo cælo, & magis atras aspeximus, neque hoc telescopii vitio quisquam tribuat; nempe si revera ansæ illæ vacuæ sunt, & ad ipsum cælum radii visorii per illas trajecti terminantur, ejusdem cum cælo coloris erunt, quocumque tandem telescopio aspiciantur. Itaque, quod mihi Hugenius pro sua humanitate, præstantissimi artificis elogium attribuit, ut me præstantissimum esse non admitto, ita pro iis laudibus, quæ in me non quadrant, gratias, ut jam dixi, habeo; quia tamen unde altiùs extollit, inde profundiùs deprimit, dum fabricacati à me telescopii fidelem usum desiderat, utpote quod Saturnios satellites ea forma, eoque vultu non exhibeat, quo revera exhibendi essent, ad alterum caput venio, in quo luculenter ostendam, Hugenium in nonnullis hallucinatum esse, quod an perspicillis ab eo fabrefactis tribuendum sit, an verò auctoris fictioni, alius fortè dubitaret; ego sanè doctissimi hominis candori nihil detractum velim, quare haud dubiè telescopii vitio, quidquid erroris admisit, tribuendum esse judico: leges porro, quas vitris suis pag. 3. & 4. præscripsit, sufficiat supra indicasse.

Constat verò auctorem duobus telescopiis usum fuisse, in traditis observationibus; primum fuit 12. pedum, vel palmorum 16. more Romano paulò plus, duobus convexis instructum; alterum 23. pedum, de quo supra; In hoc, ejus dictis standum esse puto: Ego tamen, ut dixi, longius telescopium adhibui, scilicet triginta sex palmorum; quare non dubitarim, quin Saturnum mihi æquè perspicuè exhibeat; præsertim cum vitra satis accuratè, & diligenter elaborari, tornari, formari, lævigari à me soleant: si Hugeniani tele-

ſcopii mihi copia fieret, facilis comparatio inſtitui poſſet, quam certè ab ipſo Hugenio inſtitui poſſe, nihil vetat; cum enim per totam Europam perſpicilla à me fabrefacta, diſtracta jam & quaſi diſſeminata fuerint, in ejus manus facilè venire potuerunt: rem narro, quæ mihi ante aliquot dies, accidit; Jam unus, vel alter annus elapſus eſt, ex quo R. P. Antonius Maria de Reitha Bononiam veniens, teleſcopium, quod ſecum habebat, 24. palmorum, mirificè prædicabat, aſſerebatque, nullum ejuſdem longitudinis in Italia eſſe, quod ſuo non cederet; hujus rei certior factus ab Illuſtriſſimo Comite Car. Ant. Manzino viro, ut dicam iterum, rerum iſtarum peritiſſimo, & curioſiſſimo, ad eum miſi, ut ipſe petierat, teleſcopium ejuſdem longitudinis, utrumque æqualium virium, & ejuſdem bonitatis repertum eſt; hæc jam penè mihi exciderant, cùm ecce Illuſtriſſimus Dominus de Monconis, nobilis Lugdunenſis, vir, tum ingenio, tum genere pleriſque notus, incogitanti mihi, poſtridie cinerum adfuit; poſt ſolita urbanitatis officia, cùm inter colloquendum, de perſpicillis mentio facta eſſet, non habeo ampliùs, inquit, tuum illud teleſcopum 24. palmorum, illudque ſanè optimum, quod ante aliquot annos Lugdunum ad me ignotum licèt hominem miſeras; illud enim bonus P. Reitha ſuis precibus à me extorſit; mecum igitur, inquam, pugnavi, ejuſdemque parentis liberos quaſi hoſtes inter ſe commiſi; in riſum prorupimus ambo; non tamen eſt, quod aliquis hoc vitio vertat Patri Reithæ, qui pro ſuo candore ultro fatebatur, præfatum teleſcopium non à ſe, ſed ab alio elaboratum fuiſſe: Scripſi hæc, ut vel inde conſtet, fieri potuiſſe, ut aliquod ex meis teleſcopiis in manus Hugenii veniret, ad comparationem inſtituendam; dum id fiat, facilè mihi perſuadebo, nihil eſſe, cur mea Hugenianis primas deferant; ac proinde ſuppoſita eadem longitudine, æquè clare, & fideliter Saturnios ſatellites exhiberi à meis, ac ab Hugenianis.

His præmiſſis; conſtanter aſſerit Hugenius, pag. 547. & 556. Saturni ſatellites nunquam ab eo ſejunctos figura ſphærica videri, quales prima figura ab eo excuſa, & à me recuſa.

sa exhibet; quod tamen falsum esse, omni asseveratione affirmo, cùm anno 1657. cœptis observationibus die 30 Junii, & septies, vel octies, ad vigesimum usque Julii repetitis, adhibito ad hunc finem telescopio triginta sex palmorum, accuratissimè fabrefacto, prædictos satellites figura sphærica tornatos à Saturni globo omnino sejunctos observarim, quales prima figura Hugenii illos repræsentat, & quales jam antè Galilæus viderat, idem observavi anno proximè sequenti, telescopio 24. palmorum usus; adfuerunt testes omni exceptione majores; præ cæteris, vir clarissimus Alphonsus Borrelli, Magni Etruriæ Ducis insignis Mathematicus, & Geometra, typorum gloria orbi satis notus: neque hæc contradicendi studio à me adstrui, quisquam sibi persuadeat; quo enim tempore, hos satellites sphæricos à Saturni globo, modico quidem, sed quod sensu, adhibita telescopii opera, percipi poterat, intervallo disjunctos vidi, nunquam mihi persuadere potuissem, aliquem fore, qui sejunctos unquam videri posse negaret; Dico igitur, disjunctos à me visos fuisse; negat Hugenius disjunctos videri posse; produco testes omni exceptione majores, qui una mecum viderunt; Utri quæso habenda fides? Sejunctos videri posse contendo, cùm reipsa sejunctos viderim, adductis testibus omni exceptione majoribus; negat Hugenius, videri posse; quia scilicet nunquam ipse vidit; sed alii viderunt; negat tamen videri posse; adsunt & jurant testes; illos ejurat, & fidem alienis telescopiis detrahit; perperam quidem, meo judicio; nempe breviore telescopio discerni non poterant, licèt revera disjuncti essent: igitur cùm eos sejunctos viderim meo telescopio, ideo necessaria consecutionis vi deduco, hoc perfectius, & melius esse; nec enim longitudo æqualis, immo, nec major defuit; nec accurata operantis manus vel artificis diligentia desiderata est. Telescopium igitur Hugenii, longiùs licet, breviorum vitio laboravit, cum illius opera, sejunctos distinctè videre non potuerit, quo vitio, ut dixi, breviora perspicilla laborant; falsum enim est, quod habet pag. 35. breviore telescopio 8. circiter palmorum sejunctos, longiore

TAB. LII. fig. 1.

verò 16. palmorum conjunctos videri, nempe, ut dixi, potiore jure, sejuncti, majore telescopio, conjuncti verò, minore viderentur; cùm verò suo minore sejunctos viderit, majore verò ad instar brachiorum, hinc inde adnatorum extantes, perspicuum majoris telescopii vitium est, cujus operâ radii minùs accuratè projiciuntur, & ut vulgò dicimus, inepta fit terminatio. Telescopium igitur Hugenianum meo primas deferat, oportet; quo scilicet ea distinctè vidi, quæ ille suo distinctè videre non potuit.

At non me latet causa qua fiat, ut Hugenius obstinatè neget, sejunctos videri posse; commentus est ipse hypothesim annuli Saturni globum cingentis, cujus operâ, illas phases explicare conatur, quæ in hoc planeta observatæ fuere: ut autem suæ opinioni, vel suo commento consulat, illud profectò ipsi negandum fuit, quo semel admisso commentitia illa hypothesis penitùs corruebat; si enim annulus Saturnum ambit, nunquam sejuncti satellites videri queunt: pari modo fingit, præfatas ansarum vacuitates ejusdem cum reliquo cælo coloris esse, ut suæ hypothesi consulat; supposito enim illo annulo in iis vacuitatibus, nihil nisi cælum videtur; at revera, ut jam suprà dixi, nigriores illæ apparent, ex quo Hugeniana hypothesis corruit. Ut igitur suam illam opinionem indemnem servaret, ea removenda esse putavit, quæ si adessent, illius opinionis falsitas manifesta evaderet: & hæc sibi persuasit, nobis tamen minimè persuasurus, qui rem secus esse, oculari demonstratione prorsus evicimus.

Alterum est quod Hugenius vel finxit, vel leviter sibi persuasit, quod tamen ejusdem furfuris est; dicit enim, fasciam quandam nigricantem in Saturni globo videri, quæ quidem ex æquo medium discum secat, quando solus Saturni globus suo satellitio destitutus apparet; ubi verò satellites adsunt, modò suprà, modò infra brachiorum lineam fascia videtur; sed hoc etiam merum figmentum est ab auctore excogitatum, ut annulo suo consuleret; nam cùm ipsi opponeretur, admisso semel hoc annulo nunquam Saturnum videri posse, vel ansulis, vel brachiis destitutum, quod tamen omnibus ob-

ser-

ſervationibus repugnat; nempe ubi planum annuli directè in oculos incidit, annulus appareret ad inſtar zonæ rectæ, æqualis diametro annuli, ac proinde majoris diametro Saturni; igitur ad inſtar brachiorum duæ appendices hinc inde Saturnio globo adhærerent: cum igitur hac difficultate, & hoc nodo inſolubili annularis illa hypotheſis laboraret; finxit illius auctor, extimam annuli ſuperficiem ineptam eſſe ad luminis repercuſſionem, ac proinde faſciam illam nigricantem inde ortum ducere, & ob penuriam luminis repercuſſi, extantes illas appendices ſub aſpectum noſtrum non cadere: Hæc habet pag. 542. 545. 576. Aliam cauſam ſubnectit pag. 585. ab obliquitate radiorum illapſorum petitam, qua fiat ut pars annuli ad nos obverſa obliquè dumtaxat illuminata non videatur; immo hoc alterum addit, ſuperficiem annuli ad nos obverſam minimè à Sole illuminari; ac proinde mirum non eſſe, quod minimè videri poſſit; omiſeram, quæ habet pag. 551. de Saturnicolis.

Cuncta hæc facilè diſſlantur; nunquam enim faſciam illam nigricantem, quamvis exquiſito teleſcopio uſus videre potui; nemo unquam præter illum obſervavit; nec tamen teleſcopia noſtra Hugenianis deteriora eſſe crediderim; fictitia igitur cenſenda eſt illa faſcia, aut certè vitrorum vitio tribuenda: quod autem dicit, extimam illam annuli ſuperficiem ad lumen reflectendum ineptam eſſe, vel ex eo falſum eſſe conſtat, quòd in Saturni diſco partes omnes æquali lumine perfuſæ videantur: Nulla igitur pars ad nos obverſa ad luminis reflexionem inepta eſt. Præterea demus ita eſſe, & faſciam illam paulò obſcuriorem in Saturni diſco videri; nihil tamen obſtaret, quin brachia eodem lumine perſpicua eſſent; id eſt extrema ſegmenta apparentis zonæ, in quam annulus hoc ſitu aſpectus projicitur, extantia, & excurrentia hinc inde extra Saturnium globum, viderentur, eodem licèt nigricante colore diluta. Ad obliquitatem illapſorum radiorum perperam confugit; alioquin in cæteris planetis eadem ratio militaret; nempe fieri non poteſt, quin major pars ſuperficiei convexæ, obliquum radiorum ſolarium illa-

 pſum

psum excipiat. Id demum, quod subnectit, superficiem annuli ad nos obversam à sole aliquando non illuminari, ex regulis opticis omnino refellitur; supposita scilicet maxima illa Saturni distantia, nec non solis diametro longè majore, quo fiat, ut superficies Saturni ad nos obversa semper illuminetur; hinc totus Saturni discus semper apparet. De Saturnicolis nihil est, quod dicam, risu potiùs, quàm argumentis hoc commentum refellitur; accedit, quòd catholicis dogmatis adversatur, quæ homines tantùm illos agnoscunt, qui ab Adamo duxerunt ortum.

Nonnulla etiam falsa admiscuit, ut pag. 539. ubi dicit fascias Jovis lucidiores esse reliquo disco; cùm tamen obscuriores certò videantur: Item globo Martis latiorem fasciam sub obscuram obduci; nihil tale unquam observatum est; deinde nunquam Saturnum vidimus ea forma, quam illi tribuit pag. 542. 545. tractum illum cæli circa Oriona, illustriorem esse vidimus, cum iis stellis splendentibus, quas ipse recenset. Multa etiam de Saturni phasibus statuit, ex paucorum annorum observationibus, quæ pro certis habere non possum, donec subsequentium annorum observationibus congruant; nempe ipse observationes suas primum cœpit 25. Martii anno 1655. easque ad 19. Februarii anni 1656. breviore tamen telescopio usus, 12. pedes longo perduxit; ac proinde minùs fideles censendas, ut ipse ultrò fatetur. Standum igitur observationibus deinceps ab eo factis, ac repetitis identidem, adhibito longiore tubo, 23. circiter pedum, perductisque ad 26. Martii anno 1659. Si aliquæ essent ab eo notatæ à 30. Junii ad 20. Julii anno 1657. viderem utrùm meis consentirent; sed nullas toto illo tempore factas invenio; an fortè paucæ illæ observationes sufficient ad certum quid statuendum? præsertim cum toto illo, quo factæ sunt, temporis intervallo, vix Saturnus 38. gradus confecerit, traductus scilicet à 20 grad. Virginis ad 28. Libræ; an fortè inquam modicus ille arcus decursus sufficiet ad certam & indubitatam hypothesim statuendam? Statuit autem, ansas magis apertas, & patentes videri, Saturno existente

in grad. 20, 36. Gemin. & in opposito 20. 36. Sagitt. Sphæricum verò sine ansis, & satellitio in grad. 20. 36. Pisc. Itemque in 20. 36. Virg. quod sanè utrùm futurum sit, sequentes anni docebunt. Ipse hactenus in 20. Virg. observavit, in aliis punctis non vidit, nec est, quod aliorum observationes adducat, quibus fidem omnem detraxit, ac proinde illi suffragari non debent. Unum, quod habet, omittere statueram; sed quandoquidem in mentem venit, saltem indicabo; dicit enim, Saturni globum circumagi quodam vertiginis motu; sed hoc tantummodo divinat, non probat; licèt enim Sol hoc vertiginis motu gaudeat, quod probari solet ex maculis: inde tamen nemo rectè deducat, hunc motum reliquis planetis competere. Hoc ii præsertim insinuare & inculcare non cessant, qui globo terraqueo motum adstruunt; sed frustra, cùm Lunam hoc vertiginis motu non agi, certissimum sit: quod certe non dico, quasi hic vertiginis motus in Saturno alicujus momenti sit, quod ad rem hanc pertineat, ultrò enim fateor fieri posse ut prædicto motu agatur: dico tamen, ex observationibus huc usque factis haberi non posse.

Quia verò nemini suam laudem ereptam velim, admitto & osculor alia multa ab Hugenio tradita, cum veritati apprimè consentiant. 1. planum illud, in quo videntur esse satellites, æquatoris plano parallelum rectè judicat: hoc jam indicarat cum aliis Galilæus; & facilè crediderim, licèt autor nullam hujus rei rationem adducat. 2. Ansas illas hinc inde semper æquales esse contendit; jure quidem: licèt enim fortè aliquando altera longior visa sit, alterius tamen cujuspiam per accidens adjuncti extrinsecus, accessio illa facta est. 3. Vult, Lunam quandam esse Saturniam, (sic enim vocat, licèt propriè loquendo Luna non sit, cùm circa Saturnum suum orbem non agat) supremum scilicet omnium satellitem, ad instar stellulæ sæpe à se observatum, modò ad ortum, modò ad occasum, modò conjunctum Saturno, cujus primus ille inspector fuit, in quo sanè maximam laudem meretur: ego quidem cùm jam anno 1657. de hoc aliquid inau-

diis-

diissem à clarissimo viro Michaele Angelo Riccio, eodemque nobilissimo hujus temporis Geometra: Eundem sæpe observavi à 30. Junii ad 20. Julii, scilicet die 30. Junii hora 2. noctis juxta horologium Italicum, id est 2. horis cum dimidia post solis occasum, illum observavi ad ortum Saturni; item 2. Julii, 4. 9. 12. eadem hora, die 14. non apparuit; die 20 ad occasum visus est. Ad prædictas observationes adhibui telescopium 36. palmorum. Cur verò ab aliis Luna illa Saturnia observata non fuerit ante Hugenium, non quidem telescopiorum vitio, sed vel inadvertentiæ, vel nimiæ ejusdem à Saturno distantiæ, vel parvitati, vel conjunctioni tribuendum est. 4. Ansæ Saturni nunquam mihi visæ sunt una vice acutiores, alia obtusiores; majores tamen seu latiores aliquando esse comperi. Quod autem sæpè ac sæpius inculcat, prædicta omnia explicari non posse, nisi annulus ab eo excogitatus Saturni globum circumdet, pace illius dixerim, à veritate alienum est; non desunt alii modi, quibus res ista facili designatione exponatur: præ cæteris, mihi satis arridet illa systematis Saturnii ratio, quam P. Honoratus Fabri Societatis Jesu vir mihi maxima familiaritate conjunctus excogitavit, cujus breve schema subjicio.

Supponit. I. terram immobilem in centro mundi, circa quam cælestes globi suos gyros agunt; hanc enim sententiam mordicus defendit, ut catholicis decretis, sacris literis, observatis phænomenis, ac rectæ rationi probè consentientem. II. Motum realem Saturni æqualem esse, apparentem verò inæqualem; abhorret enim hominis intellectus, ut vel ipse Copernicus prudenter monet, à reali motuum inæqualitate. III. Supponit, motu æquali, æqualibus temporibus, æqualia spatia decurri, reali scilicet, seu recta, seu curva; ac proinde majorem orbem tardiùs, minorem citius, eodem motu describi. IV. Supponit, motum circularem diurnum ab ortu ad occasum. V. motum rectum ab apogæo versus perigæum, & vicissim; acceleratum quidem, ab utroque termino ad mediocrem distantiam, quæ lineam apogæum, & perigæum connectentem bifariam secat; retardatum verò à mediocri distantia

tia

tia ad utrumque terminum; hunc autem primum motum rectum vocat. VI. Supponit alium motum rectum, secundum scilicet, ac declinationis ab Austro ad Boream, & vicissim; fines porrò diversi sunt in diversis planetis, pro diversa declinatione maxima cujuslibet planetæ; est etiam hic motus eodem modo acceleratus, & retardatus, quo prior; & mediocris distantia est in æquatore: ex his tribus motibus, Saturni motus componitur; vel potiùs est motus quidam simplex circulari affinis, prædictis duabus determinationibus instructus; vel, ut ajunt Scholastici, modificatus; primus motus brevior est; secundus diuturnior; cujus sanè discriminis causam affert. Sed ut rude aliquod schema exhibeam, omisso secundo motu recto, sit centrum mundi B. hic terram collocat immobilem. Sit GB distantia Saturni apogæi; BO distantia perigæi; BP distantia mediocris, Saturnus circulum, vel orbem radio GB tardius percurrit, quàm Stella vel punctum primi mobilis, cui respondet; citius verò percurrit orbem radio BO, & æquè citò radio BA minore mediocri distantia BP. His præmissis, sit Saturnus in apogæo G, respondens puncto C primi mobilis, vel initio arietis v.g. & supponatur punctum C per S describere suum circulum, motu diurno; item Saturnus in G suum, per R, scilicet versùs occasum; punctum C citiùs absolvit suum gyrum, quàm Saturnus; igitur Saturnum à tergo relinquit, versùs ortum, scilicet in aliquo puncto curvæ GH; nempe primo motu recto, à circulo apogæi LR sensim descendit ad circulum perigæi ZX, donec tandem multis orbibus actis, perveniat in H, & respondeat puncto E primi mobilis, v. g. 20. gradui Arietis: toto illo tempore, moveri dicitur in consequentia; id est, juxta seriem signorum, initio quidem, motu accelerato; & sub finem, retardato; in H stare videtur: hîc enim æquè citò ac punctum E suum gyrum agit: Quia verò adhuc descendit versùs perigæum, decurrit deinceps suos orbes citiùs, quàm puncta primi mobilis, quibus respondet; ac proinde illa relinquit à tergo, versùs ortum ab H quidem, ad perigæum I: ab I verò, ad K; hinc videtur regredi ab E ad D,

TAB. LI. fig. 1.

D, quæ ſunt puncta primi mobilis; idque motu retardato, circa H & K, id eſt, circa puncta ſtationum, accelerato verò, hinc inde circa I. hinc duplex ſtatio, in punctis ſcilicet E & D. hinc regreſſio, vel motus retrogradus brevior directo; quia radius circuli æquè diuturni (ſic eum vocat, quem planeta æquè citò conficit, ac punctum primi mobilis ſuum) eſt brevior, radio mediocris diſtantiæ B P. ex his ſequitur latitudinis mutatio ſingulis ferè diebus: ſed hæc rudi Minerva deſcripſiſſe ſufficiat; ex quibus omnia Saturni phænomena, nullo ferè negotio, per cauſas phyſicas explicat. Jam ad ſatellites Saturni orationem converto. Quinque Fabrius agnoſcit; minimus & ſupremus omnium eſt quem Hugenius, primus opinor, ſub aſpectum hominum adduxit, quemque, ut dixi, ab illuſtriſſimo, & doctiſſimo Riccio certior factus, adhibito 36. palmorum teleſcopio, an. 1657. per multos dies, menſe Julio conſpexi, ortivum modò, mox occiduum; dicta autem die non comparuit, quia conjunctus Saturno erat. Hic ergo ſupra Saturnum eſt, & dum in perigæo verſatur, citiùs ſuum orbem abſolvit, quàm Saturnus ſuum, quando eſt in apogæo, tardiùs; & æquè citò in mediocri diſtantia, æquè ab utroque termino diſtante: hinc aliquando Saturnus illum à tergo relinquit, aliquando ille Saturnum; hinc aliquando ortivus, aliquando occiduus, aliquando latet in conjunctione; à conjunctione apogæi, ſemper ortivus; à conjunctione perigæi, ſemper occiduus; quid plura? in Mediceis appoſitam analogiam habemus.

TAB. LI. fig. 2.

Alii quatuor inferiores ſunt, Saturno licèt ſuperiores, quorum ſyſtema ſic Fabrius explicat: Sit centrum terræ, & mundi A, Saturni diameter G C, centrum B, ducta cenſeatur recta A B P; ſint duo N H, S D, in maxima digreſſione N H ortiva; S D occidua, hinc inde æquali; in qua ſit illorum ſtatio; & mediocris diſtantia A I; hoc loco, diametros dumtaxat pro globis exhibeo: tendat autem N H versùs perigæum; & S D, versùs apogæum, pari greſſu, & paribus intervallis, ita ut hic apogæum, & ille perigæum ſimul attingant; iſtud eſt inter B I, illud verò inter I O. tunc uter-

uterque ſimul erit in cunjunctione, alter perigæi, alter apogæi, ſed paulò poſt N H à perigæo aſcendit ad maximam digreſſionem occiduam S D, & S D ab apogæo deſcendit ad maximam digreſſionem ortivam N H; atque ita deinceps, repetitis ac reciprocis recurſibus: idem prorſus dictum ſit de duobus K L, K E, quorum mediocris diſtantia communis eſt in O; perigæum commune inter O I; apogæum ſupra O, æquè diſtans; maxima digreſſio ortiva K L, occidua R E; eſt autem digreſſio iſtorum, qui ſuperiores ſunt, major digreſſione illorum, quos inferiores eſſe ſupponit; ſuperiores appellat lucidos, inferiores obſcuros; lucidi conſtant ex materia aptiſſima ad repercuſſionem luminis; obſcuri verò, ex ineptiſſima, ad eundem finem; nec difficile fuit auctori naturæ, hujuſmodi materiam invenire, cùm etiam in hoc ſublunari tractu hujuſmodi habeamus: mediocris diſtantia in utriſque ab apogæo, & perigæo æquè diſtat: vult etiam idem Fabrius, quinque ſatellites ejuſdem eſſe cum Saturno declinationis, ac proinde ſemper in eodem plano eſſe æquatori parallelo: quod facilè obtinetur, modò ab initio eandem declinationem habuerint, eundemque ſimul inierint declinationis motum, in eodem ſemper plano æquatori parallelo ſiti: nec eſt, quod quiſquam miretur, quinque ſatellites Saturno adeſſe, cum Jovi quatuor adſint, Soli duo, Terræ unus, Marti fortè tres, quis ſcit, nondum explorati; quia à Martis globo longius digrediuntur, quàm Medicei à Jove; non tamen tam longè, quàm Venus aut Mercurius à Sole; vult demum, obſcuros citiùs ſuam revolutionem abſolvere, & lucidos tardiùs; cujus rei analogiam habemus in Venere, & Mercurio.

His poſitis, omnes Saturni phaſes, omnia phænomena facilè omnino explicantur. Solus Saturni globus ſuis ſatellitibus aliquando deſtitutus apparet, ſcilicet figura ſphærica; nec enim alia cæleſtibus corporibus indita eſt: hujus phænomeni ratio ex eo petitur, quòd duo lucidi (de primo enim omnium ſupremo hoc loco non agitur) vel ſint conjuncti, id

eſt, alter in apogæo, alter in perigæo, vel ab obſcuris penitùs tecti, etiam extra conjunctionem:

II. Duo lucidi aliquando videntur à globo Saturni omnino ſejuncti, & figuramſ phæricam præferentes; hoc ipſum toties accidit, quoties duo obſcuri in conjunctione verſantur, alter ſcilicet in apogæo, alter in perigæo, & lucidi hinc inde digreſſi.

III. Aliquando lucidi apparent, quaſi lucidæ anſulæ eſſent, vel Lunæ falcatæ; hoc evenit quando obſcuri ſunt quidem interpoſiti, non tamen integrum lucidorum diſcum tegunt.

TAB. LII. IV. Hinc modò plus, modò minùs diſci lucidi ab obſcuris tegitur; unde diverſa phaſis, & diverſa figura; neque hoc teleſcopii vitio Hugenius tribuere debuit, cùm alioqui optima ab authoribus, quos citat, adhibita fuerint; Galilæo ſcilicet, Scheinero, Ricciolo, Hevelio, Gaſſendo, quorum figuræ ab Hugenio excuſæ, in hac hypotheſi, nullo negotio demonſtrari poſſunt; undecima tamen inter alias Fontanæ fabulas referenda eſt; decima tertia, quæ caret auctore, modò tantulùm reformetur, fortè ſuo modo explicari poſſet, in aliquo caſu; ſeptima Hevelii fictitia eſt; ſphæroidem eſſe putavit, ſed hæc figura cæleſtibus globis minimè competit; niſi fortè dicamus Saturnum ellipticum videri, quando obſcuris in conjunctione ſtatutis, lucidi tantulum à conjunctione recedunt, tunc autem anſulæ non apparent.

V. Veriſimile eſt, obſcuros æquales eſſe lucidis; nihil enim probat, vel majores, vel minores eſſe, æquales igitur cenſendi ſunt, dum aliquid probet inæqualitatem; immò potiùs æqualitas ex ipſis phaſibus perſuadetur, quartæ ſcilicet figuræ, quintæ, ſextæ, octavæ &c. Arcus enim falcis lucidæ, cavus ſcilicet, & convexus æqualium circulorum eſſe videntur.

VI. Linea, vel diameter anſas lucidas connectens, quæ per medium globi Saturnii centrum duci videtur, eſt ſemper

per in plano parallelo plano æquatoris; quia cùm satellites Saturni ejusdem semper sint cum eo declinationis & motu semper æquali in aliquo parallelo moveantur, motus enim diurnus ab ortu ad occasum in aliquo parallelo fieri censetur, quid mirum, si linea eorum centra connectens in eo plano sit, quod plano æquatoris parallelum est; dixi, *quæ per centrum Saturni duci videtur*, quia revera licèt Saturno superiores sint, oculus tamen judicat, ejusdem altitudinis esse; ac proinde in eadem linea cum Saturno.

VII. Licèt supremi satellitis motus ab Hugenio definitus sit, utpote qui 16. circiter dierum spatio absolvatur, quanquam observationes à me factæ tantulùm refragantur; non tamen huc usque quatuor inferiorum motus, vel ab eo, vel ab alio quopiam definitus est, qui tamen ex futuris observationibus haberi posset.

VIII. Turbinatio Saturni, vel illius annuli fictitii nulla observatione probatur, ut jam indicavi; licèt enim sol hoc vertiginis motu agatur circa suum centrum, ut evincitur ex illius maculis; aliis tamen planetis nulla hujusmodi, vel alia quæpiam probatio suffragatur.

IX. Illa brachia oblonga quæ Hugenius Saturno annexa observavit annis 1655. & 1656. sunt omnino fictitia, & vitio telescopii tribuenda: cur enim alii non observassent? præsertim cùm telescopium ad hunc finem ab eo adhibitum brevius esset, ac proinde non melioris conditionis quàm alia.

X. Figuræ ab illo excusæ, & rejectæ facilè explicari possunt in hac Fabriana hypothesi: 1ª quidem lucidis in maxima digressione, & obscuris in conjunctione existentibus; 2ª verò, lucidis tangentibus Saturni globum, & obscuris in conjunctione positis; 4ª lucidis in maxima digressione positis, & obscuris tantulùm extantibus; ita ut modicam lucidorum portionem tegant; 3^a. eadem est cum 4^a. sed telescopii vitio, in mucronem ivit, cùm in con-

vexum ire debuisset; 5ª, & 6ª. lucidis non totis extantibus, & majori ex parte tectis ab obscuris, tunc enim restat quasi falcula, differt autem 5ª à 6ª secundùm plùs, & minùs; 7ª, ut dixi, fictitia est; cùm Saturnus sphærois non sit, nisi fortè eo modo, quem supra num. 4. exposui; 8ª lucidis inter maximam digressionem, & Saturni globum existentibus, tectisque ex parte, à minore portione obscurorum; tunc enim falces majores sunt; latiores quidem, quò propiùs ad maximam digressionem accedunt; angustiores verò, quo Saturnio globo propiores fiunt; 9ª & 10ª ab octava tantummodo differunt, secundùm plus, & minùs; sunt enim multæ combinationes; quas habes in duobus circulis sese invicem secantibus; tres ultimas fictitias reputo; nisi fortè 12ª ad 10, reducatur itemque 13ª de qua infra.

XI. Ansa una non longiùs extenditur, quàm alia; hinc æqualis est utriusque lucidi digressio; quia uterque communi apogæo & perigæo gaudet, & æquali motu movetur; item obscuri eodem apogæo & perigæo gaudent; ex his, perfecta ansarum & brachiorum æqualitas necessariò sequitur.

XII. Ansulæ videntur, quando portio lucidorum ab obscuris tegitur; nempe sunt quædam quasi aperturæ nigræ, quas lucida corona cingit; hæ sunt ansulæ; brachia verò, quando lucidi tangunt globum Saturni, obscuris in conjunctione existentibus.

XIII. Ansulæ eò longiùs porriguntur quo propiùs lucidi ad maximam digressionem accedunt; obscuris scilicet lucidorum partem tegentibus.

XIV. Ansulæ eò patentiores sunt, quò major obscurorum portio extra Saturnum extat, lucidis in maxima digressione constitutis; angustiores verò, cum minor obscurorum portio extat.

XV. Ansulæ latiores sunt, quando minor obscurorum portio tegit lucidos, in maxima digressione positos.

XVI.

XVI. Anſularum brachia ad ipſum uſque Saturni globum excurrunt, quando minor obſcurorum portio lucidos tegit.

XVII. Anſulæ à Saturni globo ſunt prorſus avulſæ atque ſejunctæ, quando major obſcurorum portio lucidos tegit.

XVIII. Anſulæ ſenſim contrahuntur, quando à digreſſione lucidi recedunt, & obſcuri ad digreſſionem accedunt.

XIX. Quando anſulæ latiores & majores ſunt, ipſe Saturni globus illuſtrior apparet, quia lumina quaſi communi quodam niſu & illapſu oculum feriunt; ſic multi ignes ſeorſim poſiti, actione quadam communi, plus calefaciunt, ac proinde majoris lucis vim diffundunt.

XX. Anſulæ ſenſim dilatantur & augentur, quando lucidi ad maximam digreſſionem accedunt, & ab illa obſcuri recedunt.

XXI. Primus ille Saturni comes ſub Saturno aliquando ponitur ab Hugenio, qui vult, illum circa Saturnum moveri; hoc tamen veritati repugnat; ſi enim ſub Saturno eſſet, prædictas anſularum phaſes omnino turbaret: Idem dico de Mediceis, ſeu Jovialibus; igitur & Jovialia ſupra Jovem, & Saturnia ſupra Saturnum collocata fuere.

XXII. Si quando accidat, ut primus ille Saturni comes extremitati alterius anſulæ adhærere videatur; nihil enim obſtat, talem illius poſitionem eſſe poſſe; hæc anſula paulò alterà longior eſſe videbitur.

XXIII. Immo ſi caſu aliquo ſtellula quæpiam alterius anſæ extremitati adhæreat. Figuræ 13ª. phaſis aliquo modo ſalvabitur, modò anſarum forma emendetur; hæc enim trigona non eſt, ſed convexa; ut jam dixi, de 3ª. figura: omitto alia, quæ ex his facilè deducentur.

HÆC ſunt, Sereniſſime Princeps, quæ de Hugeniano Syſtemate tibi inſcripto ad te ſcribenda, & ne probandi mo-

modum deſiderares, teleſcopium triginta ſex palmos longum, unâ mittendum eſſe putavi; ut & rationes noſtras, ingenii, quo ad ſtuporem polles, & obſervationes, oculorum acie, accedente teleſcopii operâ, explorare valeas: facilè, ni fallor, judicabis, utri potiùs habenda fides ſit; & an noſtra teleſcopia Hugenianis deteriora ſint: quidquid ſit, ſi hæc opella mea tibi grata acciderit, faciam aliquando ut aliquid majoris momenti ad perennem obſervantiæ meæ teſtificationem Sereniſſimo tuo nomini inſcribatur.

FINIS.

Christiani Hugenii Zulichemii
BREVIS ASSERTIO
SYSTEMATIS
SATURNII
SUI,
Ad Serenissimum Principem
LEOPOLDUM AB HETRURIA.

Christiani Hugenii Zulichemii

Brevis Assertio Systematis Saturnii Sui,

Ad Serenissimum Principem

Leopoldum ab Hetruria.

SERENISSIME PRINCEPS,

VIdisti quæ adversus systema meum Saturnium Romæ sunt edita, utque sub uno nomine gemini mihi adversarii exorti sint. Etsi enim Eustachius de Divinis libelli istius Annotationum autor inscribitur, eum tamen adjutum fuisse opera P. Honorati Fabrii nec Cels. T. ignorat, & ego, hoc agi, jam pridem ab amicis fueram admonitus. Credideram hoc ipso futurum ut subtiliora quædam, non mihi prævisa, éque profundiore Astronomiæ sinu depromta, objicerentur; tum vero ea civilitate & verecundia, quæ viro humanioribus studiis dedito conveniret. Sed omnino spe deceptus sum, cum nihil aliud quam observationes meas temere impugnari videam; quas plerasque in dubium vocant, præterque veritatem mihi confictas esse sa-

tis apertè criminantur. Facile autem, ut spero, tam indignam à me suspicionem repellam, nec multis ad hoc opus esse, coram C. T. causam agenti, existimo, cujus summa æquitas cum pari judicii perspicacitate conjuncta est.

Primus præcipuusque adversariorum conatus est, ut vitra sua tubosque opticos nihilo meis inferiores esse demonstrent; quod ubi egregiè se confecisse arbitrantur, inde porro, nihil me in cælo deprehendere potuisse, quod non & ipsi viderint, concludunt. Quod si autem phænomena ipsa Saturni, quæ adduxi, vera non sunt, vana utique & Hypothesis erit, qua visorum eorum quæ nusquam sunt causas exponere suscepi.

Telescopiorum suorum comparationem cum nostris instituere aliquatenus ut possent effeci, tradita accuratissima meorum descriptione; veruntamen quod præcipuum est omnium, præstantia vitrorum quæ ab exacta formatione proficiscitur, hanc scire debent nulla descriptione, sed effectu demum ipso probari posse: Ideoque etsi & longiores paulo nostris tubos, & vitra amplius patentia fabricarint, non idcirco meliora ex his telescopia sese composuisse existiment. Oportet nempe, quæ pari bonitate cum nostris futura sunt, ut & longitudine illis æquentur, & vitrorum non minore apertura gaudeant; at non ideo quæcunque sic se habuerint, eâdem virtute pollent, aut illis æquiparanda sunt.

Ut igitur reipsa & effectu concedere nostris Diviniana telescopia comprobem, certissimum argumentum mihi petere posse videor à Saturnio illo comite sive luna, quæ sexdecim dierum spatio circa eum revolvitur. Hanc primum omnium mihi conspectam esse liquet, neque id Eustachius cum sibi succenturiato P. Fabrio denegat. Quod autem nec aliis nec sibi antea animadversa fuerit, in causa fuisse ait *vel inadvertentiam, vel nimiam comitis à Saturno distantiam, vel parvitatem, vel conjunctionem.* Sed vana effugia hæc esse quis non videt? Cum enim jam ab anno 1646 & ultra fortè Saturni phases deligenter respicere cœperit, telescopio è convexis vitris composito, quo semper Saturnum simul & comi-

mitem hunc, licet triplo longius recederet comprehendi necesse erat, quænam illa fuit *inadvertentia* qua fiebat ut nunquam ei in oculos incurreret? cur non eadem mihi quoque illum subducebat, nihilo magis admonito? Quin etiam hinc patet non bene prætexi magnam à Saturno distantiam, cum quoties ad hunc respiceret, simul ante oculos sese sisteret comes ejus. Et sanè distantia illa vix tria prima scrupula excedit, cum Medicei planetæ omnes longius à Jove evagentur, extimus etiam scrupulis quatuordecim. Parvitas ergo illum occuluit. At hoc idem est quasi fateatur suis illum organis detegi nequiisse: certe enim nimium exilis erat, at mihi nequaquam.

Postea tamen edita observatione mea, cum à Clarissimo Viro Mich. Angelo Riccio esset admonitus, vidisse se stellulam hanc affirmat, indicans etiam quo ad Saturnum situ, & quoties illam observaverit. Verum cum diligentius hasce observationes examino, invenio profecto non optima fide eas commemorari; sed adeo misere vereri Eustachium ne bonitatem nostrorum telescopiorum non assecutus putetur, ut quæ nunquam in cælo vidit, aut per rerum naturam videre potuit, tamen sibi visa incogitanter asserat. Quod ut appareat, periodus primò Saturnii comitis expendatur, quam 16. circiter dierum esse, ex observationibus meis, toto triennio continuatis (nisi & has confixisse dicar) manifestum feci: sed esto tantùm ea veræ proxima sit, quoniam suas observationes *tantulum refragari* Eustachius scribit. Die igitur 30. Junii, anno 1657. horis $2\frac{1}{2}$, post solis occasum, item sequentibus diebus 2, 4, 9, 12, Julii, ad partem orientalem Saturni animadversum sibi comitem ait; 14° non apparuisse. Die 20 ad occasum fuisse situm; utrum in maxima, mediocri, an minima distantia apparuerit nusquam addit. Certe equidem tribus prioribus harum observationum, ad occasum revera positus erat, ut ex tabulis colligo. Sed putemus inversionis telescopii rationem non habuisse Eustachium, atque ita sicut ei videbatur, si tamen visus est, orientem spectasse comitem rectè dixerit. At die 9 & 12 Julii, quibus

ſibi orientalem itidem apparuiſſe aſſerit, omnino ad occaſum tranſierat, ac rurſus 20. Jul. ad latus orientale, cum Euſtachius ab occiduo ſibi repertum ſcribat.

TAB. LI. fig. 3.

In figura appoſita clarius hoc liquebit; in qua circulus A B orbitam Lunæ Saturniæ exhibet, in 16 partes diviſam, ipſaque A B rectam ad nos obverſam. Die igitur 30 Jun. 1657, hora 10 veſp. invenio locum comitis grad. 207. 16′ ab apogæo A, methodo ſcilicet ea quam in Syſtemate Saturnio tradidi. unde prope num. 10 conſtitiſſe debuit, paulo tantum citerior. Atque hinc porro in ſingulos dies ſingulas circuli partes numerando; ſequitur die 2 Jul. ad num. 12. progreſſum eſſe. Item 4. Jul. ad num. 14. Inde poſt dies 5, nempe 9 Jul. ad num. 3. Ac porro 12 Jul. ad num. 6. Et denique 14 Jul. ad num. 8. qua die recte divinavit conjunctum Saturno fuiſſe. Reliquis verò plane infeliciter. Si enim ad num. 10, 12, 14, orientalis ſpectatus fuit, neceſſario ad num. 3 & 6 occidentalis factus eſt. Nec quidem ulla ratione ad num. 14 & 6, qui è diametro ſibi oppoſiti ſunt, idem latus Saturni obtinere poterat, uti Euſtachii obſervationes poſtulant. Denique cum 20 Jul. ad num. 14 reverterit, ubi & die 4 Jul. inveniebatur, quomodo evenit quæſo, ut, qui tunc ad orientem, idem nunc, quamvis eodem loco, ad occidentem comparuerit? Etiamſi mea periodus vera non eſſet, quænam tamen illa Euſtachii fuerit oſtendi mihi velim, paululum diſcrepans, qua ſua hæc viſa tueatur. Debuerat ſane hîc, ſi uſquam, Fabrius illi opem tuliſſe; ſaltemque perpendiſſe an ſtare ullo modo iſtæ obſervationes poſſent: aut, ſi nobis imponere vellet, quotlibet duntaxat novas è tabulis meis concinnaſſe. Nam quas nunc adferunt, facile nimis deprehenditur, ideo tantum productas fuiſſe, ne nihil vidiſſe exiſtimentur.

Credo & faſciam nigricantem in Saturni diſco, liquido ſibi conſpici dixiſſet Euſtachius, ni Fabrio viſum fuiſſet eam nimium hypotheſi meæ annulari favere. Cum autem ne optimis quidem ſuis perſpicillis eam cerni affirmet, hinc quoque quanto illa meis deteriora ſint perſpicuum fit. Nam ne mihi

mihi phænomenon illud confictum credatur, idem & in Anglia pridem observari cœpisse sciendum est; ut liquet ex literis Viri Clar. Joh. Wallisii, Oxonia ad me datis 22. Dec. 1658. quibus inter alia hæc scribit. *Monebam etiam eisdem literis* (nempe datis 29 Maji, 1656) *de Saturni fascia quam jam ante observaverat D. Ball, & sciscitabar num tu eandem conspexeras*, &c. Eam porro fasciam à 5 Febr. 1656 ad 2 Jul. quo tempore rotundus Saturnus absque ansis apparuit, medium Planetæ discum secare D. Ball. adnotavit, ut in schemate ad me misso expressa est. Atque ita mihi quoque fuerat eo tempore observata, ut cernitur pag. 544 systematis Saturnii, quam figuram hîc repeto. Postmodum tamen renatis Saturni ansis cum difficillimè conspici eadem fascia cœpisset, minus rectè quoque à D. Ball, quantum ad situm attinet, depicta est. At in mearum observationum adversariis, die 26 Nov. 1656, & alias adscriptum invenio, lineam obscuram fuisse evidentissimam, eo nempe positu qui pag. 545, System. Saturnii memoratur. Neque id monere neglexissem, observationes eas recensens, si quicquam profuturum putassem apud illos qui me data opera lectores fallere voluisse suspicarentur. Difficillime autem, ut dixi, tractus hic obscurus deinceps cerni cœpit, imo vix jam amplius animadverti potest; quod & systemati meo consentaneum est, quippe magnâ jam annuli Saturnii inclinatione; ad quam accedit, quod & ansarum splendor, duplo quam alias lucidiorem Saturnum efficiens, oculorum aciem nunc magis impedit.

TAB. LI. fig. 4.

Qualia igitur sint Diviniana telescopia cum nostris collata, ex his quæ dicta sunt, cuilibet manifestum opinor. Eadem verò & Anglicanis viliora esse alia præterea ratione ostendam, quo minus dubitetur phænomena ea vera esse, quæ pariter cum Anglis ego observavi. Nam & illa quæ ad ansatas Saturni phases attinent, testimonio illorum confirmaturus sum. Vir quidam nobilis ex Gallia, eruditus, acerrimique ingenii, qui Romæ telescopia apud artificem istum viderat, hoc ipso anno 1660, super iis hæc ad me scribit. *Il*

me:

me monſtra les plus beaux de ſes teleſcopes, qui paſſent au de la de 30 pieds; & nous les comparames avec un de ceux de la methode du Chevalier Neal, qu'on a envoyé au Cardinal Ghiſi; il n'a garde de ne tirer l'avantage de ſon coſté, mais ſans mentir il ſe trompe lourdement.

Et meliora igitur Romanis eſſe, illa quæ ex Anglia deportata erant, judicat is qui coram comparationem utrorumque inſtituit, & Euſtachium tamen obſtinate hoc pernegare teſtatur, adeo ut ſi jam mea Romam deferam, nihil apud illum quidem ſim profecturus. Quid autem huic homini facias, aut quis hæc videns non merito exiſtimet, uſque adeo privati compendii cura eum duci, ut quid verum ſit diſcernere aut non poſſit aut nolit?

Non ægre nunc fidem habitum iri ſpero, tum mihi tum Anglis ſimul obſervatoribus, qui anno 1657 oblonga Saturni brachia diſco utrinque conjuncta ſpectavimus, qualia exhibet figura Syſtematis mei pag. 545. quam hîc repono; non autem binorum orbiculorum formâ à medio diſco disjunctorum, ut Euſtachius ſe illa eodem tempore vidiſſe dejerat.

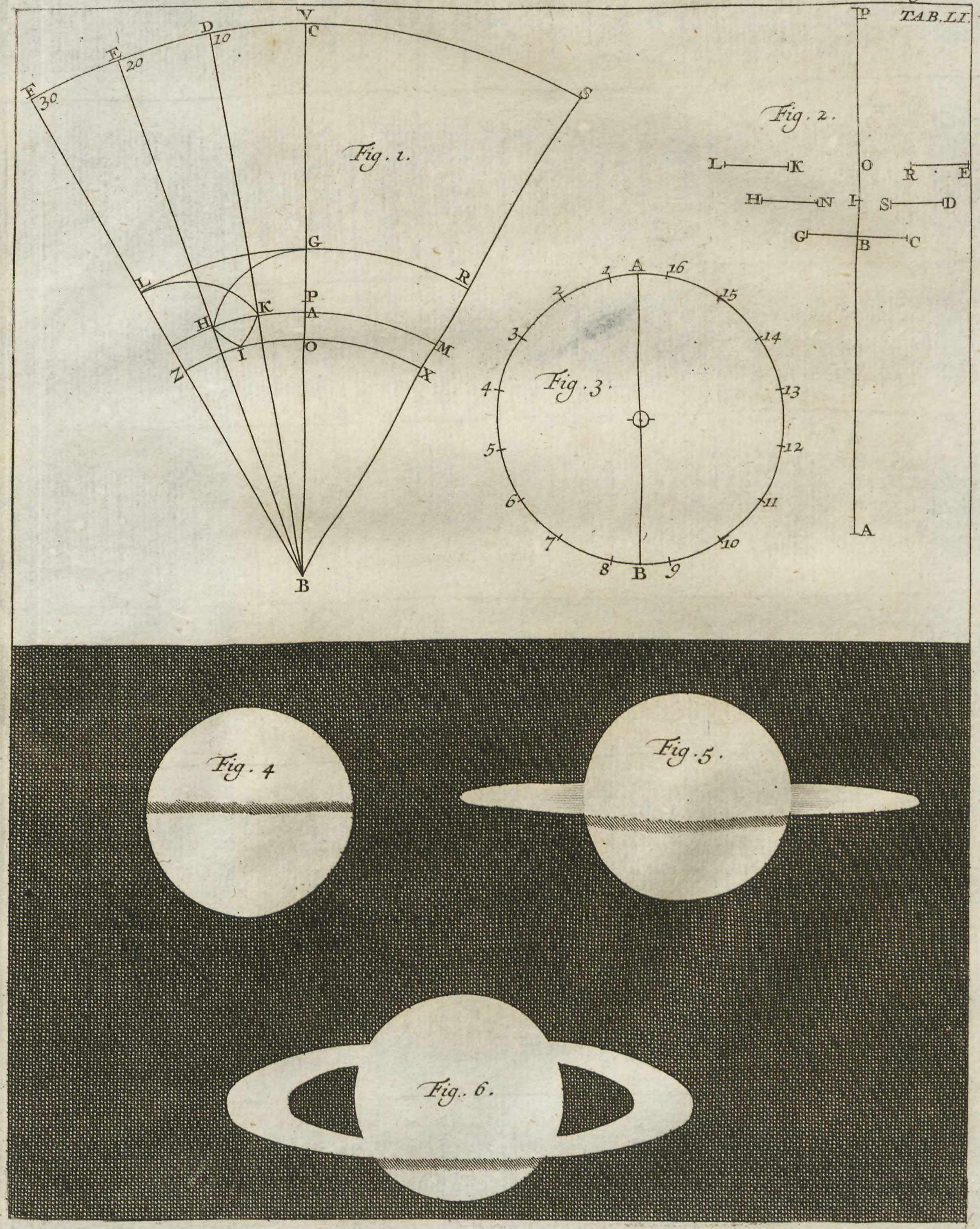
TAB. LI. fig. 5.

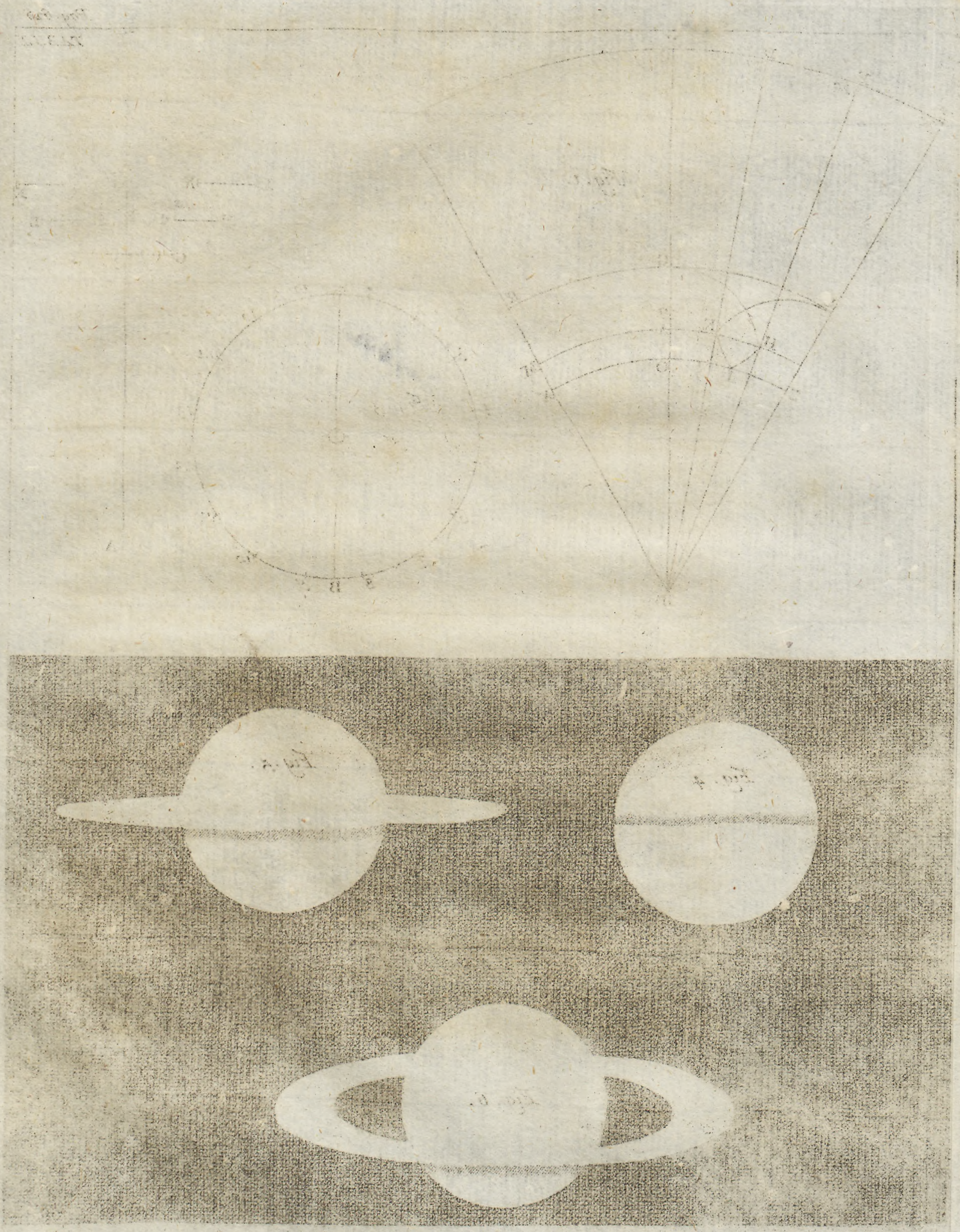
Adderem hîc ſchema quod mihi à D. Ball, ſuprà memorato, advenit, niſi planè ſimile eſſet huic noſtro, hoc uno tantillum duntaxat abludens, quod brachia illa ubique paulo craſſiora ille referat.

Eam vero formam à 5 Nov. 1656, ad 9 Jul. 1657 ſibi apparuiſſe ſcribit. Apertis autem brachiis, qualis pag. 547. Syſtematis mei & hîc repræſentatur, talem à 9. Nov. 1657 ad 7 Jun. 1658, idem obſervator depingit, ſimillima prorſus figura, niſi quod ad poſitum zonæ obſcuræ attinet, de quo dixi ſuprà. Ac denique à 3 Jan. 1659 ad 17 Jun. ejuſdem anni, anſis paulo latius adhuc apertis. Et hæc quidem ille, ignarus adhuc meæ hypotheſeos, ne ob præconceptam opinionem aliquid indulſiſſe ſibi exiſtimetur. Neque ego aliter iſta quam ſe revera habent referre auderem, cum redarguere me, ſi fallam, autori obſervationum in promptu ſit.

TAB. LI. fig. 6.

Quænam igitur illa ſunt Euſtachii perſpicilla palmorum 24, quibus rotundi globuli rectorum loco brachiorum cernebantur?


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.



tur? Imo etiam loco anſarum jam adapertarum, quales in ſyſtemate meo pag. 546. Etenim & anno 1658 globulos tantum ſibi viſos ait, quales in Fig. 1. iſtarum tredecim tabellæ LII. Quid teſtes citat qui ſecum iſta obſervaverint? Quos equidem fide digniſſimos eſſe cenſeo, quæque viderint ingenuè faſſuros, ſed eo ipſo mihi videntur de teleſcopiorum illius vitio & ineptitudine teſtimonium perhibere. Mallem aliquos adduxiſſet qui ſecum Saturni comitem obſervaſſent.

Globulorum formâ mihi quoque brachia apparuiſſe dixeram, quoties 5 aut 6 pedum tubos adhibuiſſem. Hiſce igitur rectiſſime ea, atque uti debent, mihi cerni arbitratur; cum vero oblonga ac Saturni diſco affixa, tubo 23 pedum referuntur, falſa imagine me deludi, idque teleſcopii culpa contingere. Nimirum perſuadere mihi vult exigua illa omnium maximis præferenda eſſe, quaſi ne hoc quidem diſcernere adhuc didicerim. Sed jam ſatis ſuperque, quid de meis teleſcopiis obſervationibuſque, quidque de Euſtachianis exiſtimandum ſit, me oſtendiſſe arbitror. Nec tamen quæ dixi in damnum illius cedere velim, ſed potius ſtimulos addere, quò magis magiſque incumbens, ſua ipſius primo, deinde & noſtra teleſcopia ſuperet. Adeo enim non invideo his qui artem adeo egregiam promovere nituntur, ut decreverim etiam cuncta quæ circa eam mihi comperta ſunt, ſed & præcipue quæ ad theoriam Dioptrices ſpectant, propediem in lucem emittere: quod vel ideo mihi faciendum video, ut de veritate obſervatorum quæ in Saturni ſyſtemate protuli, plures inquirere poſſint, monſtrata arte qua ſibi paria noſtris perſpicilla parent.

Cæterum unicum etiamnum diſcutiendum reſtat Euſtachii phænomenon, quo vel ſolo Syſtema meum univerſum corruere dicitur. Eſt autem rurſus de genere eorum quæ non tantum non extant, ſed ne quidem per rerum naturam apparere ullo modo poſſunt: quod, ſi non vitrarius artifex, at P. Fabrius certè animadvertere debuerat. Ajunt ſpatia illa bina, cavitate anſarum intercepta, nigriora reliquo cælo in-

veniri; cum contra, ex hypothesi mea, cælum ipsum sit quod trans aperturas eas conspicitur. Ego vero quæram ex Fabrio, qui fiat ut cælum omne, cum vel interdiu vel noctu aspicitur, non planè tenebrosum nigerrimumque appareat. Fateri cogetur in caussa esse vapores illos sive atmosphæram Terræ circumfusam, quæ interdiu quidem à Sole, noctu verò à Luna aut stellis illustretur. Atque adeo si vapores ii auferantur, planè nigrum apparitururm esse cælum, æquè ac spatia illa, Saturni ansis inclusa. Atqui tota atmosphæræ illustratæ crassitudo tam inter nos ac Saturnum, quam inter nos nigrumque cæli convexum interjecta est; ergo illius interpositu æque multum de Saturniarum macularum nigredine, atque de illa quæ cælum obtinet decedere necesse est; ac proinde eæ maculæ nihilo obscuriores reliquo æthere apparere possunt. Quod si igitur nihilominus hoc sibi videri pertendant, fateantur oportet visus quadam fallacia id contingere, vicino forsitan splendore Saturni, ansarumque suarum, paulo obscuriora spatia illa reddente, quam absque eo apparitura essent. Quanquam mihi nunquam id evenit: quinimo ejus contrarium quodammodo fieri animadverti. Dum enim ansæ exigua tantum adhuc rima paterent, veluti circa 26. Nov. 1656, contigisse nullus dubito, nondum nigræ lacunæ distincte cerni poterant, sed tantum tenuiori luce, illa brachiorum pars, quæ disco Saturni proxima erat, perfusa videbatur. Qua eadem ratione & fascia in Saturno, de qua suprà, paulò tantum obscurior reliquo ejus disco cernitur, quia nempe licèt revera nigra satis vel etiam nigerrima sit, est tamen tenuissima, unde & latior simul justo & dilutior spectatur.

Atque hinc apparet, frustra etiam adversus hypothesin meam objici, quod per eam nunquam Saturnus rotundus sine brachiis videri possit; quia nempe exiguam saltem lucem in extrema annuli ora reliquisse videbar, qua futurum sit ut non penitus visum effugiat annulus, quanquam à latere inspectus nec brachia proinde in totum aboleantur. Nunc enim sciant nihil obstare quo minus omnem lucem margini annulari adimam, neque hoc absurdum in rerum natura statui Fabrius

brius contendet, esse nimirum materiam aliquam quæ radios solares omnino non reflectat, quippe qui de quatuor novis, quos fingit, Saturni satellitibus, duos atros, ac per se invisibiles, nullisque solis radiis illustrandos, reliquos vero splendidos esse imaginetur. Verum hypothesim illam jucundissimam postea videbimus; sunt enim alia etiam prius ventilanda quibus nostra oppugnatur.

Dixi planam annuli superficiem, eam quæ nobis obversa est, aliquando à Sole aversam non illuminari, unde nimirum nec cerni nobis tunc possit, ac proinde nullas Saturno ansulas præstet. Quod cum certissima ratione fieri demonstraverim, adversarii mei breviter atque uno verbo negant, opticisque regulis refelli dicunt. Quomodo tamen? Ponendo scilicet & Saturni distantiam & Solis diametrum longe quam ego majores, quo fiat ut superficies dicti annuli, ad nos spectans, semper quoque à Sole lumen accipiat. Atqui ego & distantiam illam & diametrum (nam una alia expendet) multo majores exhibui in Systemate meo quam alius quisquam omnium Astronomorum. Nam cum Ptolemæus & Copernicus diametrum Solis, tantum 5 Terræ diametris taxent; Aristarchus & Bullialdus 7; Ricciolus 33; Wendelinus, quo pluribus nemo, 64; ipse 111 dedi, nec sine ratione ut puto. Et Fabrio tamen parcus fuisse videor, qui Solem longe majorem etiam fieri vult, ne stare hypothesis mea possit, utque merito hanc Optices ignorantiam mihi impegisse videatur. Cum ipse interim vel Optices vel Astronomiæ usque adeo imperitus sit, ut non advertat, licet centies millies majorem quam ego Solis diametrum statuat, ac simul planetariorum orbium amplitudinem eadem proportione adaugeat, tamen diametrum illam, ex Saturno conspectam, non nisi 3 circiter scrupulorum fore; atque etiamsi tanta illinc appareret quanta nobis in Terra positis, tamen illa quam dedi demonstratione evinci, superficiem annuli ad nos versam, aliquando Solis lumine non illustrari, propterea quod planum annuli productum, inter nos Solemque transeat. Nam si hoc fieri quandoque neget, oportet statuat diametrum Solis, (quod ridiculum est) ipsius ma-

magni orbis diametri, in quo circa Solem Tellus defertur, saltem duabus quintis partibus æqualem esse. Hoc enim ita esse facile ostendere possem, sed Astronomi ex demonstratione mea pag. 570 haud ægre deducent. Nam si planum annuli plano eclipticæ foret ad rectos angulos, non duas quintas sed integram orbis magni diametrum dicerem; duæ quintæ autem oriuntur ex inclinatione graduum $23\frac{1}{2}$ quanta est dictorum planorum.

Invenio vero & Graphices inscitiam mihi objici, quia nempe umbras quasdam, quas in schemate Saturni num. 10. Eustachius depinxit, alioqui non fuerim reprehensurus. Eum enim accersivisse quidem illas, sed necessario, contendunt, ut sphæræ formam exprimeret; quia videlicet incertum absque iis futurum fuerit, an convexus Saturnus, an planus esset. Atque ego proinde ineptus, qui *de suo* eas umbras Eustachium addidisse dixerim, quas ille ex arte, atque ita flagitante rei natura descripserit. Sed enim jocari hîc libet. Nempe cum temere citra ullam demonstrationem me statuisse arguant, Saturnum circa axem suum converti, rogo nunc illos unde tam certo compererint, Saturni medium corpus globosum esse? Non enim observatio ulla puto hoc docuit, sed colligunt tantum ex analogia quadam inter hunc & alia quædam cælestia corpora, sicut & ego de conversione circa axem. Quid igitur necessario umbras ad globum repræsentandum accersere opus erat? Verum dissimulare mihi videntur, quasi non advertant, non adeo me de medii corporis umbra sensisse, quàm de illa quam ellipticæ figuræ, binas ansas efficienti, tribuit. Huic enim ea lege umbras adjecit, ut annulum ellipticum, non planum sed rotundum, similemque serpenti caudam devoranti, exprimat; nescio enim quomodo melius formam eam designem. Deinde & hoc umbræ suæ artificio præstitit, ut totus iste annulus post globum Saturni positus videatur. Qua ex re sibi ipsi forte Eustachius absurdam aliquam Saturni formam commentus est, vel aliis certe comminiscendi ansam præbere potuit. Mihi autem, de umbra illa temere addita, necessario admonendi erant lecto-

ctores; quia si vera esset, refellebat hypothesin meam, cum alioqui schema Eustachianum, si sine umbris consideraretur, plurimum illam confirmaret. Sed & me ejusdem criminis teneri ajunt, quod passim umbras majores quam revera sint adjiciam. Nescio equidem quas dicant; semel enim Saturni globo annuloque umbras addidi, at non tanquam ita observassem, sed explicandæ hypotheseos causa, ut nempe appareret quo pacto annulum Saturno circumdedissem.

Quod si fasciam in disco ejus observatam, uti & illas quas in Jove & Marte exhibui, nigriores quàm in cælo spectantur, ob oculos poni dixissent, non ivissem inficias. Fateor enim ultro cælatoris culpa hoc accidisse; ac in Marte præsertim zonam longe dilutiorem, imprimis circa margines, pingendam fuisse. Quam neque perpetuo ibi spectari opinor, sed, ut Joviales fasciæ, mutabilem formam habere, sicut postremis in Marte observationibus didici; de quibus alias fortasse plura. Nihil autem ejusmodi mihi visum in utroque hoc planeta, Eustachius non alio argumento probat quàm cætera omnia, nempe quia ipse non viderit.

Quod Systemati Copernicano Systema meum Saturnium adaptaverim, nemo, ut opinor, jure me reprehenderit. Attamen cum Catholicis omnibus Fabrius illo interdicat, miror quod non vel hoc solo nomine rejicienda esse omnia commenta mea pronuntiet. Sed videbat, credo, facile in locum Copernicani Systematis Tychonicum me substituere posse. Utrum enim adhibeam parum admodum interest ad phænomena quod attinet. Sed rei veritas haud aliter quam Copernicum sequendo explicatur; cujus sententiam non parum quoque nostrum Saturni Systema commendat.

Non intelligo autem qui tam confidenter, hanc de Terra mota opinionem, tantùm ab hetorodoxis Aristarchis tenendam Fabrius asseveret. Quoties enim de ea cum Catholicis (Romanis nempe) sermones confero, profitentur illi se nequaquam decretis in contrarium latis teneri, sive ea à Cardinalibus, sive ab ipso summo Pontifice profecta fuerint. Quibus videlicet non tantum tribuunt in explicando sacra-

rum literarum sensu, ut etiam de controversiis quæ, ut vocant, facti sunt, necessario iis standum sit: ac plane, quietem Telluris rationibus potius adstruendam, quàm diplomatis sanciendam, existimant. Quin etiam in Gallia passim Systema Copernici non tanquam hypothesin, sed ut liquidam veritatem propugnari certum est, idque ab ipsis Ecclesiasticis, & Sacerdotibus, qui voluminibus totis publice doctrinam eam tradunt, nihil, quod sciam, Roma contradicente. Quæ omnia perpendens, pridem credidi præter Astronomiæ ignaros, imperitamque multitudinem, tantùm adhuc Cleanthes aliquos, in quibus & Fabrius, antiquo errori adhærescere, vique irrita Telluris motui obniti.

Cæterum cum mordicus, ut ait, hoc propositum teneat, ac planetas reliquos proinde nullo modo Terræ assimilandos putet, nihil mirum est, nec ferre eum potuisse Saturnicolarum ullam mentionem fieri. Ubi tamen injuria me culpat. Nam non ita de illis disserui, ut esse aliquos affirmarem, aut, rationibus adductis, verisimile id esse evincerem. Quin imo abstinere me dixi plura scribere de Astronomia, qualis incolentibus Saturnum futura esset, eo quod absurdum nimis plerique arbitrentur homines in planetis degere; qui proinde frustra me investigare dicturi essent, quid ii observent, qui in rerum natura non sunt. Cum autem, in periodo Lunæ Saturniæ computanda, menses Saturnicolarum nominavi, nihil novum aut insolitum Astronomis feci, quibus nihil frequentius est, quam ut in Sole aut Luna aliquem existere imaginentur, qui inde astrorum motus speculetur. Non erat itaque quod commentum hoc de Saturnicolis me ibi proposuisse Fabrius culparet. Quanquam etsi secus foret, neque primus ego hoc prodidissem, neque ridiculum adeo, apud Philosophos quidem, quam ille existimat. Verum præter institutum ad ista non digrediar. Vocat me Fabriani Systematis contemplatio, illius nempe quo, postquam meum diruit, phænomena circa Saturnum commodè exponi posse confidit. Nam priora illa, quibus Saturni ipsius motum novis legibus ordinare aggreditur, nihil huc pertinent, neque examinare

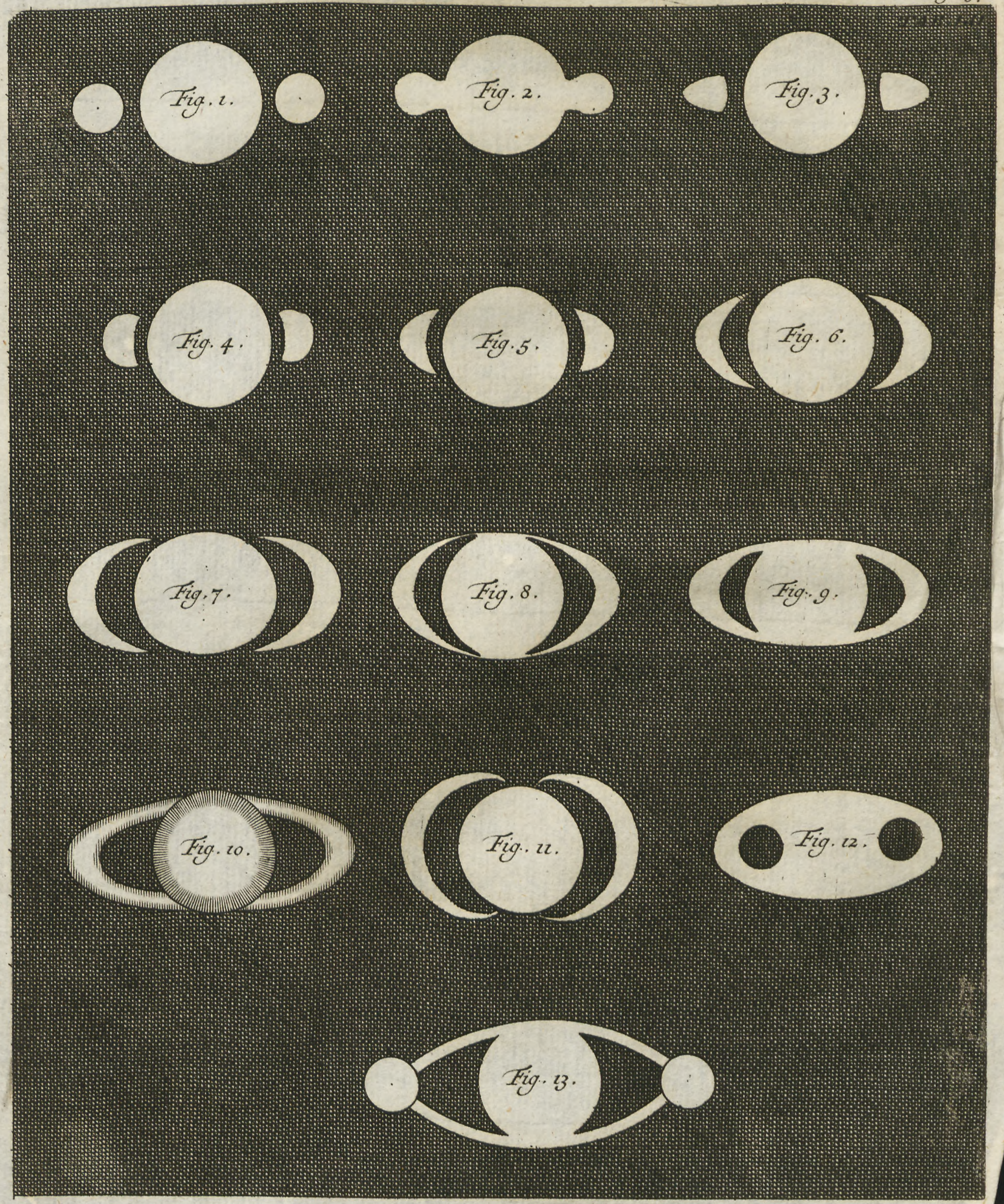
ea

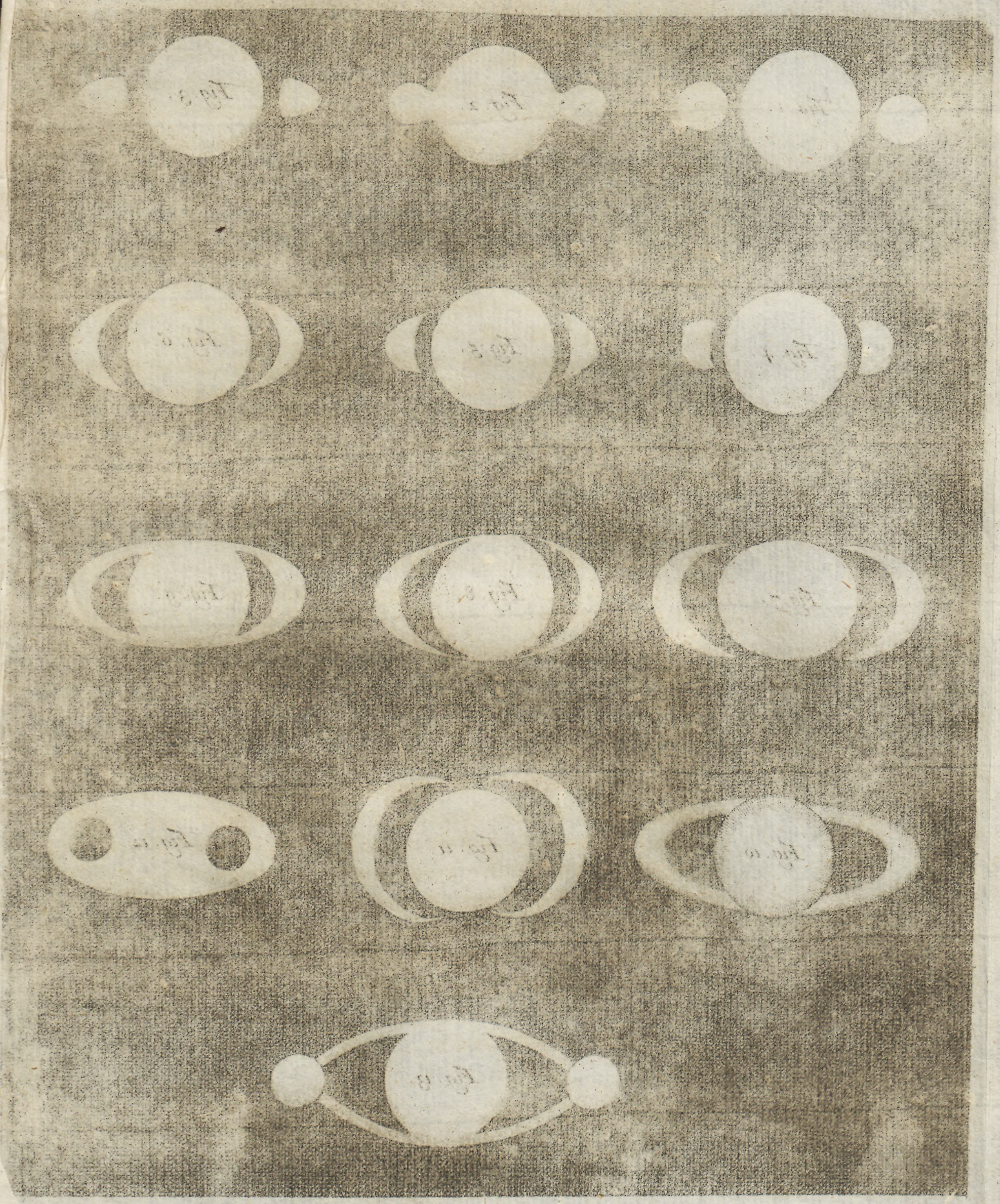
ea operæ pretium fuerit. Miror tamen quid in Tychonica hypothesi illi displicuerit, ut novam à fundamentis extruere in animum induceret: quam quidem vereor ut Astronomi satis percipere, nedum probare queant.

At nec illa quæ ad phases Saturni pertinet, ullo modo clarior est, prætereaque ab omni ratione & verisimilitudine tam longè remota, ut nesciam an refutari à me opus habeat. Cui enim imponet quæso bellum istud commentum de quatuor globulis Saturno proximis, quorum bini lumine solis splendent, bini alii radios prorsus non reflectunt, sed natura sua sunt obscurissimi. Videor mihi circulatorium quendam calculorum ludum videre, alios ibi albos, alios nigros esse, nunc hos, nunc illos ostendi abscondique vicissim. Tale quid enim præ se fert mirabilis illa hypothesis. Quidni verò circulos saltem in schemate suo expressit, quos nova hæc Planetarum soboles obeunt? Quos circulos non Saturnum in centro habere cerneremus, nec quidem minorem à majore includi, sed post tergum Planetæ binos ex ordine jacere, in quorum utroque duo istorum satellitum ita currerent, ut nunquam alter alterum assequeretur, sed è diametro semper distarent. Rectè, ni fallor, mentem Fabrii intellexi, sin minus, admoneri cupio, fuit enim nonnihil divinandum. Quum autem, his positis, phasin 1, 4, 8, 9, tabellæ suæ, facile explicari dicat, TAB. LII. scire velim quo pacto Planetæ novi ex minimis maximi fiant. Nam in 1 & 4 Figura, diametrum ne quidem dimidiam habent medii Saturnii corporis, cum in Figura 8, & 9, vel æquales huic, vel majores etiam esse necesse sit. Deinde ipsius Eustachii observata phasis in Figura 10, quomodo ex hac hypothesi deducetur? Cum neque rotunda corpora ellipticos arcus facere possint, & nigri Planetæ minores candidis hîc esse debeant, contra quam positum fuit: æquales enim inter se, post aliquantam deliberationem, statuuntur: Quænam porro sit novorum Planetarum periodus non jam exigam, nondum enim repertam esse ait. Sed vereor ut aliqua esse possit. Nam trium quidem annorum spatio, quorum primus 1646, unam illam Figuram 10 sibi apparuisse Eustachius affirmat, in tabel-

bella quadam, Sereniſſimo Magno Duci Hetruriæ, Fratri T. C. dicata; unde oportet nihil motos fuiſſe interea ſatellites, quod quidem animadverti poſſet. Poſtea vero aliis tribus annis, 1655 nempe, cum duobus inſequentibus, in tantum progreſſi fuere, ut medio horum annorum rotundus Saturnus ſpectatus ſit, extremis vero utriſque cum binis ad latera orbibus, interſtitio aliquo à medio corpore disjunctis. Utinam ridiculi Syſtematis inventori pœna conſtituta ſit, ut motuum iſtorum anomalias inveſtigare teneatur. Piget vero me ultra in his immorari: ſed tamen pauca pro meo illo Saturni comite dicere cogor. Hunc, quia videbatur aliquid in Syſtemate ſuo turbaturus, ſupra Saturnum Fabrius relegavit, ita nimirum ut totus quem percurrit circulus, Planetâ ſuperior jaceat. Sed immerito prorſus; ego enim cautionem me dabo, nihil eum anſatis illis phaſibus occurſu ſuo nociturum, cum puſillus adeo ſit, ut ne quidem, cum prope ad Saturnum accedit, conſpici queat: raro etiam, nec niſi cum rotundus eſt Saturnus, inter diſcum ejus & nos tranſeat, idque ſemidiurno ſpatio. Sinat itaque in ſua illum manere orbita, unáque Mediceos Planetas in vias ſuas, à Magno olim Galilæo circa Jovem attributas, reſtituat, quos nullam omnino ob cauſam, quam quidem aut ipſe adducit, aut ego animadvertere poſſum, loco ſuo ſimiliter expulit.

Jamque percenſui, ni fallor, Princeps Sereniſſime, omnia quæ adverſus me Euſtachius de Divinis, ſeu potius P. Fabrius conquiſivit, quæve ad ſuam hypotheſin ſtabiliendam commentus eſt, quæ quum animo reputo, nulla ſane invenio, quibus non pro me ſibi eruditi reſponſuri fuerint, aut venturi temporis experientia. Interim pauca hæc repoſuiſſe non me pœnitet, quia, licet artificem illum merito neglexiſſe tacendo videri poteram, non idem fortaſſe contra alterum, quem ferunt alicujus nominis eſſe adverſarium, valiturum erat ſilentium; utique quum ſatis omnibus conſtet pleraque ab hoc fuiſſe ſuppeditata, multique, non tam quid, quam à quo ſit objectum, reſpiciant. De cætero rogo C. T. ut, qua uſus ſum in diſputando, libertatem boni conſulat: Idque ita, ſi & provocatus in arenam hanc deſcendi, & juſtæ defenſionis terminos nuſquam tamen exceſſi. F I N I S.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.



CHRISTIANI HUGENII

DE

SATURNI ANNULO

OBSERVATIONES.

CHRISTIANI HUGENII
DE
SATURNI ANNULO
OBSERVATIONES.

I.

Observationes in Saturnum Parisiis habitæ in Bibliotheca Regia.

ANno 1668, 17 Aug., hora 11 vespertinâ D[ni] Hugenius & Picart observarunt Planetam Saturnum ope telescopiorum 21 pedum & invenerunt figuram ejus talem qualem hic exhibemus, globo in medio manifeste excedente supra & infra ovalem quod vix dum anno præcedenti erat conspicuum.

TAB. LI. fig. 2.

Mensurarunt diversimode inclinationem magnæ diametri Ovalis ad æquatorem, quæ inventa est circiter 9 graduum, licet eo empore tantum debuerit esse 4 graduum, secundum illa, quæ D. Hugenius dixit in Systemate Saturni, planum annuli, qui circumdat globum Planetæ cum plano Eclipticæ tantum efficere angulum 23. gr. 36; sed cum ultima hæc observatio, & similes aliæ hujus anni & præcedentis, magis exactæ sint & habitæ tempore magis opportuno ad mensurandam obliquitatem, illis, quæ fundamentum fuere memoratæ deteteminationis, D[us] Hugenius invenit, loco 23 gr. 36 angulum plani Annularis & Eclipticæ esse circiter 31 graduum; & hoc posito, non solum formam, quam jam habet

Vera annuli inclinatio.

bet

bet Saturnus, sed & omnes illas, quas observarunt Astronomi ab illo tempore a quo veras observare potuere, congruere perfecte cum hypothesi annuli, & peculiariter observationem D[ni] Campani, Anni 1664 initio Julii, quam ipse publici juris fecit, in quo magna Ovalis diameter duplicatæ minori diametro æqualis est.

Phasis rotunda.

Quod autem ad rotundam Saturni Phasin attinet, non potest nisi parum admodum tempus hujus mutari, ex memorata mutata inclinatione ita ut D[us] Hugenius adhuc dum phasin hanc rotundam expectet anno 1671, in quo æstate ansas amittere inchoabit, quas nisi post annum circiter recuperabit, juxta illa quæ tradidit in Systemate Saturni.

II.

Excerpta ex literis D. Hugenii, Academiæ regiæ scientiarum socii, ad auctorem Diarii Eruditorum de figura Planetæ Saturni.

Brachia Saturno renata.

Cum Saturnus abdicaverit figuram suam rotundam postquam hoc anno 1672 ex radiis solaribus emersit, uti anno præcedenti prædixeram, & cum illi brachia sint renata; ultima mutatio non minus meretur, ut in Diariis vestris notetur, quam quædam aliæ præcedentes, quarum ibidem mentionem fecisti.

Ultimum in conjunctione cum Sole fuit Planeta hic 12 Martii præterito, in 22 gr. 35 min. Piscium; magna autem obliquitas hujus loci Zodiaci ad nostrum horizontem, quando oritur, in causa fuit quo minus tribus mensibus, aurora prohibende, videretur; nam 5 Junii tantum D[us] Cassini primum illum potuit observare, cum brachia Saturni jam facta essent adeo clara & ampla, ut inde colligi debuerit, jam à longo tempore fuisse instaurata; Observabat etiam in disco Saturni parvam umbram ad latus septentrionale brachiorum, pari-

Umbra in disco Saturni.

riter ac exhibui in Syſtemate Saturni Tab. XLIX. *fig.* 6.; quod, æque ac inſtaurata brachia, congruit cum iis quæ ſtatui in illo Syſtemate de annulo, quo cingitur Saturnus. Sed quoniam hæc hypotheſis præcipue confirmatur obſervationibus, quas ultimo anno fecimus, quarum quædam nondum cum publico communicatæ fuere, ut mihi veniam concedas rogo has nunc memorare, cum annotationibus, quas ad eas feci.

Anno 1671 Saturnus apparuit rotundus ſine brachiis aut anſis uti prædixi ante annos 14. quum publici juris feci meum Syſtema, licet id acciderit duobus menſibus prius quam expectaveram, ſcilicet in fine menſis Maji. Percepta deinde eſt quædam interruptio figuræ rotundæ, quam non prævidi, & quam difficulter admodum prævidere potuiſſem, quia Saturnum tantum obſervaram per unicum annum, cum hæc vaticinarer. Sed noſti, quam primum intellexerim, brachia rediiſſe, quod D^us Caſſini obſervavit 11 & 14 Auguſti, me affirmaſſe illa certo certius brevi iterum peritura, quod quoque verum repertum eſt; nam 4 Novembris brachia Saturni erant adeo obſcura, ut dubitarem an quidem iterum apparerent, licet D^us Caſſini affirmet ſe illa percepiſſe ultimâ vice 13 menſis ſequentis Decembris, poſt quod tempus figura rotunda duravit, donec Saturnus in radios Solares ſe abſcondit.

Saturnus rotundus.

Hæc ultima brachiorum Eclipſis præcipue veritatem meæ hypotheſeos probat; facile enim patet quam difficile fuiſſet ſecundam prævidere mutationem, priori adeo vicinam, niſi illius veram cauſam perſpectam habuiſſem; præterquam quod modus, quo brachia ſecunda vice ablata fuere is ipſe ſit, quem ſtatui in meo Syſtemate. Vidimus enim illa pedetentim deficere à claritate ſuâ, licet ſemper manſerint ſatis ampla; quod erat certum indicium, radios ſolis valde oblique illuſtrare ſuperficiem annuli Saturni, quæ ad nos converſa erat, quam tandem non amplius illuſtrarunt ſed quidem oppoſitam. In præcedenti apparitione figuræ rotundæ, à fine Maji uſque ad 14 Auguſti, brachia latebant, non quia non illuſtrabantur, ſed quia viſus noſter, parum admodum

vel omnino nihil elevatus erat ſupra ſuperficiem annuli, quem Sol intuebatur.

Hæc omnia tantum illis ſcripta ſunt, qui cum cura examinarunt, quæ tradidi in Syſtemate Saturni: & pro iis adhuc addo, quantum attinet ad lineam æquinoctialem vel rotundæ apparitionis Saturni, quæ linea formatur interſectione annuli & plani orbitæ planetæ, me nullis cogi obſervationibus, ad ſitum illius mutandum quem in Syſtemate Saturni præſcripſi in $20\frac{1}{2}$ gr. Piſcium & Libræ. Quoties Saturnus è Sole viſus perveniet ad illa Zodiaci loca, rotundus apparebit, etiam quando ab hiſce tantum duobus gradibus removetur; nam ex obſervationibus anni ultimi percepi ita reſtringendos eſſe limites quos 6 graduum ſtatueram, ut ſatis facerem quibuſdam Galilæi & Gaſſendi obſervationibus, quorum Teleſcopia minoris notæ fuerant, quam credere auſus eram. Juxta ultimas haſce limitationes minus apparitiones formæ rotundæ Saturni durabunt quam ipſe olim prædixi; ita ut anno 1685 non initio menſis Martii, ſed menſe Julio, brachia amittet Saturnus prope finem apparitionis ſuæ, & illa recuperabit ſequenti menſe Novembri; pariter 1701 non poterit videri rotundus, niſi menſe Junio, initio ſuæ apparitionis, & menſe Augusto brachia ejus incipient renaſci.

Linea æquinoctialis annuli.

Antequam finem huic ſcripto imponam, hic addam, Tabulam, quam dedi pro motu parvæ Lunæ, vel ſtellæ, quæ comitatur Saturnum, & circa illum volvitur 47 minutis minus quam 16 diebus, huc uſque repertam eſſe adeo obſervationibus congruam, ut nondum videre queam, ſitne quidpiam addendum vel detrahendum.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
ΚΟΣΜΟΘΕΩΡΟΣ,
SIVE
De Terris Cœlestibus, earumque ornatu,
CONJECTURÆ
AD
CONTANTINUM HUGENIUM,
Fratrem:
GULIELMO III. MAGNÆ BRITANNIÆ REGI,
A SECRETIS.

Horat. Epist. 6. lib. I.

Hunc solem, & stellas, & decedentia certis
Tempora momentis, sunt qui formidine nulla
Imbuti spectent: quid censes munera terræ
Quid maris extremos Arabas ditantis & Indos?
Ludicra quid, plausus, & amici dona Quiritis,
Quo spectanda modo, quo sensu credis & ore?

BENEVOLO LECTORI SALUTEM.

Libellus hicce jam ad umbilicum deductus, & prælo destinatus erat, cum maximo rei literariæ damno Illustrem ejus Auctorem primum morbus, dein mors occupavit. Qui tamen ut in lucem prodiret, cavit, ultima voluntate fratrem, ad quem scriptus est, rogitans, hujus ut edendi curam suscipere vellet. Cui rei Nobilissimo Viro innumeris occupationibus & peregrinationibus, utpote qui Magnæ Britanniæ Regi ad res Batavas à secretis esset, distracto vacare non licuit, nisi anno ferme post Auctoris obitum. Qua re, intercedente deinde etiam Typothetarum mora, factum est, ut cum editioni jam omnia pararentur, & hic Vir fato cesserit, adeoque & Parente & eo, qui post parentis obitum ejus vicem gerebat, & ad quem destinatus erat, destitutus fuerit hic Libellus. Eadem tamen, qua ab Auctore conscriptus erat, ratione, eademque ad fratrem, licet jam defunctum, inscriptione, (Re-

ligio enim fuit quidquam immutare) prodit in publicum, non dubia ſpe, fore, ut eruditi, ſicut reliqua omnia Auctoris, ſic & ultimum hunc ejus fœtum benigne accipiant. Demonſtrationes equidem Mathematicas non invenient ubique, neque enim res patitur, ſed, quo in his rebus nihil ultra deſiderari jure poſſe videtur, veriſimiles & ingenioſas conjecturas. Quæ ex cœlorum notitia depromi potuerunt, ea hic videbunt ratione demonſtrata; quæ ex iis non patent, ex cœleſtium corporum cum tellure noſtra affinitate ſolerter conjecta. Verum hujus quid ſit, ex ipſo Auctore commodius perſpicies. Vale.

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœleſtibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

LIBER I.

FIeri vix poteſt, Frater optime, ſi quis cum Copernico ſentiat, Terramque, quam incolimus, è Planetarum numero unum eſſe exiſtimet, qui circa Solem circumferantur, ab eoque lucem omnem accipiant; quin interdum cogitet haud a ratione alienum eſſe ut, quemadmodum noſter hic Globus, ita cæteri quoque iſti, cultu ornatuque, ac fortaſſe habitatoribus non vacent. Præſertim ſi ad ea quoque reſpiciat quæ poſt Copernici tempora in cœlo deprehenſa ſunt; Comites nempe ſtellarum Jovis & Saturni, Lunæ montes campoſque, & alia multa; quibus non ſolum veritas inventi ab illo ſyſtematis, ſed & ſimilitudo ac cognatio, Terram inter & Planetarum corpora, magnopere confirmatur. Itaque & nobis, cum prælongis Teleſcopiis ſidera unà ſpecularemur; quod jam per multos annos, propter occupationes tuas & continuam fere abſen-

tiam, non licuit; sæpius ea de re sermones habitos memini. Qualia vero essent, quæ in istis regionibus extarent Naturæ opera, id ne sperandum quidem esse ut unquam sciri possit, frustraque proinde quæri, certo credebamus. Neque vero aut a priscis Philosophis, aut a recentioribus quidquam ejusmodi tentatum fuisse comperi. Nam inter illos quidem, jam ab ipso Astronomiæ exortu, cum primum Sphæricam esse Terræ formam intellectum est, eamque undique æthere cingi, fuere qui auderent alios esse in sideribus mundos, imo innumerabiles dicere. Posteriores vero, ut Cardinalis Cusanus, Brunus, Keplerus, qui & Tychonem Braheum idem sensisse scribit, Planetis quidem incolas suos tribuerunt; Cusanus & Brunus etiam Soli, & stellis inerrantibus: nihil tamen ulterius aut hi aut illi quæsivisse inveniuntur; neque etiam nuperus auctor Gallicus dialogi ingeniosi de Mundorum multitudine. Tantum fabulas quasdam de Lunæ populis nonnulli contexuerunt, animi causâ, Lucianicis, quas nosti, haud multo verisimiliores. Nam & Keplerianas his annumero, quibus ille in somnio Astronomico ludere voluit. Mihi vero, qui tot viris egregiis nequaquam me perspicaciorem esse existimo, sed eo feliciorem, quòd post illos tantùm non omnes, natus sim; cum ab aliquo tempore diligentius ista meditari cœpissem, visum est non prorsus obseptas esse, de rebus tam procul dissitis, inquirendi vias, sed verisimilibus conjecturis abunde materiam præberi. Quas conjecturas meas, prout sese subinde obtulerunt, in adversariis annotatas, nunc in ordinem redigere, tibique exponere volui; atque aliquid etiam adjicere de Sole, Stellisque inerrantibus, & mundi magnitudine, cujus particula quædam minima est totius Systematis nostri complexus. Et hæc quidem, pro solito tuo res superas cognoscendi studio, libenter te lecturum arbitror. Mihi certe scribere ea jucundum fuit; utque sæpe aliàs, ita nunc, velut in re ipsa, verum esse expertus sum illud Archytæ; *Si quis in cœlum ascendisset, naturamque mundi & pluchritudinem siderum perspexisset, insuavem illam admirationem ei futuram,*

Fuisse qui Planetis incolas tribuerint, sed nihil praterea de iis inquisivisse.

(*quæ*

(*quæ alioqui jucundiſſima fuiſſet*) *niſi aliquem cui narraret habuiſſet.* Utinam vero hæc noſtra narrare non omnibus poſſem, ſed præter te lectores arbitratu meo deligere liceret, qui nec Aſtronomicæ ſcientiæ, nec Philoſophiæ melioris rudes eſſent; quibus facile conatus hoſce probatum iri, nec, propter novitatem, defenſione opus habituros confiderem. Quia vero & in imperitiorum manus venturos provideo, & fortaſſe quorumdam ſeveriora judicia ſubituros, puto non abs re fore ut utrorumque reprehenſiones jam hinc repellere coner.

Occurritur objectionibus imperitorum.

Atque erunt quidem, qui cum Geometriam aut Mathematicas nunquam attigerint, omnino vanum ac ridiculum hoc inceptum noſtrum cenſebunt. Incredibile enim iis videtur, ut Siderum diſtantias, aut quæ ſit magnitudo eorum, metiri poſſimus. Tum vero motum huic Terræ aut falſo adſcribi exiſtimant, aut nequaquam adhuc probatum eſſe. Quare nihil mirum, ſi, quæ talibus fundamentis exſtruuntur, pro ſomniis nugiſque ſint habituri. Quid vero his dicemus, niſi aliter ſenſuros ſi diſciplinis iſtis, naturæque rerum contemplandæ, operam dediſſent. Hoc vero longe plurimis non licuiſſe ſcimus, vel quod ad ea parum ingenio comparati eſſent, vel quod unde diſcerent non haberent, vel denique quod ſuis, aut reipublicæ curandis negotiis, alio vocarentur. Itaque nihil eos reprehendimus; ſed, ſi diligentiam in his rebus noſtram condemnandam putabunt, ad magis idoneos judices provocamus.

Conjecturas haſce S. Scripturis non adverſari.

Erunt alii qui ea, quæ veriſimilia eſſe oſtendere conati ſumus, Sacris Literis adverſari prædicent, cum de Terris animalibuſque, atque etiam ratione præditis, nos differere animadvertent; de quorum origine, aut quod omnino in rerum natura extent, nihil illic traditum ſit, ſed ea potius ex quibus contrarium ſequatur. Tantum enim de Tellure hac, cum ſuis animantibus, herbiſque, & homine omnium domino commemorari. Quibus reſpondeo, quod & ante me alii, ſatis apparere non de omnibus iis, quæ Deus creavit, particulatim nos edoceri eum voluiſſe. Itaque cum vel

Siderum vel Terræ nomine, in prima Genesi, etiam Planetæ, qui præter Solem Lunamque sunt, comprehendantur; atque etiam Jovis & Saturni Comites; posse non tantum plures alios utriusque generis includi, sed & res innumeras quas in superficie eorum summo opifici collocare placuerit. Porro non nescire eos quo pacto interpretandum sit, quod dicitur omnia propter hominem condita esse; neque eo significari, ut a pluribus jam est animadversum, tot ingentia corpora stellarum, quas partim videmus, partim nec vidissemus quidem unquam, si Telescopiorum auxilium defuisset, nostræ utilitatis aut contemplationis gratia fuisse condita; quia id absurde diceretur. Quare cum operum Dei magna pars extra conspectum hominum sit posita, neque ad eos pertinere videatur, haud alienum esse opinari, aliquos extare, qui illa propius aspiciant & admirentur.

Inquisitionem horum ut nimis curiosam reprehendi non debere.

Sed dicent fortasse, cum de his ipse supremus auctor nihil amplius docuerit aut revelarit, credendum esse sibi scientiam eorum reservasse, ac proinde temere, & curiose nimis de iis inquiri. At nimium ipsos sibi sumere ajo, si definire velint, quousque homines investigando progredi debeant, diligentiæque eorum modum statuere; ac si terminos, quos hic Deus præscripsit, certo cognitos haberent; aut in hominum potestate esset illos prætergredi. Et sane, si talibus scrupulis retenti fuissent qui ante nos vixerunt, adhuc ignorari potuisset quænam Telluris esset figura, aut quæ magnitudo, & num aliqua Americæ regio. Item an Solis radiis Luna illustraretur, quibusve ex causis aut hæc aut ille deficerent; ac pleraque alia, quæ Astronomorum laboribus repertisque accepta referimus. Quid enim tam absconditum & inaccessum videbatur, quam quæ de rebus cœlestibus in aperta luce nunc posita sunt? Ex quo intelligitur industriam mentisque acumen hominibus data esse, quibus paulatim rerum naturalium cognitionem consequerentur, neque esse cur conari desinamus & ulteriora inquirere. Attamen reconditiora illa, quibus hic præcipue insistimus, scimus non esse ejusmodi, ut quærendo penitus investigari possint. Itaque nihil veluti cer-

certum affirmamus, (quî possimus enim?) sed conjecturis tantum agimus, quarum de verisimilitudine suo cuique arbitratu judicare liberum sit. Quod si quis irritam igitur, & inanem in his operam nos ponere dicat, de rebus iis conjecturas prodendo, de quibus ipsi fateamur nihil certi unquam comprehendi posse: respondebo totum Physices studium, quatenus in causis rerum eruendis versatur, eadem ratione fore improbandum; *ubi verisimilia invenisse laus summa est, & indagatio ipsa rerum, tum maximarum, tum occultissimarum, habet oblectationem.* Sed verisimilium multi sunt gradus, alii aliis veritati propiores, in quo diligenter æstimando præcipuus judicii usus vertitur.

Conjecturas non esse vanas, quia non plane certa.

Ut vero mihi videtur, non tantum res ad cognitionem maximas hic indagamus, sed quarum contemplatio studiis quoque sapientiæ multum conducat. Expedit nimirum ut, velut extra Tellurem hanc positi, procul eam intueamur, quæramusque, an sola sit in quam omnem ornatum natura contulerit. Ita enim rectius quid sit, quoque loco habenda, intelligere poterimus: quemadmodum qui longinquas regiones obeunt, de patriæ suæ rebus verius judicare solent, quam qui nunquam inde se moverunt. Nec sane ille magnopere admirabitur quæcunque hic vulgo maxima habentur, qui, rationibus nostris aliquid tribuens, multitudinem Terrarum nostræ similium, similiterque incolis suis frequentatarum, sibi proposuerit. Deum vero, tantarum rerum effectorem, quî poterit idem non valde suspicere & venerari? cujus providentiam, sapientiamque mirabilem, passim hic assertam inveniet, contra falsas opiniones eorum, qui vel ex fortuito corpusculorum concursu ortam esse Terram, vel omni principio eam carere dixerunt. Sed jam ad propositum.

Ad sapientiam & pietatem facere quæ hic tractantur.

Et quoniam maximum sumetur argumentum, ad ea quæ instituimus probanda, ex ordinatione Planetarum Copernicea, quodque inter eos Tellus hæc haud dubie numeratur; bina schemata hic initio describo, quorum alterum orbes eorum, circa Solem dispositos, continet, veris proportio-

TAB. LIV. fig. 1.

ni-

nibus expressos; simile illi quod in Automato nostro sæpius conspexisti: alterum rationes magnitudinum ostendit, quibus corpora Planetarum inter se, & ad Solem, comparantur; quod in eodem Automato adjectum est. In priore punctum medium Sol est; à quo deinceps, noto omnibus ordine, sunt orbitæ Mercurii, Veneris, Telluris, cum superaddita via Lunæ; tum Martis, Jovis, & Saturni: ac circa Jovem, Saturnumque circelli Comitum; illius quatuor, hujus quinque. Quos circellos, cum eo, qui Lunæ nostræ dicatus est, longe majores hic poni sciendum, quam pro ratione ad Planetarum primariorum orbitas; ne, ob parvitatem, penitus visum effugerent. Orbitarum vero quanta reipsa sit vastitas inde intelligere licet, quod distantia a Sole ad Terram, decem vel duodecim millia Terræ diametrorum continet: de qua mensura pluribus postea agetur. Omnes porro in eodem fere plano sitæ sunt; ut proinde non multum discedant ab eo in quo Tellus circumit, quod Eclipticæ planum vocatur. Hoc vero oblique secatur ab axe Telluris, in quo illa volvitur horis viginti quatuor, respectu Solis: isque axis, nisi quod mutationem lentissimam subit, quam norunt Astronomi, sibi ipsi parallelus manet, dum ipsa circa Solem defertur; ex quo dierum noctiumque oriuntur vices, itemque temporum anni commutationes, ut passim docent eorum libri. Unde & tempora periodorum, quibus circuitus suos Planeta quisque peragit, huc transcribo. Nempe Saturni, annorum 29, dierum 174, horarum 5. Jovis annorum 11, dierum 317, horarum 15. Martis proxime dierum 687. Telluris dierum 365¼. Veneris dierum 224, hor. 18. Mercurii dierum 88.

TAB. LV. fig. 1.

Copernici systema exponitur.

TAB. LIV. fig. 1.

Hic est ille, notissimus jam, cælestium corporum ordo, a Copernico repertus, idemque naturæ simplicitati convenientissimus. Hunc si quis convellere aut improbare contendat; is discat primum, ex demonstrationibus Astronomorum, quanto in hac descriptione melius faciliusque omnium eorum, quæ circa motum siderum animadvertuntur, ratio reddatur, quam in Ptolemaico aut Tychonis systemate. Cogno-

Copernici doctrinam quæ rationes confirment.

noſcat etiam, ex ſingulari Kepleri obſervatione, quomodo Planetarum, interque eos Telluris, a Sole diſtantiæ temporibus periodorum, quas retuli, certa quadam proportione reſpondeant; quam poſtea Jovis quoque & Saturni Comites, horum reſpectu, ſervare deprehenſum eſt. Intelligat quam contra motus naturam quiddam comminiſcendum ſit, quo demonſtretur cur ſtella Polaris, in extrema cauda minoris Urſæ, exiguo nunc circulo moveatur, duobus gradibus & tertia parte à Polo diſtans; cum ante annos mille octingentos viginti, ætate nempe Hipparchi, duodecim gradibus, 24 ſcrupulis, ab eodem Polo abfuerit: poſt aliquot vero ſæcula, ad 45 gradus inde receſſura ſit, & poſt annorum viginti quinque millia, eodem quo nunc eſt, reverſura. Ut proinde cælum totum, ſi circumrotari dicatur, ſuper alio atque alio axe id faciat neceſſe ſit, quod eſt abſurdiſſimum; cum in Copernici hypotheſi nihil ſit explicatu facilius. Denique expendat omnia illa, quibus, ad argumenta Copernico objici ſolita, Galilæus, Gaſſendus, Keplerus, aliique plurimi reſponderunt. Quorum rationibus ita ſublati ſunt qui ſupererant ſcrupuli, ut omnes nunc Aſtronomi, niſi tardiore ſint ingenio, aut hominum imperio obnoxiam credulitatem habeant, motum Telluri, locumque inter Planetas, abſque dubitatione decernant.

Planetarum magnitudinis inter ſe & ad Solem ratio. TAB. LV. fig. 1.

In altero, quod dixi, ſchemate, ita horum globi cum Sole oculis ſubjiciuntur, ac ſi juxta ſe poſiti eſſent. Atque hic rationem diametrorum, ad Solis diametrum, eam ſecutus ſum, quam tradidi in libro de Saturni Phænomenis. Nempe Annuli Saturnii eam quæ 11. ad 37; Globi incluſi, ad eandem Solis diametrum fere, quæ 5 ad 37; Jovis, quæ 2 ad 11; Martis, quæ 1 ad 166; Telluris, quæ 1 ad 111; Veneris, quæ 1 ad 84; quibus nunc addo Mercurii, quæ eſt 1 ad 290 ex Hevelii obſervatione Anno 1661 habita; cum in Solis diſco Mercurius conſpiceretur, noſtro tamen, non illius calculo.

Quomodo autem hæ noſtræ magnitudinum rationes inventæ ſint, tum ex cognita proportione diſtantiarum à Sole, tum

ex menſura Diametrorum, Teleſcopiis capta, eo, quem dixi, libro oſtendi: neque adhuc video cur multum, ab iis quas tunc definivi, recedam; etſi nihil eis deeſſe non contenderim. Nam quod multi exiſtimant, in metiendis apparentibus diametris, præſtare lamellis noſtris uſum Micrometrorum quæ vocant, quibus fila tenuiſſima in foco Lentis majoris prætenduntur, nondum iis aſſentiri poſſum, ſed aptiores eſſe lamellas virgulaſve tenues arbitror, quas eo loco objiciendas docueram. Ex quo iſtud Micrometrorum inventum, itemque Teleſcopii ad organa Aſtronomica adaptatio, non multo poſt emanavit: non ſine laude tamen eorum, qui in perficiendo tam utili invento elaborarunt.

Micrometris præſtare lamellas virgulaſve tenues.

Cæterum, in hac planetarum comparatione, notanda eſt ingens Solis magnitudo, cum interioribus quatuor Planetis collata; utque hi Saturno quoque, ac Jove, longe longeque minores ſint. Nam conſiderandum, non ordine creſcere eorum corpora cum diſtantiis a Sole; quippe cum multo major ſit Veneris, quam Martis, globus.

Solem Planetis multo majorem eſſe.

His de utroque Diagrammate expoſitis, nemo, ut puto, jam non videt, quam clare ex priore, in quo ſyſtematis eſt typus, ſequatur, eodem genere, cum cæteris quinque Planetis, Tellurem hanc noſtram contineri. Nam vel ipſi circulorum poſitus hoc teſtantur. Atqui præterea conſtat, teleſcopiorum obſervationibus, & globoſa eſſe omnium corpora, itidem ut Telluris, & à Sole ſplendorem ſimiliter eos mutuari. Ac denique in hoc quoque ei ſimiles eſſe, quod in ſe ipſis circum proprios axes volvantur: quis enim de cæteris dubitet, cum in Jove & Marte hoc certo compertum ſit? Sicut autem Tellus Lunam comitem habet, ita Jupiter & Saturnus ſuas. Quid igitur tam probabile eſt, cum in his tot rebus Telluri cum Planetis illis primariis intercedat ſimilitudo, quam non minori quoque dignitate & pulchritudine eos eſſe, nihiloque minus ornatos cultoſque: aut quænam cur hoc aliter ſe habeat ratio excogitari poteſt?

Tellurem Planetis, & hos Telluri recte aſſimilari.

Sane ſi cui, in diſſecti canis corpore, viſcera oſtenderentur, cor, ſtomachus, pulmones, inteſtina; tum venæ, arte-

Ex ſimilitudine in hiſce recte argumenta peti.

teriæ, nervi; etiamsi nunquam animalis corpus apertum conspexisset; vix dubitaret, quin similis quædam fabrica, ac partium varietas, in bove, porco, cæterisque bestiis inesset. Nec si unius, ex Saturni aut Jovis Comitibus, naturam cognitam haberemus, non eadem fere quæ in illo, in cæteris quoque reperiri putaremus? Similiterque ex uno quopiam Cometa, si quidnam esset perspici posset, eandem omnium rationem esse statueremus. Itaque plurimum ponderis habet illa ex similitudine petita, & à rebus visis ad non visas producta ratio. Quam proinde sequentes, ex Planeta uno, quem coram aspicimus, de reliquis ejusdem generis rectè conjecturam faciemus.

Planetas solidos esse & gravitate pollere.

Ac primùm quidem, non aliter quam Tellus nostra, solido corpore eos constare existimabimus. Deinde prorsus etiam verisimile censebimus, adesse globis eorum id quod gravitatem appellamus; cujus vi corpora quæque, in superficie eorum hærentia, premant eam; aut, si dimoveantur, ex omni parte velut attracta recidant. Quod ex ipsa quoque globi forma liquet, cum hæc ex conatu corporum, ad centrum unum tendentium, generetur. Imo jam, certo quodam ratiocinio, colligere didicimus, quanto majus minusve in Jove ac Saturno, quam apud nos, gravitatis momentum esse debeat. Qua de re, deque auctore ejus, in Diatriba de Causis gravium diximus.

Nec deesse illis animalia.

Nunc vero ulterius quærere pergamus, quibus gradibus ad penitiora quædam, de statu ornatuque Terrarum istarum, cognoscenda perveniri possit. Ac primùm quam verisimile sit herbas, & animalia in earum superficie existere, æque ac in Tellure nostra. Nemo negabit puto, & formam & vitam, & crescendi generandique rationem, in stirpibus animantibusque majus quid esse, magisque mirandum quàm corpora vitâ carentia, quantumvis mole conspicua sint; velut montes, rupes, maria. Patet etiam in utroque illo viventium genere, multo aliter longeque expressius, cerni Divinæ providentiæ intelligentiæque præstantiam. Cum

enim quæ in Terra, imo quæ in Cælo quoque aſpicimus, aliquis Democriti, aut etiam Carteſii ſectator, ita ſe explanaturum profiteri poſſit, ut tantum atomis & motu horum indigeat; in herbis tamen & animalibus fruſtra erit, nec de primo eorum exortu quidquam veriſimile adferet; cum nimis manifeſto appareat, nunquam vago, ac fortuito corpuſculorum motu, talia quædam prodire potuiſſe: quippe in quibus omnia ad certum finem egregie apta accommodataque cernantur; cum ſumma prudentia, & legum naturæ, ipſiuſque Geometriæ, cognitione exquiſita, quemadmodum in ſequentibus ſæpius oſtendetur: ut jam omittamus illa in progignendo miracula. Quod ſi igitur in Planetis nihil aliud quàm vaſtæ ſolitudines, corporaque inertia, & vita carentia reperiantur; atque abſint ea in quibus clariſſime certiſſimeque Architecti ſupremi ſapientia eluceſcit; haud dubiè multum dignitate & pulchritudine concedent Telluri noſtræ: quod, ut jam dixi, rationi adverſatur.

Ut nec plantas.

Non igitur ſic; ſed erunt & ibi corpora quædam motu prædita, ſeſeque ipſa moventia, neque his quæ in Terra ſunt ignobiliora; adeoque erunt animantia. His autem poſitis, jam de herbis quoque fere neceſſario concedendum eſt; ut ſit aliquid quo illa alantur. Omnia vero hæc non aliter quam in ſuperficie Planetariorum globorum exiſtere, dubitari non poteſt; cum calore Solis gaudere ac foveri debeant; cujus radiis, non ſecus quam Tellus noſtra, expoſiti ſint.

Sed dicet aliquis, celerius quàm par eſt, hic nos progredi. Nam, ut non negetur res aliquas in Planetarum ſuperficie reperiri, quæ ibi creſcant & moveantur, Deoque auctore, non minus quam noſtra hæc, dignæ ſint; longè diverſam tamen earum poſſe eſſe naturam, ut nec materia, nec creſcendi more, nec extrinſeca forma, aut internis partibus, quidquam iis, quæ apud nos ſunt, ſimile habeant: ac talia ſint denique, ut nihil ejuſmodi in mentem homini venire poſſit. Hoc igitur jam quæramus quam ſit veriſimile; & an non potius credendum ſit, non tantam eſſe diverſitatem

quan-

quanta existimetur. Favet eorum sententiæ, qui omnia alia illic imaginantur, quod Natura videatur varietatem plerumque, & plurimis in rebus, sectari; quodque Conditoris potentia hoc ipso magis declaretur. Sed cogitare debent, non esse hominum arbitrio definiendum quàm magna ista sit varietas ac dissimilitudo. Neque, quia possit esse immensa, resque illæ ab intellectu, & comprehensione nostra penitus remotæ, idcirco necesse esse, ut reipsa tales existant. Quamvis enim similia omnia iis quæ apud nos sunt, finxisset Deus in cæteris Planetis; nihilo minor esset spectatoribus eorum, si qui sunt, admiratio, quam si plurimum distarent: cum, quid in aliis effectum sit, nullo modo possint cognoscere. Potuisset in terris Americæ, aliisque longè remotis, aliqua creasse viventia, quæ his nostris nihil simile haberent; neque id fecit tamen. Nam formarum quidem diversitatem aliquam esse voluit, quibus animalia herbæque nostræ à transmarinis illis, differerent, sed & in his ipsis formis, inque crescendi & generandi modis, multa utrisque convenire fecit. Habent enim & illic animalia pedes, alas; atque intus cor, pulmones, intestina, vulvas; cum hæc omnia in unoquoque genere illorum, ac nostratium quoque, planè diversa ratione ordinari potuerint, ab infinitæ solertiæ opifice. Non igitur omnem varietatem quam poterat in rebus creatis, earum auctor exhibuit, nec proinde argumento illi, quod a Naturæ novandi studio petitur, tantum tribuendum est, ut omnem, qui in cæteris Planetis est, ornatum ab eo, qui in Terra nostra conspicitur, prorsus alienum putemus. At contra credibile est, inter ea quæ in superficie istorum globorum generantur, quæque apud nos sunt, præcipuam esse differentiam, quæ ex majori, minorive, eorum a Sole, caloris vitæque fonte, distantia oriatur. Propter quam tamen magis materiam, quam formam rerum, variari necesse sit.

Non nimiam in hisce fingendam dissimilitudinem.

Ad materiam vero quod attinet qualiumcunque stirpium, atque animantium, quæ Planetas exornant, etsi qualis sit cogitatione assequi nequeamus, illud tamen vix dubitari potest, quin ex elemento humido, uti nostra omnia, crescant &

alantur. Nihil enim aliter gigni posse omnes fere Philosophi arbitrantur; & fuere inter præcipuos, qui ex aqua omnium rerum originem esse dicerent. Etenim, sicca & arida quæ sunt, motu carent: absque motu vero nihil corporibus, quo augeantur, accedere posse manifestum est. At liquidorum particulæ, & inter se continue moventur, & facile sese ubique insinuant; quo fit, ut non tantum seipsas, sed & alias diversæ naturæ, quas secum vehunt, crescentibus apponere aptæ sint. Ita enim, aquæ affluxu, & herbas adolescere, foliisque & fructibus augeri, & lapides ex arena concrescere cernimus. Itemque metalla & crystallos, gemmasque incrementa inde capere satis constat, etsi in his obscurius id animadvertitur, propter lentissimos progressus; quodque sæpe non in iis, quibus enatæ sint, locis cavitatibusque reperiantur; pervetustis, ut videtur, Terræ ruinis convulsionibusque disjectæ. Sed aquæ elementum a Planetis non abesse, verisimiles quoque conjecturæ suppetunt, ex telescopiorum observationibus. Apparent enim in Jove tractus quidam reliquo disco obscuriores, iique non eadem semper forma permanentes, quod nubium proprium est. Maculæ vero, quæ immutabiliter globo ejus inhærere conspiciuntur, sæpe longo tempore obtectæ manent, nubibus videlicet illis interceptæ, è quibus deinde rursus emergant. Atque etiam nubes in medio Jovis disco exoriri quandoque annotatum fuit, & maculas quasdam minores existere, reliquo corpore magis lucidas, neque eas diu superesse; quas Cassinus ex nivibus esse conjectabat, cacumina montium insidentibus. Mihi non improbabile videtur, terræ regiones candidiores esse, superfusis nubibus plerumque occultatas, ac nonnunquam ab iis liberas.

Aquas a Planetis non abesse.

Apparent, etiam in Marte, lucis & obscuritatis discrimina, ex quibus conversio ejus ad Solem, viginti quatuor horis cum 40 scrupulis primis, absolvi reperta est; nubes tamen nondum fuerunt animadversæ, idcirco quod multò minor cernitur quam Jupiter; etiam cum maximè ad Tellurem appropinquat. Præterquam quod & intensior Martis lux, utpote a

a propiore Sole accepta, intuentibus impedimento est. Eademque lux magis etiam obstat in Venere. Sed si Tellus ac Jupiter nubes aquasque habent, vix dubitandum est quin & in cæteris inveniantur Planetis. Nec tamen nostræ prorsus similes esse aquas istas dixerim; etsi liquidæ ut sint, ad usus quos præstare debent, requiritur; ut verò perspicuæ, ad pulchritudinem. Nostra enim hæc, in Jove & Saturno, continuo gelu astringeretur, propter magnam Solis distantiam. Itaque putandum est naturam earum, quæ in Planetis sunt, ad suam quamque regionem attemperatam esse; ut in Jove quidem ac Saturno difficilius in glaciem vertantur, in Venere verò, ac Mercurio, minus facile in vapores abeant. In omnibus autem attractum a Sole humorem, subsidere rursus, & unde venit reverti, necesse est, ne penitus aridum Solum relinquatur. Non cadet autem nisi in guttas densatus; quod eveniet, sicuti apud nos, cum in frigidiorem locum ascenderit ex inferiore calidioreque ob terræ viciniam.

Nostra tamen non prorsus similes.

Habemus igitur in globis illis campos Solis radiis expositos, pluviisque aut rore irrigatos, in quibus si quid enascatur; ut fieri debere utilitatis & ornatus gratia diximus; id eodem quo apud nos modo fieri verisimile est: cum nec aliter fere, nec melius possit. Ut nempe radicibus suis solo adhæreat, simulque harum fibris humorem inde combibat. Neque vero satis ornatæ mihi esse terræ istæ videbuntur, nisi stirpes quasdam habeant alte excrescentes, quæque adeo arbores, aut arborum instar, fiant: quandoquidem hæ maximum, ac, præter aquas, unicum sunt ornamentum, quod Natura terris largiri possit. Quæ quantum amœnitatis & gratiæ afferant facile unusquisque secum existimat. Ut omittam jam materiæ ex arboribus oportunissimum ad omnia usum. Porro vix aliter quoque propagari stirpes, aut perennare posse existimo, quam producendis seminibus. Cum unica fere hæc ratio videatur, eademque tam mirabilis, ut non solius Telluris nostræ gratia inventa sit. Denique nihil vetat, ut, quemadmodum in diversis hujus terræ regionibus, ita in istis quoque longè remotis, idem in iis quæ ad stirpes attinent, Natura secuta sit.

Nec alia ratione illic nasci & propagari stirpes quam apud nos.

Ne-

Idem & de animalibus verum esse.

Neque vero dispar ratio est in animalibus; cur non & pascendi, & generandi, modus similis putetur in Planetis ei qui est apud nos. Quia nempe universa terræ hujus animalia, sive quadrupedum generis, aut volucrum, aut natantia, aut reptilia, ipsaque insecta, idem naturæ præscriptum sequuntur. Vescuntur enim vel herbis, fructibusque, vel ipsis animantibus, quæ inde nutrita fuere: omniumque generatio per conjunctionem maris & fœminæ, perque fæcunditatem ovorum (nam & hæc ubique animadvertitur) peragitur. Nam hoc quidem certum est, fieri non posse ut, vel herbæ, vel animantia quæ illic sunt, sine propagatione generis sui esse perseverent; quia vel fortuitis casibus interire ea ac deficere contingeret; cum herbæ stirpesque humida materia constent, eoque etiam exarescere debeant; animalia mollibus flexilibusque membris, nec, ut silices, duris. Quod si in his alias nascendi vias comminiscamur, velut ex arboribus; quemadmodum diu creditum est, ex harum genere quodam in Britannia anates nasci, apparet quàm id à ratione abhorreat, propter summam, quæ lignum inter carnesque est, differentiam. Vel si animalia ex limo terræ existere putemus, velut de muribus in Ægypto multi prodiderunt, quis, naturæ paulo intelligentior, non videt hoc alienum esse institutis ejus? aut quis non existimet multò magis convenire Dei magnitudini ac sapientiæ, ut semel omnis generis animantia creaverit, inque Terrarum orbem certo modo, (quem nemo hominum adhuc divinare potuit) imposuerit, quam ut perpetuo novis ex terra producendis vacare necesse habeat? Quibus alendis, educandisque, abesset quoque prorsus parentum cura ac charitas, quam necessaria quadam ratione, omni animalium nostrorum generi, insitam, ingenitamque novimus. Sed hæc quæ ad propagationem attinent, etsi fortasse aliter sese habeant, hoc tamen rationibus superius adductis satis probatum est, & stirpes & animalia in Planetarum terris inveniri, ne scilicet sint hac nostra viliores. Quod cum ita sit, tum quoque, ne minus, quam nostra Tellus, istæ aliæ ornatæ sint, necesse est, ut non minor sit,

in

in utroque genere illo, quàm apud nos varietas. Quænam vero hæc esse potest? Equidem cum, in omni animantium nostrorum genere, cogito quibus modis moveantur; omnia video eo reduci, ut vel pedibus ingrediantur binis, quaternisve; insecta senis, vel etiam centenis; vel ut in aëre volent, alarum mirabili vi & moderamine; vel sine pedibus reptent; vel flexu corporum vehementi, aut etiam pedum percussu, in aqua sibi viam aperiant. Præter hos incedendi modos, vix videtur alius dari, aut omnino mente concipi posse. Ergo quæ in Planetis extant animantia, uno aliquo ex his utentur; aut quædam pluribus etiam, quemadmodum apud nos aves amphibiæ; quæ & pedibus incedunt, & natant in aquis, & in aëre volitant: & crocodili & hippopotami, inter terrestria, & aquatica, medii generis. Nulla autem præter hasce vita cogitari posse videtur. Quid enim esse possit, in quo animantia existant, præter tellurem solidam, aut Elementum liquidum, quale aquæ nostræ, aut multo liquidius, quale aër; aut illis similia. Posset enim esse aër multò, quàm apud nos densior, graviorque; eoque ad volandum accommodatior, neque tamen minus perspicuus. Possent etiam liquidorum plura genera, alia aliis superinducta esse. Velut si, super mare, incumbere cogitetur alia quæpiam materia, quæ decuplo levior sit aqua, centuplo gravior aëre; ac sua quidem superficie extrinsecus terminata, sed ut extra eam, terræ partes solidæ emineant. Sed non est, cur plura hujusmodi in cæteris Planetis, quàm in nostro, inveniri putemus, & si inveniantur, non tamen aliis modis ibi animalia moveri poterunt. Cæterùm quod ad varias eorum formas attinet; cum videamus in variis terræ regionibus miram adeo ac multiplicem diversitatem; invenirique in America quæ frustra alibi quæras; magna ratio est ut nullam earum formarum, quæ in Planetis exstant, imaginando assequi nos posse credamus. Quanquam si omnes istos movendi modos cogitemus, quos hic recensui, nihil mirum esset non magis differre aliquod istorum animalium à nostra-

te quopiam, quam nostra discrepant inter se. Ea dico quibus minimum est similitudinis.

Summam animalium apud nos varietatem esse.

Quam varia porro sint genera eorum in Planetis ita optimè colligemus, si ad ea quæ apud nos sunt, miramque in iis formarum diversitatem, animum advertamus. Planè enim verisimile est, non minori numero occursuras, si quis ad Jovis, aut Veneris globum cominus spectandum admitteretur. Percurramus verò (nam de omnibus dicere longum esset) majores nostrorum animalium differentias, vel formâ, vel proprietate aliqua singulari notabiles; idque in terrestribus, aquatilibus, volucribus. Cogitemus quæ sit inter equum, elephantum, leonem, cervum, camelum, porcum, simiam, histricum, testudinem, chamæleontem, dissimilitudo; quanta in aquaticis, cetum inter & phocam, raiam, lucium, anguillam, sepiam, polypum, crocodilum, piscem volantem, torpedinem, cancrum, ostream, muricem. In avium genere quantum discrimen, aquilæ, struthiocameli, pavonis, cygni, noctuæ, vespertilionis. Reptilia pro uno tantum genere censeamus. At in insectis formicas spectemus, araneos, muscas, papiliones; & miram horum naturam, quod ex vermibus volatilia evadant. In omnibus vero his, scimus quàm magnus præterea sit numerus minus dissidentium.

Nec minorem in Planetis.

At quantuscunque sit, nihilo minorem esse in unoquoque reliquorum Planetarum putandum est. Quamvis vero de figura istorum animalium frustra per conjecturas quæratur, tamen de vita eorum generatim jam aliquid assecuti videmur; & de sensibus erit in sequentibus quod dicamus.

Idem in stirpibus locum habere.

Sicuti verò animantium, ita stirpium quoque & arborum nostrarum præcipuæ differentiæ expendi possunt. Velut quæ in abiete, quercu, palma, vite, ficu; tum ea quæ nuces, Cocos dictas, generat arbore; itemque alia apud Indos, è cujus ramis radices novæ pullulant, inque terram demittuntur. Item, in herbis, gramen, papaver, brassica, hedera, pepones, ficus Indica foliis crassis, sine caule, succrescentibus,

bus, aloë. In quibus rursus ea quam scimus, minus dissimilium est copia. Ad hæc propagandi viæ variæ inspiciantur; velut ex seminibus, nucleis, taleis, insitione, bulbis. Quibus omnibus nihilo pauciora, aut minus miranda, in Planetarum terris reperiri, existimandum sit.

In Planetis esse animantia, quæ ratione utantur.

Sed quod in hac disquisitione præcipuum est, plurimamque jucunditatem habet, nondum attigisse mihi videor; quamdiu nullos in terris illis spectatores posui, qui tot rebus creatis fruantur, pulchritudinemque, & varietatem earum, admirentur. Et video quidem, neminem fere eorum, quibus vel leviter hæc meditari contigit, dubitasse quin spectatores aliqui in Planetis collocandi sint: non quidem homines nobis similes, sed animantia tamen ratione utentia. Nempe iis visum est, qualemcunque terrarum istarum ornatum, velut frustra, nulloque fine aut consilio, fore procreatum, si non hoc propositum fuisset, ut ab aliquo cerneretur, qui intelligere ejus elegantiam posset, fructumque simul percipere, & summi opificis admirari sapientiam. Ego vero non hoc præcipuum argumentum habeo, cur animal rationis particeps Planetas incolere existimem. Quid si enim dicamus ipsum Deum spectare quæ effecit; (alia quidem ratione quam nos, sed videre eum quis dubitet qui oculos fabricatus est;) iisque delectari, neque præterea quidquam requiri. Nonne enim ob hoc ipsum & homines condidit, & quicquid continet mundus universus? Itaque quod præcipue me movet, ut rationabile animal in Planetis non deesse credam, hoc est, quod nimia Terræ nostræ præ cæteris illis esset præstantia ac nobilitas, si sola animal haberet tam longe cæteris omnibus animalibus, nedum stirpibus præcellens; in quo inest divinum quiddam; quo cognoscit, intelligit, res innumeras memoria complectitur, veri expendendi judicandique capax est, cujus denique gratia quicquid terra progenerat paratum esse videtur. Omnia enim in usus suos vertit. Lignis, lapidibus, metallis, domos exstruit; Avibus, piscibus, pecore & herbis vescitur; Aquæ & ventorum commodis ad navigandum utitur; ex florum odore pulchrisque coloribus

voluptatem percipit. Si nullum in Planetis est ejusmodi animal, quid esse queat, quod tanti æstimandum sit, quove is defectus pensetur? Pone in Jove majorem multo animantium varietatem; plures arbores, herbas, metalla: nihil erit in omnibus his, ob quæ tantum dignitatis accedat isti mundo, ac nostro propter humani ingenii mirabilem naturam. Hic si me judicium fallit, fateor me pretia rerum æstimare nescire.

Non obstare hominum vitia quo minus decorem terræ concilient.

Nec dicat aliquis, tantum malorum ac vitiorum eidem humano generi inesse, ut merito dubitari possit, an, tale quodpiam animal Planetariis mundis tribuendo, dignitas iis ornamentumque, an his contraria accessura sint. Primum namque non impediunt vitia, majori hominum parti insita, quin ii qui virtutem, ac rectum rationis usum sectantur, tanquam pulcherrimum quid præstantissimumque censendi sint. Præterea credibile est, ipsa illa animi vitia, magnæ hominum parti, non sine summo consilio data esse. Cum enim Dei voluntate ac providentia talis sit Tellus, ejusque incolæ, quales cernimus; absurdum enim foret existimare omnia hæc alia facta esse, quam ille voluerit, sciveritque futura; putandum est utique non frustra multiplicem adeo animorum diversitatem mortalibus esse insitam; sed malorum cum bonis misturam, quæque inde eveniunt infortunia, bella, calamitates, eo fine accedere, ut necessitate urgente stimulosque admovente, ingenia excitentur, exerceanturque, dum quærimus ea quibus ab hostibus nos tutemur, quibusve machinis telisque eos persequamur: Utque paupertatem ac miseriam depellere conantes, varias artes exquiramus, naturamque scrutemur, ex cujus cognitione deinde auctoris potentiam prudentiamque admirari necesse sit; quas forsan alias pari stupore ac bestiæ præteriissemus. Nec enim dubitandum est, si in continua pace, omniumque rerum affluentia homines ætatem agerent, fieri posse ut admodum diu, non aliter fere quam bruta animalia, victuri sint; omnis scientiæ expertes, pluriumque commodorum ignari, quibus melius jucundiusque vita transigitur. Careremus mirifica illa scriben-

bendi arte, nisi summa in commerciis bellisque necessitas eam extudisset. Huic artem navigandi, huic serendi debemus, maximamque partem cæterorum quibus fruimur inventorum; itemque naturæ arcana fere omnia, inter experiendum reperta. Ita ea ipsa propter quæ incusanda rationis facultas videbatur, possunt dici ad perficiendam exacuendamque eam plurimum prodesse. Nam & virtutes ipsæ, fortitudo animi, & constantia, vix aliter quam in periculis rebusque adversis apparere possunt.

Quod si igitur genus animalium rationabile in cæteris Planetis esse cogitemus, quod virtutibus vitiisque fere iisdem atque homines præditum sit, id tanti esse existimandum est, ut absque iis, longè quàm Tellus hæc nostra viliores futuri sint.

Nec rationem in Planetarum incolis à nostra diversam esse.

Positis vero ejusmodi Planetarum incolis ratione utentibus, quæri adhuc potest, anne idem illic, atque apud nos, sit hoc quod rationem vocamus. Quod quidem ita esse omnino dicendum videtur, neque aliter fieri posse; sive usum rationis in his consideremus quæ ad mores & æquitatem pertinent, sive in iis quæ spectant ad principia & fundamenta scientiarum. Etenim ratio apud nos est, quæ sensum justitiæ, honesti, laudis, clementiæ, gratitudinis ingenerat, mala ac bona in universum discernere docet: quæque ad hæc animum disciplinæ, multorumque inventorum capacem reddit. Exstaretne alibi diversa ab hac ratio? censereturque injustum aut scelestum in Jove aut Marte, quod apud nos justum ac præclarum habetur? Certè nec veri simile est, nec omnino possibile. Cum enim rationis, qualem hic agnoscimus, ductu opus sit ad tuendam vitam ac societatem (nam & hanc apud Planeticolas reperiri ostendemus) si contraria ejus decretis statuantur, sequetur ruina ac subversio eorum, quibus ejusmodi mens perversa contigisset. At conservatio, ut videmus, rerum conditori ubique proposita est. Verum utut affectiones animi à nobis aliquatenus diversæ sint apud istos longinquarum terrarum habitatores, puta in his quæ ad amicitiam, iram, odium, honestatem, verecun-

diam, decorem attinent; non tamen dubitari poteſt, quin in veri inveſtigandi ſtudio, judicandis rationum conſequentiis, ac præſertim in ratiociniis, quæ ad quantitatem ac magnitudinem ſpectant, circa quæ Geometria verſatur, (ſi quid habent ejuſmodi, quod mox inquiremus) non, inquam, dubitari poteſt, quin prorſus ſimilis ſit, eademque via ingrediatur illorum ac noſtra ratio; quodque apud nos verum eſt, idem ſit in cæteris Planetis. Etſi vis ac facultas in his rebus major minorve illorum incolis fortaſſe quam nobis contigerit.

Sed jam nimis longè provectum me eſſe ſentio. Ante enim diſpiciendum erat de ſenſibus corporeis iſtorum in Planetis agentium, quibus ſi carerent, vix jam aut vitam, ut animalia, ſortiti eſſe videri poſſint, aut habere, in quo rationis uſum exerceant. Puto autem oſtendi poſſe probabilibus argumentis & bruta animantia, & quibus ratio ineſt, convenire, in his quæ ad ſenſus attinent, cum iis quæ terram hanc incolunt. Primùm namque ſi cogitemus quid ſit in animalibus videndi poteſtas, abſque qua neque paſcendi ratio eſſet, nec pericula vitandi; nec denique vita alia quam talparum aut lumbricorum; prorſus neceſſe eſſe intelligemus ut, ubi ſunt animalia his præſtantiora, ibi & viſu prædita ſint. Cum nihil ad vitam vel conſervandam, vel exornandam æque conducat. Quod ſi vero inſpiciamus mirabilem lucis naturam, ſtupendumque artificium, quo ad eam fruendam oculi comparati ſunt, facile cognoſcemus, perceptionem rerum procul diſtantium, cum circumſcriptione formarum, diſcrimen intervallorum, non alio modo, quam qui ex viſu ſit, inſtitui poſſe. Non enim poteſt hic ſenſus, imo nec alius quiſquam eorum quos novimus, exiſtere, quam ex motu extrinſecus adveniente. Qui motus, ut alibi explicuimus, in efficiendo viſu, à Sole proficiſcitur, aut ſtellis inerrantibus, aut igne; quorum particulæ celerrima agitatione concitæ, circumfuſam cæleſtem materiam continue pulſant, impelluntque; qui impulſus a proximis ad longe diſſitas citiſſime propagetur, fere eo modo quo ſonus per aërem. Abſque hoc motu, materiaque ætheris

Nec deeſſe illis ſenſus.

Nec viſum.

ris qui intermedia cæli ſpatia complet, nec Solem nec ſtellas cernere poſſemus; neque etiam alia quæ propiora ſunt corpora; cum ab his ad nos idem ille motus repercuſſus pervenire debeat. Hic, oculorum ſenſu perceptus, lux appellatur. Inque eo ſenſu mirabile eſt ante omnia, quo pacto ad tantam ſubtilitatem perduci potuerit, ut minimâ cæleſtis materiæ commotiunculâ afficeretur, ſimulque qua ex parte illa oriretur perciperet. Tum quomodo nihil ſeſe mutuo impediant innumeri ejuſmodi pulſuum proceſſus, ſphæricæque ſuperficies, aliæ alias trajicientes. Hæc omnia tam mira ac ſubtili ratione conſtituta ſunt, ut nec minimam eorum partem hominum ingenia excogitare potuiſſent, cum vix etiam quomodo ſeſe habeant comprehendere queant. Quid enim tam mirabile, quam particulam corporis quandam ita fabricatam eſſe, ut ejus opera animal ſentiat procul poſitorum corporum figuram, poſitum, motum quemlibet, diſtantiam; idque etiam cum colorum varietate, quo diſtinctius ea dignoſceret. Oculi vero præter hæc artificioſiſſima conſtructio, quæ perfectam rerum extra poſitarum picturam in cava choroidis ſuperficie imprimere apta eſt, omnem profecto admirationem ſuperat, neque eſt in quo manifeſtius Geometriæ artem Deus exercuerit. Atque hæc non tantum ſolertia ſumma inventa & fabricata ſunt, ſed & videntur eſſe ejuſmodi, ſi quis propius attendat, ut non alia ratione perfici potuerint quàm hac quam cernimus. Nam neque lux aliter, quàm communicato motu per materiam cæleſtem, res longo intervallo remotas ſenſibus noſtris offerre poterat; nec oculorum artificio ullum aliud par dari ad diſtinctè referendas rerum imagines. Ut valde eos falli arbitrer, ſiqui hæc eadem multis modis ordinari potuiſſe contendere audeant. Quare omnino credibile eſt utrumque iſtud eodem modo ſe habere in Planetarum regionibus atque hic; neque aliam eſſe iis, quæ illic habitant animantibus, videndi rationem. Habebunt igitur oculos; atque etiam binos minimum, quò poſſint rerum ante pedes poſitarum diſtantias percipere, ſine quo vix tutò ingredi licet. Et hæc quidem ad vitæ uſum ne-

cessariò tribuenda sunt animantibus Planetarum universis fere. Quæ vero ratione & mente prædita sunt, cum alias quoque ex visu utilitates capere possint, tantò magis consentaneum est ut tam præclaro munere donata sint. Nos enim colorum pulchritudinem, formarum elegantiam, ac concinnitatem visu percipimus; legimus, scribimus, cælum & astra contemplamur, eorumque cursus, magnitudinesque metimur; quæ quatenus ad Planetarum incolas quoque pertineant, paulo post videbimus. Nunc illud prius quæramus an cæteros quoque sensus nostros iis contigisse verisimile sit. Ac de auditu quidem multa suadent, ut cunctis, quæ illic sunt, animalibus eum inesse credamus. Prodest enim plurimum ad vitam à periculis tutandam; cum sonitu ac fragore sæpe imminens infortunium cognoscatur; præsertim noctu atque in tenebris, cum oculorum auxilium ereptum est. Videmus præterea ut animalia pleraque vocis sono sui similia advocent, multaque inter se significent, nobis quidem parum intellecta, sed plura fortasse quam putamus. Apud ea vero quæ ratione utuntur, si cogitemus quam mirabilis sit vocis & auditus oportunitas, vix credibile videbitur tam utilem sensum, tantumque loquendi artificium, hujus Terræ nostræ, ac nostri tantum causa fuisse inventum. Quomodo enim illis non multum desit ad vitæ commoda, & felicitatem nostræ similem, qui tanto beneficio carent: aut quanam alia re pensari hoc possit? Quod si porro consideremus, quam pulchre, quamque industrie natura hoc effecerit, ut idem ille aër, cujus respiratione vivimus, cujus flatu navigamus, qui, ut volare queant, avibus præstat; ut, inquam, idem ille ad exprimendum proferendumque sonum comparatus sit; sonus verò ad formandum, auribusque ingerendum sermonem; vix credemus insignem hunc aëris usum, in terris istis longinquis eam neglexisse? Esse enim illic aërem qui terris incumbat, vix dubitari potest, cum nubes in Jove apparere dixerimus. Sicut enim hæ ex aquæ guttulis minimis constant, ita ex particulis aquæ seorsim volitantibus magna ex parte formatur aër ille qui propius terram

Non auditum,

Nec per quem sonus perferatur aërem,

ram circundat. Quem Planetarum globis adesse etiam hoc suadet, quod respirandi ratio, qua vita sustentatur omnium quæ hic habemus animantium, videtur omnino ex universalioribus illis naturæ institutis esse, velut nutriri ex fructibus terræ.

De sensibus autem reliquis animalium ut dicere pergam, eum sanè qui ex tactu oritur, necessitate summa datum esse apparet omnibus iis quæ molli flexilique pelle teguntur, quò à lædentibus caveant refugiantque; cum absque eo vulnera, plagas, contusionesque crebras acceptura fuerint. In quo tam provida natura fuit, ut, ne minimam quidem pellis particulam, doloris sensu vacare voluerit. Itaque hanc facultatem, tam necessariam ad conservandam animalium incolumitatem, omnino credibile est etiam planetas inhabitantibus inditam esse.

Nec tactum,

Odoratum vero ac gustum quis non videt necessaria esse pascentibus, quo conducibilia a noxiis, nihilve profuturis dignoscant. Itaque si herbis, seminibus, aut fortasse carnibus quoque in regionibus istis animalia alantur; etiam his sensibus, tam ad cavendum, appetendumque necessariis, credibile est ea non destitui.

Nec odoratum, nec gustum.

Scio à nonnullis fuisse quæsitum, an non alii præter eos quinque quos diximus, naturâ dari potuerint. Quod quidem si concedatur, forsan dubitandum sit animalium planetariorum sensus longè alios esse ac nostratium. Nec sanè obstare quidquam videtur quo minus alii extare possint percipiendi modi: attamen cum perpendimus ad quos vitæ usus unusquisque eorum, quos habemus, comparati sint; non videtur saltem alius quisquam necessarius adjungi potuisse. Nempe effecit providentia ut & propinqua, & longius remota, qualia essent oculis sentiremus. Rursus ut non visa, sive a tergo, sive in tenebris, auditus exciperet. Item ut quæ nec oculi nec aures adesse nunciarent, alius tamen sensus qui in naribus est præsentiret, idque in canibus mirabili ut scimus subtilitate. Postremo effecit ut quæ quatuor istos sensus effugerent, quò minus in corpus impacta nocere pos-

Nec horum sensus longe alios esse ac nostratium.

ſint, tactu perciperentur. Ita omnibus modis ſaluti conſervationique animalium conſuluit, nec quidquam amplius addi aut deſiderari poſſe videtur; ut proinde planetarum incolis vix aliud niſi ſuperfluum largitura fuerit.

Cum autem ex ſingulis ſenſibus, præter utilitatem, voluptas aliqua ad homines perveniat; velut ex guſtatu in cibis; ex odoratu in floribus & aromatis; ex viſu in contemplanda pulchritudine formarum, & colorum; ex auditu harmonicorum ſonorum; ex tactu in rebus venereis, (niſi peculiaris quidam ſenſus hic dicendus eſt) animalibus verò cæteris ex quibuſdam horum; nonne dicemus hæc naturæ munera fere eodem modo reliquorum Planetarum incolis diſtributa eſſe. Certe id quidem ratio poſtulare videtur. Sive enim cogitemus, quanto in univerſum, propter hæc, jucundior feliciorque vita reddatur, non debemus maximum ejus bonum noſtræ Telluris habitatoribus aſcribere, cæteras tenentibus denegare, quaſi res noſtræ rebus illorum multò præferendæ ſint. Sive ad voluptates, quæ in cibis capiendis, & in conjunctione utriuſque ſexus contingunt, attendamus; intelligemus hæc eſſe neceſſaria quædam veluti providæ naturæ juſſa, tacitè cogentis ad conſervandum, propagandumque animantium genus: vel etiam, in beſtiis quidem, fortaſſe genus ipſum propagari, ut utraque illa jucunditate fruatur, ut proinde, utroque nomine, in cæteris Planetis eadem reperiri conſentaneum ſit. Equidem cum hæc omnia quanti ſint, quantamque utilitatem habeant, conſidero; quamque admirabile ſit, tale quid, quale eſt voluptas, in rerum natura exiſtere; omnino adducor ut credam, non ſoli Telluri noſtræ, quæ de minoribus planetis unus eſt, rem tantam obtigiſſe. Et hæc quidem de voluptatibus iis quæ ſenſus corporeos afficiunt, rationis facultatem aut nihil, aut leviter tantùm. Sunt autem homini, præter iſtas, aliæ quoque; quæ mente tantum, & rationis ſenſu percipiuntur; aliæ cum lætitia conjunctæ; aliæ ſeriæ, neque ideo minoris faciendæ; velut quæ ex oblectatione ſcientiarum, inventorum, verique cognitione oriuntur; de quibus omnibus, an ad alio-

Ut nec voluptatem ex iis ortam.

rum

rum quoque planetarum incolas pertineant, in sequentibus dicendi locus erit.

Supersunt alia nunc expendenda quæ in terris illis similia esse rebus nostris verisimile sit. De Elementis terræ, aëris, & aquæ, vidimus jam quàm probabile sit ea in Planetis cæteris non deesse. Videamus & de igne, qui apud nos quidem non tam Elementum esse dicendus est, quam motus quidam concitatissimus particularum à certis corporibus abreptarum. Hoc verò, quidquid est, etiam Planetarum incolis datum esse, multa sunt quæ verisimiliter probent. Primum quòd non tam in Terra hac, quàm in Sole, ignis sedes collocata videatur; ac sicut, calore Solis, herbæ & animantia hic crescunt ac foventur, ita quoque haud dubie in cæteris fiat Planetis. Cum autem intensior calor ignem generet, credibile est illic quoque, ac præsertim in Soli propinquioribus, eosdem aut majoris caloris gradus existere, eorumque vi ignem. Deinde videmus quam multis modis excitetur, velut colligendis Solis radiis, repercussu pelvium aut speculorum; ferri & silicis collisione; lignorum attritu mutuo; herbæ non bene siccæ congestis acervis; ex fulmine; ex montium terræque sulphureæ incendiis. Quare mirum esset, non aliquo ex istis omnibus, in Planetarum terris, eum accendi. Cogitemus deinde quanta apud nos sit ignis utilitas, quantaque necessitas. Hujus enim beneficio frigoris incommoda depellimus in iis regionibus, ubi calor Solis minus viget propter radiorum obliquitatem, atque ita efficimus ne magna Terrarum pars inculta inhabitataque maneat; quod in omnibus Planetarum globis, sive æstatis hyemisque vicissitudines sentiant, sive perpetuo fruantur æquinoctio, æque necessarium est remedium; quoniam & in his, loca polis viciniora, parum juvari Solis calore certum est. Eodem igne nocti lucem inducimus, diemque velut alterum creamus, quo non parum temporis vitæ adjicitur. Itaque ob hæc omnia prorsus verisimile est tanta re non solos Telluris incolas frui, sed omnibus Planetis communiter esse concessam.

Ignem quoque Planetis communem esse.

Porro quæri poteſt de animalibus, tam ratione utentibus quàm brutis; atque etiam de ſtirpibus arboribuſque; an, quæ iſthic naſcuntur, noſtris magnitudine reſpondeant. Nam ſi hæc ipſorum globorum mole natura metiatur, eſſent in Jove ac Saturno animalia quædam decies aut quindecies altiora Elephantis, aut tantundem longitudine balænas noſtras ſuperantia. Tum illa quæ ratione prædita ſunt, gigantum corpora haberent noſtris comparata. Qua quidem in re nihil video quod vel mirum ſit, vel fieri nequeat. Nulla tamen ratione cogimur ut re ipſa id ita eſſe credamus; quandoquidem in multis rebus apparet non iis menſuræ regulis naturam ſe obſtrinxiſſe quæ noſtra opinione convenientiores videbantur. Veluti quod ipſorum globorum Planetariorum moles nequaquam pro diſtantia eorum a Sole conſtituta ſit, cum Mars manifeſto minor ſit Venere, etſi remotior: cumque converſio Jovis, ſuper axe ſuo, 10 horis peragatur; Telluris vero, tantò minoris, impendat horas 24. Poſſet vero dubitari, cum proportionem in his ita negligat Natura, an non fortaſſe pumiliones quidam ſint incolæ Planetarum, aut ranis muribuſve non majores. Sed oſtendam poſtea cur id nequaquam conſentaneum putandum ſit.

Magnitudinem corporum in Planetis exiſtentium ex Planetarum magnitudine non recte conjici.

Aliud quoque dubium exoriri poſſet, utrum genus unum tantum animalium quæ rationem ſortita ſint, an plura in Planetis ſingulis reperiantur, & num diſpari rationis vi. Ac profecto tale quid in Terra hac noſtra contigiſſe cernimus. Non de iis nunc dico quæ figuram hominum præferunt; (etſi de his quoque id non abſurde dici poſſit) ſed ſi quorundam è beſtiarum genere, ſenſum intellectumque ſpectemus; veluti canum, ſimiarum, caſtorum, elephantorum; imo & avium quarundam, & apicularum, ea talia ſunt, ut nequaquam ſolum genus hominum rationis particeps dicendum videatur. Apparet enim quoddam hujus inſtar in iſtis omnibus, quod, abſque ulla inſtitutione aut experientia, iis ineſſe deprehenditur.

In Planetis ut in Terra varia eſſe animalia quibus ratio competat.

Attamen dubitari nequit quin longè præcellat hominum intelligentia & ingenium, quippe innumeris rebus aptum, con-

Et inter ea Hominibus ſimilia.

consilii ad futura capax, præteritorum memoria infinita præditum. Quod ingens præstantiæ discrimen si perpendamus, credemus non sine ratione, in cæteris quoque planetis, unum quoddam genus prætulisse naturam; atque eo magis, quod si plura forent eadem ingenii sagacitate, possent nocere sibi invicem, ac de possessionibus & imperio inter se contendere; quod nunc quoque faciunt nimis frequenter; licet unius generis sint, quæ in Terra hac dominantur. Verum hæc utcunque se habeant, de iis nunc agamus terrarum istarum animalibus, quæ maximè cæteris ratione antecellunt; quæramusque an sciri possit, quibus in rebus ejus usum impendant, & an habeant etiam artes scientiasque suas, velut nos in hoc nostro planeta. Quod quidem, inter ea quæ ad naturam eorum attinent, præcipuè expendi meretur. Sed, quo melius id fiat, paulò altius exordiendum est, vitaque & studia hominum attentius inspicienda.

Ac videtur quidem quatenus providendis procurandisque rebus tantum necessariis homines intenti sunt, ut nempe ab aëris injuriis tuti habitent; ut mœnibus inclusi ab inimicis sibi caveant, ut leges condant ad securè ac tranquille vivendum; ut liberos educent; victum illis, sibique parent; in his omnibus inquam nihil magnum admodum habere videtur rationis nostræ usus, cujus causa nos brutis animantibus anteferamus. Namque hæc pleraque istorum facilius simpliciusque efficiunt; aliquibus nihil opus habent. Quin imo & virtutis, justitiæque sensus, propter quem paulo ante excellere mentem humanam dicebamus; itemque amicitiæ, gratitudinis, honesti; quid aliud efficiunt, nisi ut vel vitiis hominum obsistatur, vel vita tranquilla & mutuarum injuriarum expers præstetur; quod bestiis sponte ac naturæ ductu contigit. Jam si curas multiplices, animi ægritudines, concupiscentiam, mortis metum, quæ omnia rationem illam nostram comitantur, ante oculos ponamus; eaque cum vita parabili, quieta & innocua bestiarum comparemus; videri possint harum plurimæ, ac præsertim ex avium genere, jucundius agere, & meliore quam homines sorte frui. Nam

quod ad voluptates corporis attinet, haud dubie iis æque ac nos afficiuntur, quicquid contradicant novi quidam philosophi; qui sensum omnem ita auferunt reliquis præter hominem animantibus, ut pro meris automatis aut neurospastis ea haberi velint; quorum absurdæ, crudelique sententiæ, miror quenquam accedere posse; præsertim cum & voce & verberibus fugiendis, & re omni contrarium bestiæ ipsæ significent. Imo vix dubito, quin miro pulchroque illo per aëra lapsu aves sese delectari sentiant; magis etiam sensuræ si intelligerent quantopere lentus ac humilis noster incessus ipsarum pernicitate, sublimique volatu superetur. Quid igitur est in quo potissimum eminet humanæ rationis usus, facitque ut antecellamus cæteris animantibus? Nihil æquè puto ac contemplatio naturæ, Deique operum; tum cultura scientiarum, quibus consequimur ut eorum præstantiam, magnitudinemque aliqua ex parte cognoscamus. Absque enim disciplinis quid esset contemplatio? quamque multum interest inter eos qui Solis pulchritudinem, utilitatemque, & cælum sideribus ornatum otiose intuentur, aliosque doctiores qui cursus istorum omnium scrutantur: quomodo affixæ, quæ dicuntur, stellæ à vagis differant, quæque causa sit diversarum anni tempestatum intelligunt: qui denique subtili ratiocinio magnitudinem Solis ac Planetarum, simulque distantiam eorum metiuntur; quantumque item inter eos qui animalium varios motus agilitatemque mirantur, & hos qui fabricam omnium membrorum, artificiosissimamque compagem, architecturamque in iis speculantur? Quod si igitur Planetæ reliqui dignitate non cedunt Telluri nostræ, ut in superioribus principii fundamentique loco posuimus; oportet ibi animalia existere, quæ non solum naturæ opera spectent & admirentur, sed quorum ratio in examinandis, intelligendisque iis occupetur, nec minora quam nos consecuta sit. Itaque non tantum sidera intuentur, sed & Astronomiæ scientiam excolunt; neque aliud obstat quo minus hoc verisimile credamus, quam superba illa nostrarum rerum æstimatio, quæ difficulter sane deponitur. Scio tamen futuros,

Humanam rationem præ illa brutorum præcipue eminere in contemplatione naturæ.

Hinc Planetarum incolas scientias excolere, & inter eas, Astronomiam.

ros, qui dicant nimis audacter nos ista Planetarum incolis tribuere: multorum quippe verisimilium accumulatione huc esse perventum; quorum si unum quodpiam contra se habeat, quam positum sit, cadat, velut in vitiosa ædificatione, omne quod superstruximus. Sed scire eos velim, hoc quod de Astronomiæ studio diximus, omissis fere omnibus hactenus adductis confirmari potuisse, atque inde initium fieri. Postquam enim positum fuit Terram hanc inter Planetas esse habendam, neque iis dignitate aut ornatu præferendam; quis dicere audeat in ea sola reperiri, qui spectaculo Naturæ, quod unum pulcherrimum ac magnificentissimum est, fruantur? aut inter eos quibus hoc contigit, nos unos esse quibus cæli arcana penitius perfectiusque perspecta sint? Ecce igitur & hac breviore via comprobata in Planetis Astronomiæ cognitio, ex qua & animal rationis compos, & pleraque alia quæ præcessere, illis inesse consequebatur. Adeo ut, ad priora confirmanda, hæc quoque novissima argumentatio conducat. Quò vero magis probabile fiat, saltem in superioribus Planetis, Jove ac Saturno, Astronomiæ notitiam non deesse, considerandum est, quod si homines ad sidera observanda impulit, ut credi par est, admiratio & pavor in defectibus Solis & Lunæ; multo magis, in utroque hoc Planeta, ea ratio valere debuit, propter cotidianas fere Lunarum, crebrasque Solis, quæ illic contingunt, eclipses. Ut si quis æquè ignorare ponatur quid rerum in Planetis omnibus geratur, multo verisimilius dicturus sit Astronomiam in majoribus illis duobus, quàm in hoc nostro, vigere.

Posita autem apud Planeticolas hujus scientiæ cognitione & usu, quam multa hinc præterea consequuntur quæ de vita statuque eorum reliquo, præter jam dicta, novas conjecturas afferant?

Et quæ ei inserviunt artes mechanicas.

Primùm enim nulla observatio siderum, ad motus eorum investigandos, absque organis institui potest; sive ea è metallo, sive è ligno aliave solida materia fabricata sint. Quod ut fiat, nec fabrorum instrumento, serra, ascia, dolabra,

mal-

malleo, lima, carere possunt; neque hæc habere absque usu ferri aut æque duri cujuspiam metalli. Sed & circuli arcus in partes æquales divisi, aut lineæ rectæ in inæquales, in istis organis requiruntur. Atque hic jam Geometriæ & numerorum ratio arcessenda est. Sed ante omnia quoque necesse est ut observationum memoria ad posteros transmittatur; ut tempora & Epochæ annotentur; quæ sine scripto non videntur explicari posse. Oportet igitur ut & suam scribendi artem habeant, multum fortasse dissimilem nostræ, qua fere omnes populi utuntur, sed quæ vix ingeniosior, aut ad discendum facilior esse queat. Quis enim non videt longe eam præferendam esse Sinarum innumeris characteribus, multoque magis funiculorum nodis, aut pictis imaginibus, quæ apud barbaros Mexicanos Peruvianosque in usu erant. Omnium quidem Regionum homines aliquam scribendi, aut quoquo modo annotandi, artem quæsivisse videmus: quò minus mirum sit, si & Planetarum incolæ, necessitate coacti, eam repererint, ac deinde ad Astronomiæ aliarumque disciplinarum studia adhibuerint. Necessitas vero scripturæ in rebus Astronomicis etiam ea re cognoscitur, quod cum hypothesibus variis, siderum motus, quasi divinandi sint; eæque hypotheses priores in sequentibus corrigendæ, prout observatis & Geometriæ ratiociniis vitia earum coarguuntur; nihil horum posteris tradi potest, nisi literis consignatum, figurisque expositum.

Ut & Geometriam, Arithmeticam,

Et scribendi artem.

Postquam vero omnia hæc jam iis concesserimus, longe etiamnum præstantior perfectiorque apud nos erit siderum scientia; vel propter agnitam systematis universi verissimam formam, vel propter usum telescopiorum, quibus Planetarum corpora, magnitudinesque & varias formas intuemur; superficiei lunaris montes, montiumque umbras; stellarum ingentem multitudinem, aliaque plura non alias videnda, percipimus. Ut fere necesse sit, nisi rursus nobis tanquam hac parte felicioribus blandiri volumus, etiam illam cognitionis rerum cælestium consummationem Planeticolis tribuere; itemque videndi aciem, quæ vel nostram longe exuperet,

Opticam.

ret, vel lentium vitrearum, aut speculorum adminiculo sicut nostra, adjuvetur. Quod tamen dicere vereor, ne quis, ex hoc uno audacius asserto, cætera omnia æstimanda putet, ac risu digna clamitet.

At non sine ratione, ut videtur, objiciet quispiam, Planetarios nostros fortasse omni subtiliore scientia destitui, quemadmodum Americanæ gentes, priusquam ad illas Europei penetrassent. Quas si respicimus, itemque in Africa, Asiaque permultas æque barbaras, videbitur hoc tantum summo opifici propositum fuisse, ut vita fruantur homines, naturæque bonis & voluptatibus contenti sint, grato animo omnium datorem colentes; scientiarum vero inquisitionem præter naturam paucos aliquos affectasse. Talia vero dicentibus non deest quod responderi possit. Prævidit enim certe Deus hominum ingenia eo esse processura, ut res cælestes scrutarentur; ut artes vitæ utiles reperirent; maria quoque navigarent, metalla effoderent. Possetne enim horum quidquam præter mentem infinitæ illius intelligentiæ contingere? Quod si prævidit, etiam hominum generi ea destinata sunt, nec poterunt artium & doctrinarum studia, quasi præter naturam essent, existimari, quæ in ipsa natura indaganda occupantur. Præsertim cum tanta illa cupiditas amorque sciendi non possint censeri frustra hominum animis infixa esse. Instabunt vero rursus dicentque, de siderali scientia potissimum, si ad hanc quoque homines nati sunt, cur tam pauci ad eam attendunt? Primum enim ex quatuor Orbis partibus, sola fere est Europa, in qua Astronomiæ studia excolantur. Nam Astrologiam divinatricem futurorum, quæ non scientia, sed miserum quoddam ac sæpe noxium delirium est, ne nominandam quidem hic arbitror. At in Europæ Nationibus non unus è centum millibus hæc studia amplectitur aut addiscere curat. Tum ad tempus quod attinet, multa sæcula effluxisse dicent, antequam aut Astronomiæ, aut Geometriæ, sine qua illa disci non potest, ulla rudimenta innotescerent. Sciri enim quo tempore in Ægypto & Græcia primum exortæ fuerint. Ac recte quoque adjicient non adhuc octoginta annos præteriisse,

Has scientias homini præter naturam non esse.

ſe, ex quo verus ac ſimplex Planetarum motus, rejectis Epicyclorum figmentis, repertus ſit; atque ita demum Aſtronomia cum naturæ cognitione conjuncta. Hiſce ut occurratur, addam ad ſuperius reſponſum, quod à divina providentia petebatur, dubitari non poſſe, quin ea conditione homines nati ſint, ut multo temporis decurſu paulatim artes diſciplinaſque eruant; nullam enim harum iis ingenitam eſſe, aut ſubito à Deo infuſam, & has de quibus nunc agimus, omnium eſſe difficillimas remotiſſimaſque: ut magis mirum ſit unquam incipere eas potuiſſe, quam tam tarde fuiſſe inſpectas. Pauci fateor ſingulis ætatibus has curant, aut ad ſe pertinere exiſtimant: ſed ſi multorum ſæculorum tempora cogitentur, non exiguus fiet illorum Numerus; quos, quemadmodum ſibi videntur, reliquis beatiores eſſe quis negaverit? Denique paucorum induſtria in his rebus exerceri ſatis erat, cum inventorum utilitas ad nationes totas genteſque longe porrigatur. Cum igitur hujus Terræ incolis, etſi paucis tantum, ad ea percipienda ingenium & aptitudo contigerit; nihiloque putandi ſint cæterorum planetarum habitatoribus præſtantiores feliciorefve; manet profecto, quam inveneramus, veriſimilitudo, ut etiam apud illos reperiantur qui cognitione Aſtronomiæ non careant. Nunc ad alia pergamus quæ inde conſequi, neceſſe eſt.

Oſtendimus quomodo unà cum hac ſcientia, non ſolum Geometria & Arithmetice, ſed & Mechanicæ artes, inſtrumentaque incolis Planetarum concedenda ſint. Hic verò jam ſponte obvenit ut quæramus, quo pacto inſtrumentis illis, Machiniſque, & ad ſidera obſervanda organis uti poſſint, aut quomodo literas ducere; quæ omnia nos manuum opera exequimur. Itaque neceſſario & manus habebunt, vel aliud quodpiam, quod vicem earum fungi poſſit, membrum. In quibus hominum generi tantum eſſe præſidii exiſtimabat è veteribus Philoſophis quidam, ut in iis cauſam reponeret omnis eorum ſapientiæ. Qui, ut puto, hoc ſenſit, abſque manuum opera homines ad cultum animi, rerumque cognitionem non fuiſſe perventuros. Et vere quidem

Planeticolas manus habere,

dem ille. Finge enim pro manibus datas fuisse ungulas, ut equis & bobus; nunquam nec oppida nec domos, licet ratione instructi, ædificassent. Nihil de quo loquerentur habuissent, nisi de iis quæ ad pabulum, aut ad conjugium, aut sui tutelam attinent. Omni scientia, omnique rerum memoria caruissent: Denique à bestiis parum absuissent. Quodnam porro instrumentum æque accommodatum ac manus esse possit ad innumera illa ad quæ nobis usui sunt, obeunda? Elephanti proboscide mirabiliter utuntur, qua & amplecti quidvis & projicere, minutioraque quævis è solo tollere norunt: unde & manus eorum pars illa dicta est, cum reipsa sit in longum productus nasus. Rostro quoque aves pleræque nidos exstruunt, alimentaque congerunt. Sed harum nihil est quod non manuum oportunitati longè concedat. Et est sane, tam illarum quam brachiorum, mirabilis quædam machinatio; ut protendi, reduci, inque omnem partem moveri possint. Tum mirâ industriâ instituti digitorum ac pollicis articuli, ut nervorum attractu quælibet prehendant, firmiterque contineant. Ut omittam sensum illum, in extremis digitis, exquisitissimæ subtilitatis; quo vel in tenebris pleraque corpora internoscimus. Patet itaque aut manus brachiaque, aut aliud quid eorum loco, quod vix æque aptum excogitari potest, Planetarum populis datum esse, ne non solum nobis, sed & simiarum & sciurorum generi, plus indulsisse hac in re natura existimetur.

Et pedes;

De pedibus vero minus etiam dubitabitur, si repetamus ea quæ supra disseruimus de vario animalium incessu, qui non videtur aliis modis, quam quos ibi recensuimus, cogitari posse. Inter eos vero non est, qui tam bene Planeticolis ratione præditis conveniat, quam quo & nos utamur. Nisi forte & volandi facultatem in aliquibus Globorum istorum acceperunt. Quod minus probabile tamen propter vitam in societate degendam, de qua postea dicemus.

Erectos oculos, vultumque.

Non caret autem verisimilitudine, erectos oculos, vultumque ad sidera contemplanda iis contigisse, quandoquidem hoc in hominum corpore providentiâ divinâ sic institu-

tum videtur, & a Philosophis merito celebrari solet. De reliquorum vero membrorum positu, si sapientiam artificis laude dignam censemus, quod oculos in suprema corporis parte collocaverit; sordidiora vero membra procul inde, atque a conspectu quodammodo removerit; nonne putandum est, eadem fere observasse illum in formandis istorum procul habitantium corporibus? Nec enim propterea dicimus figuram nostræ similem iis tribuisse. Est enim infinita quædam animo concipienda formarum possibilium varietas, qua & singulæ quæque partes istorum corporum à nostris differre queant, & totorum exterior interiorque œconomia. Cernimus quam aptè & commodè animalium nostrorum quædam lana aut pilis vestiantur; alia elegantius etiam plumis pennisque. Quidni isti in Planetis, quos rationis participes diximus, aliqua simili ratione tecti sint? propter quod meliori quidem conditione bestiæ, quam homines, apud nos esse videntur. Nisi hoc eo fine sic constitutum fuit, ut ipsa nuditas necessitatem hominibus imponeret quærendi ac fabricandi varia operimentorum genera, atque hinc etiam ingenii exercendi materia existeret. Et apparet sane, ex hac necessitate, non minimam commerciorum, artificiorumque mechanicorum occasionem nasci. Sed & propterea forsan nudos homines natura produxit, ut pro arbitrio suo tenuius densiusve amicti incedere possint; atque ita ad quasvis terrarum oras inhabitandas sese componere. Alia vero major hac, quam diximus, differentia intelligi posset inter corpora Planetariorum ac nostra; cum animalia quædam ita à natura formata reperiantur, ut veluti ossa extrinsecus habeant, carnes introrsum, atque ossibus inclusas, qualia sunt cancri, astacique, & fere etiam testudines. Attamen hanc membrorum compagem, & in paucis vilioribus tantum illa secuta est, & Planetarum incolis, quo minus eam tribuam, facit, quod subtili varioque digitorum usu cariturі essent, quo tam valde eos opus habere ostensum fuit: nam absurda specie non multum alioqui moverer.

Nec tamen hinc sequi eorum formam nostræ plane similem.

Etenim omnino cavendum est ab errore vulgi, cum animum

Quo minus animum ra-

mum

mum rationis capacem non alio in corpore, quam noſtris ſimili habitare poſſe ſibi perſuadet. Ex quo factum eſt, ut populi penè omnes, atque etiam Philoſophi quidam, humanam formam diis adſcripſerint; Imo ut, à ſimili perſuaſione, cuidam Chriſtianorum ſectæ nomen inditum fuerit. Hoc vero non niſi ab hominum imbecillitate & præjudicata opinione proficiſci quis non videt? uti illud quoque, quod eximia quædam pulchritudo humani corporis eſſe putatur: cum tamen ab opinione & aſſuetudine id totum quoque pendeat, affectuque eo, quem cunctis animalibus natura provida ingeneravit; ut ſui ſimilibus maxime caperentur. Illa verò tantum poſſunt, ut non ſine horrore aliquo animal homini multum diſſimile conſpectum iri credam, in quo rationis & ſermonis uſus reperiretur. Nam ſi tale ſolummodo fingamus aut pingamus, quod, cætera homini ſimile, collum quadruplo longius habeat, vel oculos rotundos duploque amplius diſtantes; continuo eæ figuræ naſcuntur, quas non poſſimus intuentes non averſari, quamvis ratio deformitatis nulla reddi queat.

tionis capax etiam alii formæ inhabitet, nihil impedire.

Dixi in ſuperioribus cum de magnitudine agerem incolarum qui in Planetis ſunt, veriſimile videri non eſſe eos valde exiguos nobiſcum comparatos. Suadet enim hoc primò, quod probabile ſit, ſicut corpora hominum ſe habent ad Telluris magnitudinem, ut peragrare univerſam poſſint, atque ita formam molemque ejus cognoſcere; eodem modo & in cæteris Planetis incoliſque eorum rationalibus ordinatum eſſe; niſi hac in re, quæ ſane magna eſt, nos ipſis rurſus præferre velimus. Deinde cum ſiderum ſcientiam & obſervationes apud eos exerceri oſtenderimus, ſequitur ut & corpora nacti ſint lignis metalliſve tractandis, inque inſtrumenta machinaſque adaptandis, idonea. Quæ & eo præſtabiliora ſunt quo ampliora. Ac ſane ſi homunciones quoſdam, muribus non majores, cogitemus, non poſſent ii ſiderum animadverſiones, quales requiruntur, inſtituere; nec inſtrumenta ad eas parare, aut diſponere. Itaque omnino vel æquales nobis ponendos eſſe

Planeticolas nobis vel æquales vel majores eſſe.

existimo, vel majores, ac præsertim in Jove, Saturnoque, quorum Globi tanto Tellurem nostram superant.

Eos in societate vivere.

Porrò quia, ut diximus, astronomiæ studium sine annotatione observatorum non potest procedere, ars vero scribendi non nisi in societate ratione utentium, & cogentibus vitæ necessitatibus, inveniri potuit; neque magis ars fabrorum aut fusoria; sequitur ex eo (quod supra dicebam) & societates coli apud Planetarum indigenas, ac mutuas operas eos inter se præstare; adeoque hac parte similitudinem magnam ibi esse nostratium rerum. Quamobrem & certas stabilesque sedes potius quam ambulatoriam vitam iis convenire dicendum est. Quid igitur? an & cætera sociali vitæ propria habebunt? leges, Magistratus, tecta, urbes, mercaturas aut rerum permutationes? Certe equidem apud barbaros Americæ & insularum populos, cum primum ad eos perventum est, eadem hæc fere jam in usu erant. At non propterea negaverim aliter ista in Planetis cæteris se habere posse quam apud nos; cum ex iis quædam sint quæ abesse queant à societate animalium ratione præditorum; eoque tantum excogitata, ne ratione male utamur & cum aliorum injuria, itaque societas solvatur. Possunt enim in aliis istis globis in ea rerum abundantia versari, ut nihil alieni appetant, rapiantve. Possunt ea esse æquitate, ut pacem perpetuo colant, nec sibi invicem insidientur, aut mortem inferant; imò ut neque oderint nec irascantur; quod si esset, multo quàm nos feliciores putandi sint. Sed verisimilius est, ut quemadmodum apud nos, sic ibi quoque bonis mala, sapientiæ stultitia, paci bellum misceatur, nec desit egestas artium magistra. Quia & ex his utilitatem aliquam proficisci antea ostendimus; &, si nulla esset, tamen nec præferendi res illorum rebus nostris causam habemus.

Colloquiorum jucunditate frui.

Quod autem nunc dicam, audacius, scio, videbitur; nec tamen probabilitate caret. Nempe, si in societate (quod jam penè obtinuimus) vivant gentes Planetarum; etiam, præter commoda inde provenientia, voluptate aliqua tali eas affici, quali nos, ex congressibus colloquiisque amicorum,

amo-

amoribus, jocis, ſpectaculis. Hoc, inquam, probabile eſt, quia ſi nihil horum Planeticolis concedamus, ſed ſemper eos ſeriò, ac ſine omni hilaritate, aut animi remiſſione agere putemus; ingens vitæ condimentum, quoque vix illa carere poſſit, iis ademturi ſimus, atque ita noſtram hanc beatiorem facturi; contra quam ratio poſtulat.

De reliquis vero occupationibus & ſtudiis illorum ut porrò inquiramus; videndum eſt quænam iſtorum, præter ea quæ jam diximus, cum noſtris aliquam ſimilitudinem habere probabile ſit. Domos ſibi eos conſtruere, ideo vel maxime credere libet, quòd & pluvias in terris illis cadere oſtendimus. Sequebatur enim hoc ex eo, quod in Jovis Planeta nubium quidam mutabiles tractus cernuntur; vapores, aquamque haud dubie continentes: quam aliunde quoque illic non deeſſe argumentis adſtruebamus. Erunt ergo & imbres & venti, quia attractum à Sole humorem recidere in terram neceſſe eſt; & calore ſoluti vapores ventorum cauſa ſunt; quorum flatus ex illa nubium Jovialium mutabili facie cognoſcitur. Adverſus hoc ergo, ut noctes tuto & quiete tranſigant (habent enim & noctes & ſomnum proinde, uti nos) munire ſe eos, caſaſque ac tuguria ædificare, aut ſpecus effodere, veriſimile eſt. Atque eo magis quod omne genus animalium, apud nos, exceptis piſcibus, ad ſui tutelam hæc molitur. Cur vero caſas & tuguria, & non domos amplas & magnificas Planetarum habitatoribus exſtrui credamus, niſi quod non poſſumus res noſtras non præ omnibus pulchras perfectaſque putare. Qui autem nos? Nempe in globulo illo vitam agentes, qui non decies milleſimam partem globorum Saturni aut Jovis æquet, ſi corporum moles inter ſe conferantur. Nulla equidem ratio adferri poteſt cur non Architecturæ elegantiam, ſymmetriamque, æque cognitam habeant in iſtis cæteriſque Planetis, ac nos in noſtro: nec cur non palatia, turres, pyramideſque alicubi noſtris multo altiores ſumptuoſioreſque, nec minori concinnitate exædificent. Cumque multiplex ſit hominum in his rebus induſtria; ut in cædendis lapidibus, coquenda calce & late-

Domos adverſus pluviam exſtruere.

ri-

ribus; cum ferro, plumbo, vitro utantur, atque ad ornatum auro quoque; his omnibus nihilo inferiora illic haberi verisimile est.

Si vero divisa est illis, sicuti nobis, Globi sui superficies, ut pars terram, pars maria contineat; uti ex supra memoratis Jovis observationibus colligi potest, quia nubes vix aliter quam ex maris amplis tractibus enascerentur; permagna ratio est ut & navigare eos putemus. Cum alioqui etiam rem tantam, tamque utilem, nostræ Telluris Globo soli non absque arrogantia ascripturi simus. Præsertim verò in Jovis Saturnique maribus commoda esset navigatio propter Lunarum plurium utrobique copiam; quarum ductu longitudinum mensuram, quam vocant, quæ nobis non contigit, facile consequi possint. Quod si navium usum habent, quam multa præterea habebunt quæ ad eas pertinent; Vela, anchoras, funes, trochleas, gubernacula; & horum usum peculiarem quemadmodum nos; ut vento penè contrario navigetur, in contrarias vero partes eodem vento facillime. Nec fortasse nauticæ pyxidis invento carebunt; siquidem motus materiæ magneticæ, quæ terræ globum continue pervadit, est ejusmodi quid, ut cæteris quoque planetis convenire censeri possit. Mechanicæ quidem scientia, & Astronomiæ, in re navali necessario requiritur, atque adeo utriusque harum magistra Geometria, de qua jam ante aliquid attigimus.

Navigare, adeoque & artes, quæ eo faciunt excolere.

Existimo autem, etiamsi nec ad istas artes nec ad alias quasdam respiciamus, in quibus vel necessitas vel occasio Geometriæ inveniendæ initium fecerit, non deesse rationes, quibus verisimile fiat ejus notitiam Planetarum incolis obtigisse. Sive enim cognitionis ipsius pretium ac dignitas spectetur, in qua singularis quidam intelligentiæ est usus, ac certa indubitataque veri comprehensio, quanta in nullis rebus disciplinisve aliis reperitur: sive quod est ejusmodi natura sua, ac talia ejus axiomata & effata, ut quocunque loco & tempore, aut quibuscunque in mundis extet, prorsus eadem ubique esse debeat; videtur omnino non solis Telluris nostræ incolis res talis parata aut oblata esse. Quid quod figuras

Ut & Geometriam.

Geo-

Geometricas, velut circulos, triangula, polygona, sphæras, multis modis natura ipsa oculis objicit, ad variasque eorum proprietates indagandas quasi invitat; in quarum contemplatione, etiam extra utilitatem omnem, summa est oblectatio. Quis enim non admiratur, cum discit ea quæ de circulo in Elementis Euclideis, & Apollonii locis Planis docentur? aut quæ de sphæræ superficie & quadratura Parabolæ Archimedes prodidit, aut recentiorum subtilissima inventa? Quorum omnium eadem, & ad discendum æque exposita, est veritas in Saturno, ac Jove, atque apud nos, & ex iisdem simplicissimis principiis pendens, quo facilius credi potest pulcherrimi jucundissimique studii in illis ac cæteris planetis aliquos participes esse: Etsi præcipue hoc suadet utilitas quæ ex eo in omnem vitam emanat. Quod si jam eo usque rei Geometricæ peritos qui in Planetis sunt dicerem, ut & Tabulas Sinuum, & Logarithmos, & calculum Analyticum invenerint; absona ac pene ridicula proferre viderer. Nec tamen quidquam obstat quin horum aliquid reperisse potuerint, aut aliquando reperturi sint; atque etiam his nostris fortasse majora. Non debemus enim, ut jam sæpe diximus, præferre nos ipsos ac res nostras rebus Planeticolarum.

Cæterum illud quod uniusmodi & æternum in Geometrica scientia inesse animadvertimus, similiter quoque in Harmonicis inveniri certum est; cum consonantiæ omnes constanti mensura ac proportione constituantur; omnis vero phtongorum ordo, omnisque cantus delectatio, etiam vocis singulæ, in consonantiis fundata sit. Quo fit ut apud omnes gentes eadem tonorum intervalla canantur, sive per gradus continuos, sive saltu vox progrediatur. Imo animal quoddam in terris Americæ reperiri fide digni auctores narrant, quod sex musicos tonos deinceps voce exprimat: Ut appareat ipsam naturam immutabili ratione eos præscribere. Quandoquidem igitur quæ huc spectant, certa quoque & unica, & necessaria ratione sese habent, verisimile est, non minus quam Geometriæ,

Musicam;

etiam Musicæ oblectationem ad plures quam ad nos pertinere. Positis enim aliis terris atque animalibus ratione & auditu pollentibus, cur tantum his nostris contigisset ea voluptas, quæ sola ex sono percipi potest? Nescio equidem quantum apud alios valiturum sit argumentum, quod hic ab unitate, & immutabili natura istarum artium petiimus; mihi non leve aut contemnendum videtur, nec multum ei cedere, quo in superioribus usus sum, cum videndi facultatem Planetariis animalibus convenire docui.

Porro si tonis harmonicis & cantu delectentur, vix quoque fieri potest quin & instrumenta quædam musica repererint; quoniam & casu in hujusmodi inventa incidere contingit: velut chordis valide contentis, aëris sono, cannarum aut cicutarum sibilo. A quibus initiis, sicuti ad testudines, citharas, tibias, & organa polyplectra nos pervenimus, ita illi quoque non minus elegantia excogitare potuerint. Sed quemadmodum certi definitique licet sint toni, cantusque intervalla, tamen apud diversos populos alium atque alium esse canendi morem ac normam videmus; ut olim apud Dores, Phrygas, Lydos; nostra ætate apud Gallos, Italos, Persas: ita fieri potest ut ab omnibus his longius abeat Planetariorum Harmonice, quamvis illorum auribus gratissima. Cur vero nostra rudiorem opinemur nulla ratio est; neque etiam cur non & chromaticis sonis, & quibusdam Enarmoniis utantur? cum hemitonia quoque natura suppeditet, certisque proportionibus definiat. Imo ne minus assecuti sint hisce in rebus quam nos, etiam plurium vocum aut chordarum concentus, artificiosaque permistio, & dissonantium tonorum, & tritoni, & diapente diminutæ usus iis fortasse concedendus sit. Scio vix aliquam verisimilitudinem apud multos hæc habitura, ac minorem etiam, si æque doctos dicamus in Jove aut Venere incolentes, ac sunt ii qui in Gallia, Italiave plurimum hac arte excellunt. Et tamen fieri potest ut vel illis peritiores sint, ac præcipue in parte Theoretica hujus artis ea perspexerint, quæ apud nostrates hosce parum hactenus intellecta

Quæ tamen à nostra diversa esse posset.

cta sunt. Si enim ex nostris Musicis quæras, cur consonantia diapente post aliam similem vitiose ponatur, dicent alii nimiam dulcedinem devitari, quæ ex gratissimæ consonantiæ iteratione nascatur: alii varietatem in harmonicis sequendam esse. Hæc enim præcipui artis auctores, cumque iis Cartesius, adferunt. At Jovis aut Veneris incola forsan veriorem hanc causam demonstrabit, quod à Diapentè ad aliam deinceps pergendo, tale quid fiat, ac si repente toni statum immutemus; cum Diapente, unà cum interjecto ditoni sono, (qui si desit, mente suppletur) toni speciem certo constituat: hujusmodi vero subita commutatio auribus merito injucunda inconditaque judicetur; cum etiam in universum ea plerumque durior accidat, (præterquam in transitu) quæ fit à tribus sonis consonis, ad trium aliorum harmoniam, nullo priorum manente. Sciet etiam ille idem fortasse, quod nemo adhuc animadvertit nostrorum hominum, cur in nullo vocis unius, pluriumve cantu, tonus servari possit in eadem altitudine ac tenore, nisi consonantia intervalla pleraque ultro, ac nemine advertente, ita temperentur, ut à perfectione summa nonnihil desciscant. Et cur optimum sit hoc temperamentum in chordarum systemate, cum ex Diapente quarta pars commatis ubique deciditur. Quod idem absque sensibili discrimine effici ex divisione Diapason in partes æquales 31, indeque Cyclum quendam Harmonicum in se redeuntem existere, non ita pridem ostendimus. Quod tamen Planetarum incolæ si perspexerunt, etiam Logarithmorum numeri iis noti esse debebunt.

Cur consonantia diapente post aliam similem vitiose ponatur?

At de Tono vocis temperando quod dixi, probationem habet non difficilem; quam hic adjungimus, quandoquidem jam aliquid præter somnia nostra venditare cœpimus. Ajo itaque, si quis canat deinceps sonos, quos Musici notant Literis C, F, D, G, C, per intervalla consona, omnino perfecta, alternis voce ascendens descendensque; jam posteriorem hunc sonum C, toto Commate, quod vocant, inferiorem fore C priore, unde cani cœpit.

Demonstratio temperamenti in tono vocis adhibendi.

pit. Quia nempe ex rationibus intervallorum istorum perfectis, quæ sunt 4 ad 3, 5 ad 6, 4 ad 3, 2 ad 3, componitur ratio 160 ad 162, hoc est 80 ad 81, quæ est Commatis. Ut proinde, si novies idem hic cantus repetatur, jam propemodum tono majore, cujus ratio 8 ad 9, descendisse vocem, tonoque excidisse oporteat. Hoc verò nequaquam patitur aurium sensus, sed toni ab initio sumpti meminit, eodemque revertitur. Itaque cogimur, occulto quodam temperamento uti, intervallaque ista canere imperfecta; ex quo multo minor oritur offensio. Atque hujusmodi moderatione fere ubique cantus indiget; uti colligendis rationibus, quemadmodum hic fecimus, facile cognoscitur. Et hæc quidem in gratiam artis illius studiosorum nec Geometriæ rudium exponere placuit. Nunc eo unde discessimus revertimur.

Diximus de artibus inventisque quibusdam quæ nobiscum communia habere Planeticolas verisimile sit; præter quæ etiam alia exstare illic necesse est, sive ad usus & commoda vitæ facientia sive ad delectationem. Hæc vero quam multa sint, quantique facienda, ita optime rationem inibimus, si plurima illa, quæ apud nos reperiuntur, recensere & ob oculos ponere libuerit.

Exposui supra animantium fruticumque apud nos genera quæ plurimum inter se figuris differrent: præter quæ, minus dissimilium, ingens copia reperiatur: dixique nihilo pauciora utriusque generis, ut longe diversa, in Planetarum terris exstare putandum. Nunc etiam illud videamus, quæ utilitas quæve commoda, tum ex animalibus, tum ex herbis arboribusque ad nos perveniant, ac prorsus verisimile existimemus non minora ex iis, quæ illic terrarum inveniuntur, ad incolas ipsarum redundare.

Recensentur commoda quæ ad nos perveniunt ex animalibus, herbis, arboribus.

Hic vero operæpretium est ut quæ sint divitiæ nostræ inspiciamus, quæ multæ magnæque sunt. Nam, præterquam quod alimenta nobis arborum fructus herbæque suppeditent; illæ pomis, nucibus; hæ seminibus, foliis, radicibus; quodque plurimorum ex his in medicina usus est;

pe-

petitur ex arboribus materia qua domos navesque fabricamus. Et lino vestes paramus, excogitatis nendi & texendi artificiis. Ex cannabe, spartove, fila ac funiculos torquemus; ex filis vela ac retia conficimus, ex funiculis rudentes & funes anchorarios. Florum porro odoribus coloribusque oblectamur; & quamvis sint etiam qui nares offendant, & noxiæ quædam herbæ inveniantur, tamen in iis sæpe boni quid delitescit; vel fortasse hoc egit natura ut comparatione mali bona magis eminerent: quod multis in rebus secuta videtur. Quanta vero ex animalibus est utilitas? Oves lanam ad vestitum præbent, vaccæ lac; utræque carnes ad vescendum. Asinis, camelis, equis, ad portandas sarcinas utimur. His etiam ut nos vel inscensi vehant, vel curribus juncti pertrahant. Ubi egregium illud rotarum inventum occurrit, quod libenter Planetarum quoque habitatoribus adscriberem, cum jam in societate eos vivere & domos ædificare pene evicerim. Utrum vero etiam animalibus pro cibo utantur, an Pythagoræ simile dogma sequantur, non habeo quod affirmem. Apparet quidem hoc homini datum esse, ut omnibus iis alatur quæ vel in terra vel in aquis nascuntur, si quid nutrimenti contineant; ut herbis, pomis, lacte, ovis, melle, piscibus, volucrum quadrupedumque plurimorum carnibus. In quo mirum sane videri potest, animal illud rationis compos ita esse comparatum, ut cum multorum aliorum pernicie cædeque vivat. Nec tamen naturæ præscripto contrarium hoc esse putandum est, cum placuisse ei videamus ut leones, lupi, aliaque rapacia, pecudes & infirmiora quælibet pabuli loco habeant: aquilæ columbas leporesque prædentur: Piscium permulti pisciculos se minores devorent. Quin & canum varia genera ad venandum nobis largita est, ut quæ pedibus nostris persequi nequiremus, illorum celeritate ac sagacitate consequeremur. Præter omnem vero istam ex viventibus herbisque utilitatem, hanc quoque delectationem ex iis nos capere voluit rerum conditor, ut varias eorum formas na-

turasque & generandi vias contemplaremur; in quibus infinita quædam varietas ac mirabilia multa insunt, quæ apud naturæ scriptores celebrantur. Imo in ipsis insectis quis non miratur apium cellulas hexagonas, aranearum telas; tum bombycum involucra, ex quibus incredibili industria delicatissimam vestem conficimus, eaque copiâ ut naves totæ ea onerentur. Atque hæc quidem de herbarum animantiumque genere, quatenus homini prosunt, summatim retulisse sufficiat.

Ex Metallis, Cogitetur jam porro quanta sit ejus solertia in reperiendis, effodiendis, explorandis metallis; itemque in fundendis, repurgandis, miscendis. Quanta in tenuandis auri laminis, aut hydrargyro resolvendis, ut parvo impendio, quæcunque voluerimus, auri splendorem coloremque induant. Quam mira ac multiplex sit ferri utilitas; quam quæ ignorarunt nationes, eæ omnium ferè mechanicarum artium rudes vixerunt, proque armis, tantum arcus, clavas, sudesque habuerunt. Nos vero & pulverem ex sulphure & nitro mistum habemus, variosque ejus usus, qui an plus juvet an noceat merito dubitari potest. Videbatur enim mira ejus vi, simulque artificiosa muniendorum oppidorum arte, certius præsidium inventum esse, quam priscis temporibus fuerit, adversus hostiles impetus: sed & horum ex eo simul violentiam crevisse videmus, & fortitudini viribusque in præliis multo minus nunc locum esse quam tunc fuerit. Quod enim olim Imperator Græcus dixisse fertur, *Periisse Virtutem* cum Catapultarum, ac Balistarum inventa exorirentur, idem nunc majori jure queri possumus; ac maxime Bombis, quos vocant, repertis; quos non mœnibus, nec situ oppida arcesve repellere possunt, sed quamvis validæ disjiciuntur, ac solo æquantur. Ut, vel ob hoc unum, melius homines ejus pulveris invento carituros fuisse dicendum sit. Nec tamen propterea prætereundum fuit in commemorandis nostræ Telluris repertis, cum verisimile sit, etiam in cæteris Planetis, noxia artificia quædam cum bonis emersisse.

Au-

Auspicatior est aquæ & aëris apud nos usus: quo & navigandi ratio constat, & vires comparantur, quibus, nullo labore nostro, molas machinasque versemus. At hæ quam multiplices, quamque ad varias res adhibentur? Nam & frumenta iis comminuimus, & olea exprimimus, & ligna secamus, & pannos tundendo densamus; & chartis materiam conterimus; quarum aliàs quoque pulcherrimum est inventum, cum ex vilissimis linteorum scrutis, tam pulchra foliorum candidissimorum copia paretur. His addatur jam præclarum illud typographiæ inventum, cujus opera artes omnes reliquæ, non servantur tantum, sed & comparantur multo quam ante facilius. Item sculpendi pingendique peritia, a parvis rudibusque initiis eo progressa, ut nihil elegantius ab hominum ingenio profectum esse videatur. Ponatur & vitri excoquendi scientia, atque in tot formas ducendi facilitas. Tum speculorum vitreorum politura, hydrargyrique super ea inductio. Ac præcipue quoque vitri usus mirabilis, in pervidenda rerum natura, post telescopii microscopiique inventa. Recenseantur etiam horologiorum automatôn fabricæ; aliorum tam exilium, ut gestanti nihil incommodent; aliorum tam exquisita æqualitate tempus metientium, ut nihil supra optari possit, quibus utrisque inventa nostra plurimum profuere.

Ex aqua, & aëre, variisque artificiis,

Multa addere possem de multiplici doctrina & rerum naturæ cognitione quam præter Geometriæ Astronomiæque scientias consecuti sumus, atque ea pleraque nostra ætate: velut de gravitate aëris ac vi qua compressus resilit. De singularibus Chymicorum experimentis; è quibus liquores inflammabiles, nuperque ultro lucentes, ac levi tractatione ardentes, prodierunt. De sanguinis circuitu per arterias venasque, qui antea intelligebatur, nuper vero & oculis usurpari cœpit, adhibito microscopio, in piscium quorundam caudis extremis. Item de generatione animalium, quod inventum est nulla nisi ex similium semine nasci; idque de herbis quoque verum esse. Quodque in semine marium reperiuntur animalculorum myriades vivacissimorum, quæ ipsam ani-

Ex iis, quæ nostra ætate inventa sunt.

animantium ſobolem eſſe veriſimillimum ſit: res mirabilis, atque ab omni ævo incognita.

Illa omnia veriſimiliter non extare in Planetis, ſed aliis æque dignis rependi.

Jam vero poſtquam hæc omnia accumulavimus Telluris incolarum inventa, putemus fieri quidem poſſe, ut quædam eorum etiam apud Planetarios extent; credibile tamen eſſe maximam partem eorum illis ignorari. At iis quæ non habent rependendis æque multa, pulchraque & utilia, admiratione digna iis tributa eſſe oportet. Quanquam igitur ibi terrarum aliquos ratione præditos, & Geometras, & Muſicos reperiri probabilibus argumentis oſtenderimus, & in ſocietate communitateque viventes, & manibus pedibuſque inſtructos, tectiſque & mœnibus munitos: non tamen dubitandum eſt, quin & formæ, & rerum quas agunt novitate, mirabile ſupra quam dici poſſit futurum ſit ſpectaculum, ſi quis Mercurius, aut potens Genius eò nos deducat. Sed cum ejus itineris conficiendi ſpes omnis adempta ſit, id unum tamen, quod poſſumus inveſtigare non pigebit; qualis nempe cæleſtium rerum facies ſeſe offerat, in unoquoque iſtorum globorum vitam agentibus, cum ad eam hoc quoque pertineat. Simul vero & de præſtantia cujuſque, tum ob magnitudinem, tum ob adjunctum comitum lunarum numerum, quædam ſcitu digna referemus, ac ſtellarum denique inerrantium incredibilem diſtantiam nova ratione indagabimus. Sed à longa attentaque meditatione requieſcemus hic paulum, finemque huic Libro imponemus.

CHRI-

CHRISTIANI HUGENII
COSMOTHEOROS,

SIVE

De Terris Cœlestibus, earumque ornatu, Conjecturæ.

AD

CONSTANTINUM HUGENIUM,

Fratrem.

LIBER II.

CUm ante annos complures Librum Athanasii Kircheri, qui *Iter Ecstaticum* inscribitur, evolverem; in quo de Natura Siderum, rebusque in Planetarum superficie extantibus, differitur; mirabar nihil illic adferri eorum quæ mihi jam ab illo tempore circa hæc, tanquam valde probabilia, occurrebant: sed longè alia tradi, inania pleraque, & à ratione aliena. Quod magis etiam intellexi, cum conscriptis superioribus idem opus denuo percurrerem. Jamque visum est aliquid esse conjecturas nostras, ac ponderis nonnihil iis accedere, si cum Kircherianis conferantur. Quod ut judicari possit, utque appareat quàm de his rebus frustra philosophari conentur, qui fundamenta unica verisimilitudinis, quibus usi sumus, rejiciunt; non abs re erit de opere illo quædam annotasse.

Kircheri iter extaticum examinatur.

Is igitur Vir optimus, Genio quodam duce, per cæli spa-

ſpatia, ſtellaſque ſe circumferri fingens, partim ea quæ ex Aſtronomorum ſcriptis hauſerat, partim quæ ipſe de Planetarum terris meditatus erat, ac vulgo probari poſſe putabat, quaſi viſa enarrat. Antequam verò iter longinquum ingrediatur, hæc duo tanquam certo tenenda ſtatuit ſancitque; nullum videlicet Telluri motum eſſe tribuendum; tum nihil in Planetarum globis Deum extare voluiſſe, quod vita aut ſenſu præditum ſit, adeoque nec herbas quidem. Itaque, relicto Copernici ſyſtemate, Tychonicum ſibi quod ſequatur deligit. Sed cum ſtellas inerrantes pro totidem Solibus habeat, iiſque ſingulis ſuos Planetas circumponat; hoc ipſo (quod an ſenſerit neſcio) infinita numero jam exoriuntur ei Copernicea ſyſtemata. Quæ quidem perabſurdè, præter ſibi proprios motus, univerſa circum Tellurem noſtram, viginti quatuor horis, immani celeritate converti facit. Cumque horum maximam partem fateatur extra hominum conſpectum eſſe remotam, in hoc quoque incidit incommodum, ut fruſtra tot Soles lucere dicendi ſint, fruſtraque calorem ſuum impertiri tot globis Telluri ſimilibus, elementaque eadem, (ita enim vult) & cætera omnia habentibus, præter ſtirpes & animalia. Atque hinc porro ad alia magis abſona delabitur. Nam quia ne Planetarum quidem, qui noſtro ſyſtemate continentur, alium ullum reperit uſum, ad diu exploſas Aſtrologorum ineptias ſe convertit; & hoc fine tot tantaſque corporum moles conditas eſſe vult, ut influxu eorum vario, certiſque legibus temperato, mundi univerſitas conſervetur, incolumiſque perduret: utque præterea in hominum animos iidem influxus vires ſuas exerceant. Itaque, in Aſtrologicæ artis gratiam, in Veneris Planeta jucundam pulchramque rerum faciem ſibi oblatam narrat; cum luce blanda, undis dulciter fluctuantibus, odoribus ſuaviſſimis, atque undique fulgentibus cryſtallis. In Jove auras ſalubres, ac ſuaveolentes, aquas limpidiſſimas, terras argentei ſplendoris. Quò nimirum, ab influxu hujus utriuſque ſideris, fauſta ac ſalutaria omnia in Terram homineſque deriventur; ut vel pulchros & amabiles, vel ad prudentiam & gravitatem

tem propensos reddat. In Mercurio nescio quid serenum vividumque, unde ingenium ac solertia nascentibus insinuetur. At in Marte omnia tetra, exitialia, fœtida, piceas flammas, fumosque se vidisse memorat. In Saturno tristia, horrenda, squallida, caliginosa; ut ex his Planetis, (nescio quare Apotelesmaticis omnibus invisis) influxus maligni infestique mundo ac mortalibus eveniant; nisi tamen benigniorum illorum radiis corrigi ac mitigari eos contingat. Hæc nempe & his similia Genio illi cælesti comes adhærens discit. Quem & serio respondere facit cum interrogatur, anne aquis, quæ in Veneris Planeta fluunt, Hebræus aut Paganus quispiam, eo delatus, ritè baptizari queat. Eodem quoque docente Magistro, intelligit cælum stelliferum non esse ex materia solida conflatum, sed liquidum prorsus, in quo stellæ Solesve innumeri longè latéque spargantur; nusquam alligati, (& hactenus rectè) quique omnes diei spatio vastissimos, ut dixi, circuitus peragant. Quo in motu, si talis foret, non advertit quanta vi illi undique diffugituri sint, ob motum circularem tam immensæ celeritatis. Sed ne sic avolent, inque spatia infinita recedant, Intelligentiæ motrices, credo, impedient. Etenim unicuique stellæ fixæ, imo & Planetæ, Intelligentias aut Angelos suos adjungit, qui impellant eos, cursumque moderentur. In quo Doctorum quorundam turbam sequitur, qui vanissimum Aristotelis commentum inconsideratè, invitaque ratione, adoptarunt. Istos verò beatos Genios labore tanto Copernicus liberat, solius Terræ inducto motu; cujus sanè necessitatem, vel ex hoc uno, omnes vident, nisi qui ultrò, ac volentes, cæcutiunt. Equidem cogitavi nonnunquam, meliora à Kirchero exspectari potuisse, si, quæ sentiebat, liberè exponere ausus fuisset. Sed cum hoc non auderet, nescio cur non in totum illo argumento abstinere maluerit. Sed hunc celeberrimum scriptorem jam omittamus: &, quandoquidem nil veriti sumus, conjecturis nostris, spectatores in Planetis ponere, adeamus nunc, uti propositum fuerat,

ſingulos; & quinam ſint anni eorum, qui dies, quæ denique Aſtronomia, deinceps conſideremus.

Apparens qualis ſit conſtitutio Solis & Planetarum in Mercurio.

Itaque, ut ab intimo, & Soli viciniore incipiam, ſcimus Mercurium triplo propius circiter quam Tellurem noſtram ad ingens illud ſidus accedere. Cui conſequens eſt ut triplo quoque majus id conſpiciant ejus incolæ, ratione diametri, lumen vero & calorem ejus ſentiant noncuplo quam nos majorem. Nobis proinde intolerabilem, quique accenſurus ſit ſiccatas herbas, fœnum ſtramenque, qualia apud nos creſcunt. At nihil impedit ita comparata eſſe, quæ ibi vivunt animantia, ut optatam temperiem in ardore illo experiantur. Herbas vero eſſe ea natura, ut multo magis vim caloris perferant. Nec mirum eſſet iſtos Mercurii indigenas putare non ferendo frigore nos urgeri, luceque frui exigua, qui tanto longius a Sole abſimus. Sicut nos de Saturni colonis facile nobis perſuademus. Non deeſt verò dubitandi ratio, cum à calore vita pendeat, iſque corpori mentique vigorem alacritatemque præſtet; an non, propter Solis viciniam, Hermopolitæ illi nobis ingenio præſtare putandi ſint? Sed quo minus huic cauſæ tribuam facit, quod calidiſſimas terræ noſtræ regiones ſortitos, Africæ, Braſiliæque populos, nec ſapientia nec induſtria æquare videmus temperatiorum tractuum incolas; ut vel ex eo perſpicitur, quod in omnium ſcientiarum ac fere artium ignoratione verſentur: cum nec nauticæ rei, qui circum littora incolunt, niſi perexiguam notitiam habeant. Nollem quoque Jovicolis, Saturnicoliſque hebetes, plumbeaſque mentes, intelligentiamve tribuere noſtra minorem, propterea quod tanto longius a Sole remoti vivunt; cum uterque globus iſte tam præſtanti ſit magnitudine, tantoque comitatu ſtipatus feratur. Qualis porro ſit Mercurialibus Aſtronomia, utque cæteros Planetas certis temporibus Soli oppoſitos ſpectent, ex figura ſyſtematis, priore libro expoſita, perfacile eſt intelligere. Atque his oppoſitionum temporibus Venerem ac Tellurem præcipuo ſplendore illic effulgere neceſſe eſt. Nam cum

adeo

adeo lucida nobis Venus appareat, quo tempore tenuem nascentis Lunæ faciem refert; oportet eam sextuplo aut amplius clariorem cerni, cum Soli opponitur, ex Mercurii Globo pleno orbe spectatam, & minore quoque intervallo distantem: atque ita tunc non parum dispellere nocturnas tenebras gentibus istis, Lunæ auxilio carentibus. Quænam sint denique apud eos dierum spatia, & an varias anni tempestates experiantur, incompertum est hactenus, quod ignoretur an axem diurnæ conversionis ad orbem, quo circa Solem defertur, obliquum habeat, & quanto tempore conversio ea peragatur. Neque enim dubitari debet de diebus noctibusque eorum cum in Tellure, Marte, Jove ac Saturno hæc vicissitudo certò cognoscatur. Anni vero spatium vix quartam partem nostri æquare illic constat.

Qualis in Venere.

In Veneris globo positis, eadem fere in cælo apparere necesse est quæ de Mercurio diximus, nisi quod hunc nunquam videt Soli oppositum, cum non nisi 38 circiter gradibus ab eo recedat. Sol vero illis major apparet quam nobis, diametro sescupla, orbe plus quam duplo; quo & bis tantum caloris lucisque præbere cum oportet. Itaque propius ad nostræ temperiem Tellus ista accedit. At annus mensibus nostris septem cum dimidio fere finitur. Noctu verò globus hic noster, in locis Soli oppositis, multo lucidior Veneri apparere debet quàm unquam nobis appareat Venus; ac tunc Lunam quoque, perpetuum comitem nostrum, facile conspiciunt, si modo oculos habent nostris non imbecilliores. Sæpe autem in Venere miratus sum, cum tubis longioribus, pedum 45, aut 60, eam inspicerem Terræ propinquam; Lunæque semiplenæ similem, aut jam in cornua curvari incipienti; prorsus æquabili splendore superficiem ejus perfundi: ut vix dicere audeam, aliquid maculæ simile, in ea me animadvertisse; cujusmodi in Jove & Marte manifestè notantur, licet orbe multo minore sese offerentibus. Si enim maria ac terras habet Veneris globus, obscuriores nobis maris tractus conspici deberent; terrarum vero clariores; sicuti ex præaltis rupibus inspectum desuper ma-

re, non perinde, ac adjacentes terræ, lucidum apparet. Credebam nimium Veneris fulgorem in causa esse, quo minus diversitas lucis animadverti posset. Sed cum fumo infecissem vitrum oculo proximum, ad auferendam partem radiorum, nihilo minus æqualis in tota superficie lux visa est. An igitur nulla ibi maria, an Solis lucem magis quam apud nos aquæ, aut minus terræ repercutiunt? an potius, (quod credibilius mihi videtur) densior ibi, quam in Jove aut Marte, Vaporum regio à Sole illustrata, Venerisque globum circundans, omnem fere illam quam videmus lucem ad nos remittit, vixque subjectorum sibi marium terrarumque discrimen percipi sinit? Nam certum est nostram quoque atmosphæram, si Tellurem procul intueri daretur, plurimum obstituram luce sua, quo minus terræ marisque tam diversa claritas apparere posset, quam quæ cernitur ex edito scopulo despicienti. Eadem ratione qua Lunæ quoque maculas interdiu minus aperte quam noctu animadverti sinunt vapores iidem; quoniam tunc quoque inter illam oculosque nostros interpositi, Solisque luce illustres, visui officiunt: noctu non item.

In Marte. At in Marte reliquis disci partibus obscuriores, ut jam dixi, maculæ notantur. Ex quarum recursibus pridem fuit observatum dies noctesque illic iisdem fere quibus apud nos intervallis reverti. Hyemem vero æstatemque exiguo discrimine incolæ sentiunt, eo quod axis diurnæ conversionis paulum duntaxat ad orbitam Planetæ inclinatur, ut ex motu macularum intellectum est. Qui autem ex globo illo Tellurem nostram intuentur, eodem modo fere, ac Venus nobis, apparere iis debet, formasque lunaribus similes ostendere, si telescopio spectetur; nec ultra gradus 48 à Sole evagari; in cujus disco etiam conspici quandoque possit, uti & Veneris Mercuriique corpuscula. Et hoc quidem nunquam aliàs; Venus raro iis apparere debet, uti nobis Mercurius. Terræ vero solum in Marte nigriore materia constare verisimile est, quàm in Jove, aut etiam Luna nostra; eoque fieri ut rubicundior Mars spectetur, nec, pro ratione intervalli

quo

quo à Sole abest, lucem remittat. Minor verò est globus ejus quam stellæ Veneris, licet à Sole longius distans, ut jam supra animadvertimus. Nec Lunam habet ullam comitem; atque in eo Telluri nostræ, quemadmodum & Venus & Mercurius, dignitate impar videtur. Lux vero Solis, calorque, Marticolis duplo atque interdum triplo quam nobis minor sentitur; nullo tamen, ut credimus, ipsorum incommodo.

Jovem & Saturnum reliquis Planetis longe præstare, tam magnitudine, quam Lunarum multitudine.

Quod si Tellus hæc, propter adjunctam ei Lunam, præstare cæteris Planetis, quos huc usque percurri, dicenda est; nam magnitudine nec cedit iis multum, nec superat; quantopere & his tribus, & Telluri ipsi, anteponenda erunt sidera Jovis & Saturni. In quibus sive globorum molem consideremus longissimè omnium istorum corpuscula excedentem; sive Lunarum quibus ambiuntur multitudinem, prorsus verisimile fit has duas primarias habendas esse Tellures, inter eas quæ circa Solem sunt: præ quibus reliquæ quatuor sint minimum quidpiam, ac nequaquam cum iis comparandæ. Quanta enim sit differentia, quò rectius animo concipiatur, subjicere hic placuit, secundum proportiones veras, aut non multum à veris abeuntes, tum Tellurem nostram, cum circumjecta Lunæ orbita, ipsoque in ea Lunæ globulo; tum Jovis ac Saturni systemata: Illud quaternis, hoc quinis Lunis exornatum; quarum quæque in sua itidem orbita ponuntur. Joviales Galilæo deberi notum est; quæ quanto animi gaudio primum illi animadversæ sint, facile quivis secum reputet. Saturniarum una nobis obtigit, quæ cæteris clarior est, & ab extrema proxima. Quam Anno 1655 telescopio nostro non ultra duodecim pedes longo, primi deprehendimus. Reliquæ diligentissimis Dominici Cassini observationibus patuerunt, vitreis orbibus utenti à Jos. Campano expolitis, primùm 36 pedum; deinde totidem supra centenos. Tertiam enim quintamque vidimus Anno 1672, ipso monstrante Cassino, & postea sæpius. Primam, cum secunda, sibi repertas significavit, missis literis, Anno 1684. Hæ vero difficillimè cernuntur, certoque affirmare nequeo mihi conspectas ha-

TAB. LIII.

hactenus. Nec propterea quidquam vereor Clarissimo Viro fidem habere, atque has quoque Saturno socias adscribere. Imo præter harum numerum alias quoque, vel unam vel plures, latere suspicari licet; nec deest ratio. Cum enim, inter extremas duas, spatium amplius pateat quàm pro distantiis cæterarum; posset hoc insidere sextus satelles: vel etiam, ultra quintum, alii circumvagari, qui propter obscuritatem nondum sint visi: cum ille ipse quintus, tantùm in orbitæ suæ parte quæ ad occidentem spectat, cernatur, in reliqua nunquam appareat; cujus rei causam satis intellectu facilem postea adferemus.

Fortasse autem, ubi ad signa Borea Saturnus revertetur, altéque supra horizontem attolletur, (nam, quo tempore hæc scribimus, maximè deprimitur) aliquid circa hæc novi observare continget, si quis tuas tunc lentes, Frater optime, ad Telescopia pedum 170. & 210. paratas, sideribus applicet: quibus majores, formæque perfectioris, nullas hactenus extare arbitror. Quanquam enim cælo nondum eas admovimus, vel propter moliendi difficultatem, vel quod discessus tuus studia hæc nostra conatusque interrupit: omni tamen vitio eas carere certi sumus, post experimenta illa faciliora, quæ in ambulacris suburbanis sub noctem instituebamus; inspectis procul literis, quibus appositum erat lumen. Quorum equidem lubens reminiscor, simulque jucundi laboris nostri, quem, in elaborandis expoliendisque vitreis hujusmodi discis, impendere unà solebamus; excogitatis novis artificiis machinisque, semperque ulteriora agitantes. Sed redeo ad diagrammata ante descripta, de quibus aliqua dicenda supererant.

Proportio diametrorum tum Jovis, tum orbitarum satellitum ejus, ad orbitam Lunæ circa Terram.

Feci in iis Jovialis globi diametrum duarum circiter tertiarum ejus distantiæ quæ inter nos nostramque Lunam interjacet; quandoquidem plus quàm vicies diametrum Terræ diameter Jovis continet; Luna autem distat à Terra diametris hujus triginta. Orbitam vero comitis Jovis extremi ad nostræ Lunæ orbitam posui sicut $8\frac{1}{2}$ ad 1, quoniam ejusmodi inter eas proportio re ipsa reperitur. Et hi quidem comites,

tes, sive Lunæ singulæ, non videntur Tellure nostra minores esse, ut ex umbris earum in Jovis disco sæpe observatis, probari potest. Sunt autem (ut hoc quoque addamus) periodorum tempora sub Ecliptica, apud Cassinum, intimi Jovialium dies 1, horæ 18, 28′, 36″. Secundi dies 3, horæ 13. 13′. 52″. Tertii dies 7. horæ 3. 59′. 40″. Quarti dies 16, horæ 18. 5′. 6″. Distantiæ à centro Jovis, comitis intimi $2\frac{5}{6}$. Jovis diametrorum. Secundi $4\frac{1}{2}$. Tertii $7\frac{1}{6}$. Quarti $12\frac{2}{3}$. In Saturniis periodica tempora, intimi, dies 1, horæ 21, 18′, 31″. Secundi dies 2, horæ 17, 41′, 27″. Tertii dies 4, horæ 13. 47′, 16″. Quarti dies 15, horæ 22, 41′, 11″. Quinti dies 79, horæ 7, 53′. 57″. Distantiæ à centro Saturni, diametris Annuli dimensæ, Comitis intimi, $\frac{39}{40}$. Secundi $1\frac{1}{4}$. Tertii $1\frac{3}{4}$. Quarti 4, quæ mihi erat $3\frac{1}{2}$. Quinti 12. omnia magnis laboribus vigiliisque reperta.

Tempora periodorum comitum Jovialium.

Ecquis jam systemata hæc inspiciens, atque inter se conferens, non stupet ad magnitudinem, ingentemque paratum duorum præ exiguo tenuique Telluris nostræ? aut cui nunc in mentem venire potest in hac una Solem ambientium, omnem ornatum, omnia animalia, omnes qui cœlestia mirentur inveniri; in illis vero nihil imposuisse rerum conditorem; nec alio fine tam vastas corporum moles creasse, quam ut lucem eorum nos homunculi intueremur, cursumque forsitan inquireremus?

Credo equidem futuros qui falsa aut incerta esse dicant, quæ de magnitudine cœlestium spatiorum nobis hic sumuntur. Scio enim quam difficulter quisquam adducatur, qui orbis Terrarum spatia mirari assueverit, inque eo tot populos, urbes, imperia; ut alibi exstare credat quorum collatione hoc totum tam sit exiguum quam hæ figuræ demonstrant. Atqui ex summorum hujus ætatis Astronomorum scriptis ea hausimus, ex quibus istæ systematum inter se rationes consequantur. Si enim Terra à Sole decem vel undecim mille diametris suis distat, ut Cassinus in Gallia, apud Anglos Flamstedius colligunt, parallaxium in Marte subtilissimis observationibus usi; cum nos quoque probabili conjectura, duo-

De hac proportione magnitudinis constare ex recentiorum observationibus.

duodecim mille diametros invenerimus; erunt & istæ orbium magnitudines inter se ferè quales hic descripsimus.

Quanam sit Solis apparens magnitudo & lux in Jove, & qui cognosci queat.

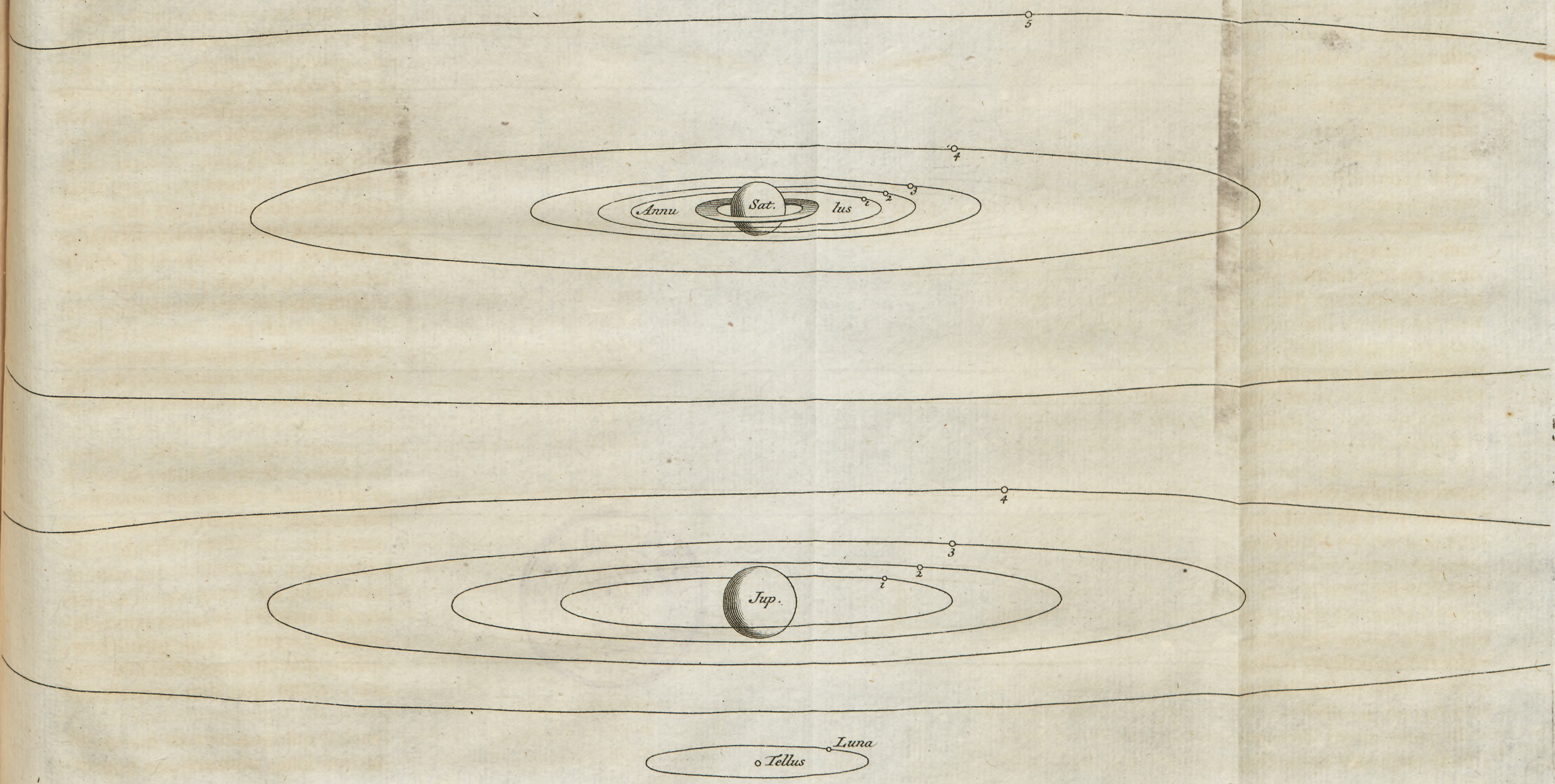
Sed de Jove dicere pergamus, ex quo Sol spectatus diametrum quintuplo quam apud nos minorem habet; ut proinde lucis calorisque illic pars tantum vigesima quinta sentiri possit. Sed ea lux nequaquam debilis putanda est, idque ostendit insignis Jovis per noctem claritas. Tum quod in Solis Eclipsibus quæ nobis contingunt, etiamsi nec vigesima quinta pars disci ejus supersit, ut me videre memini, non admodum sentiatur obscuratio. Si vero experimento inquirere libeat quanta sit illa in Jove Solis lux, sumatur tubus certæ longitudinis, isque parte altera obturetur, impositâ lamellâ in cujus medio foramen sit rotundum, ea latitudine quæ ad tubi longitudinem se habeat ut subtensa 6 scrupulorum primorum ad radium, hoc est fere ut 1 ad 570. Deinde ad Solem tubus obvertatur, radiique ejus per foramen ingressi excipiantur parte opposita, in chartæ candidæ folium; nec aliunde eo lux incidere possit. Hi radii imaginem Solis circulo referent, cujus claritas erit eadem quæ serenis diebus percipitur à Jovis incolis. Remotâ autem chartâ, si eodem loco oculus ponatur, videbit hic Solem ea magnitudine ac splendore, qui in Jovis globo consistenti appareret.

Eadem in Saturno.

Quod si in eodem tubo foramen duplo angustiori diametro statuatur, incidet in chartam, aut in oculum, lux ejusmodi qualis ad Saturnicolas pervenit. Quæ cum centesima tantum pars sit nostræ quam a Sole accipimus, tamen per tenebras noctis Saturnum satis lucidum nobis ostendit. In utroque vero Planetarum istorum, si nubilos quandoque dies habent, malignam tunc lucem esse oportet, si nostris oculis judicanda sit; at illorum habitatoribus talem haud dubiè, ut nihil de tenuitate ejus querantur. Sicut in noctuis, vespertilionibusque utilior gratiorque est crepusculi lux, aut quæ in ipsa nocte relinquitur, quam quæ diei tempore aërem terramque illustrat.

In Jove dies esse horarum quinque.

In Jove porro dierum spatia, quinque tantum horas nostrates æquare, ac noctes tantundem, admiratione non caret,


5
4
3
2
1
Annu
Sat.
lus
4
3
2
1
Jup.
Luna
Tellus

ret, propter tantam illius globi præ noſtro magnitudinem. Et ex hoc nimirum intelligitur naturam haudquaquam ea in re ſervaſſe rationem quæ eſt ſecundum globorum molem, aut eorum diſtantiam à Sole; cum etiam in Marte dies ſint fere noſtris pares. At in annorum longitudine, hoc eſt, tempore circuitus circa Solem, certam omnino diſtantiarum, quibus ab illo Planetæ abſunt, rationem habuit. Sunt enim ut harum cubi, ita quadrata temporum periodicorum, ut primus advertit Keplerus. Idque in comitibus Jovis & Saturni eodem modo ſe habere inventum eſt. Cum itaque anni & dierum tempora in Jove à noſtris multum diverſa ſunt, tum dies hoc nomine etiam differunt, quod eadem ſemper ſint longitudine. Perpetuo enim illic fruuntur æquinoctio, quoniam axem motus diurni Jupiter rectum ferme habet ad planum itineris ſui circa Solem, nec ut Tellus obliquum; ut teleſcopiorum obſervationibus conſtat. Frigidiores autem & ibi ſunt regiones quæ polis viciniores propter radiorum Solis obliquitatem; at longas noctes non patiuntur, ſicut quæ ſunt prope polos Terræ; ſed tenebras luceſque habent, ut dixi, horarum quinque, ubique & ſemper. Ac nobis quidem haud ſanè placeret tanta dierum brevitas, meliuſque nobiſcum agi putamus quod plus quam duplo longioribus utimur. Nulla tamen ratione, niſi quoniam potiora ducere ſolemus ea quibus aſſuevimus.

Et perpetuum æquinoctium.

Planetarum unum Saturnum ex Jove vident; cum cæteri nimium Soli vicini ſint; ipſeque Mars ab eo non ultra 18 gr. digrediatur. Ex quaternis vero quas habent Lunis, quin multò plus commodi capiant, quàm nos ex unica noſtra, negare non poſſumus, vel eo ſolo quod perrarò illunes noctes experiantur. Si verò & maria ſua navigant, de quo ſupra dictum fuit, egregiè curſus regere earum auxilio poſſunt. Ut prætercam ſpectaculi jucunditatem ex variis earum conjunctionibus, Eclipſibuſque, quas quotidie intuentur.

Eadem porrò commoda ac ſpectacula, imò etiam majora, Saturnicolis evenire neceſſe eſt, cum ob quinque Lunarum numerum, tum ob mirabiles Annuli aſpectus, nocte dieque

iis obversantes. Sed totam eorum Astronomiam, sicut in cæteris fecimus Planetis, exponere oportet.

Planeticolis stellas fixas eodem modo apparere, ac nobis.

Atque hic primum illud annotabimus, quod de omnibus dici poterat, sed hic magis mirandum est, stellas inerrantes è Saturno iisdem planè figuris, eademque luminis diversitate distinctas, atque apud nos spectari: idque ob immanem earum distantiam, de qua postea dicetur. Ad quam nempe illa, quam viginti quinque annis globus à tormento emissus pervaderet, perexigua censenda sit.

Eadem igitur signa Orionis, Ursæ, Leonis, & reliqua, Astronomi illic contemplantur; at non circum eosdem polos ac nobis sese convertentia, sed qui unicuique Planetæ diversas cœli partes obtineant.

Qualis sit Planetarum aspectus, dierum ratio in Saturno.

Sicut autem Jovis incolis solus Saturnus è primariis Planetis cernitur, ita Saturnicolis solus spectatur Jupiter; qui idem illis est quod nobis Venus, nec nisi 37 circiter grad. à Sole recedit. Quantam verò habeant dierum longitudinem, certò cognosci nequit. Sed, ex comitis intimi distantia ac periodo, exque eorum comparatione cum intimo Jovialium, verisimile fit non longiores esse dies illas quam sint in Jove; quas decem horarum esse diximus, aut paulo minus. Sed, cum hæ æqualiter in lucem ac tenebras dividantur, Saturnicolæ insignem inæqualitatem atque etiam majorem quam nos perpetiuntur, majusque etiam æstatis & hyemis discrimen; propter inclinationem axis globi Saturnii ad planum orbitæ suæ, quæ est partium 31; cum noster Terræ axis tantum 23 & dimidiæ obliquitatem habeat. Hæc eadem declinatio in Saturno, Lunas ejus longe evagari facit à Solis via, vel quam pro hac illi habent: atque etiam causa est, cur nunquam Lunas suas pleno orbe lucentes conspiciant, nisi æquinoctiorum tempore; quæ triginta annis nostris bis ibi contingunt. Idem denique axis positus phænomena varia, ac mirabilia, Planetæ ejus incolis præbet; quæ ut intelligi possint, totius Saturni cum Annulo figuram hic rursus describemus: in qua, sicut jam olim definivimus, cum mirum hunc fornicem è tenebris primùm erueremus, inter diame-

tros

tros annuli globique ea erit ratio, quæ 9 ad 4. Vacuumque spatium inter utrumque interjectum, eandem quam annulus latitudinem habebit. Crassitudinem autem hujus exiguam esse, observationes comprobant, quæ tamen ratione diametri, non nimia erit, etiamsi sexcenta milliaria Germanica efficere putetur.

Sit igitur secundum hæc Saturni globus cujus poli A, B. Annuli diameter G N, obliquè inspecti, ita ut Ellipsin angustiorem circunferentia sua referat. Sunt igitur circa polos utrosque portiones superficiei, arcubus C A D, E B F, 54 partium, definitæ, quas qui incolunt (nisi frigus forsan inhabitabiles reddit) nunquam Annulum conspicere possint. Ex reliqua omni superficie vident eum annis continuis quatuordecim, mensibus novem: quod est ipsis anni spatium dimidium. Altero dimidio absconditur. Quocirca qui habitant in zona amplissima inter circulum polarem C D, & T V, æquatori annuloque subjacentem, quandiu superficiem annuli ipsis obversam Sol illuminat, vident media nocte portionem ejus K G L, arcus lucidi forma, qui utrimque ab horizonte exurgit, sed medius interrumpitur umbra globi Saturnii partem G H tegente plerumque ad extremum usque marginem. Post mediam verò noctem umbra eadem paulatim in partem dextram movetur, spectatori in hemisphærio boreo agenti; in sinistram verò, si in opposito versetur. Evanescitque matutino tempore, manente tamen arcus specie, quem tota die cernere possint, sed tenuius lucentem quam nobis Luna nostra interdiu conspicitur. Siquidem sua illis est atmosphæra, sive aër a Sole splendescens, ut probabile esse superius ostendimus. Nam si nihil tale haberent, non aliter interdiu quam noctu & annulum & Lunas suas, stellasque inerrantes lucere viderent. Annuli porro spectaculum, hôc quoque pulchriùs esse oportet, quod eum in sese converti, ex maculis quibusdam, aut inæquali splendore animadvertunt. Neque enim ex tanta propinquitate hoc notari non potest, cum vel è Tellure nostra inæqualis claritas, in superficie annuli, appareat; quæ limbo exteriore, quàm in-

TAB. LIV. fig. 2.

Qualis sit Annuli aspectus in Saturno.

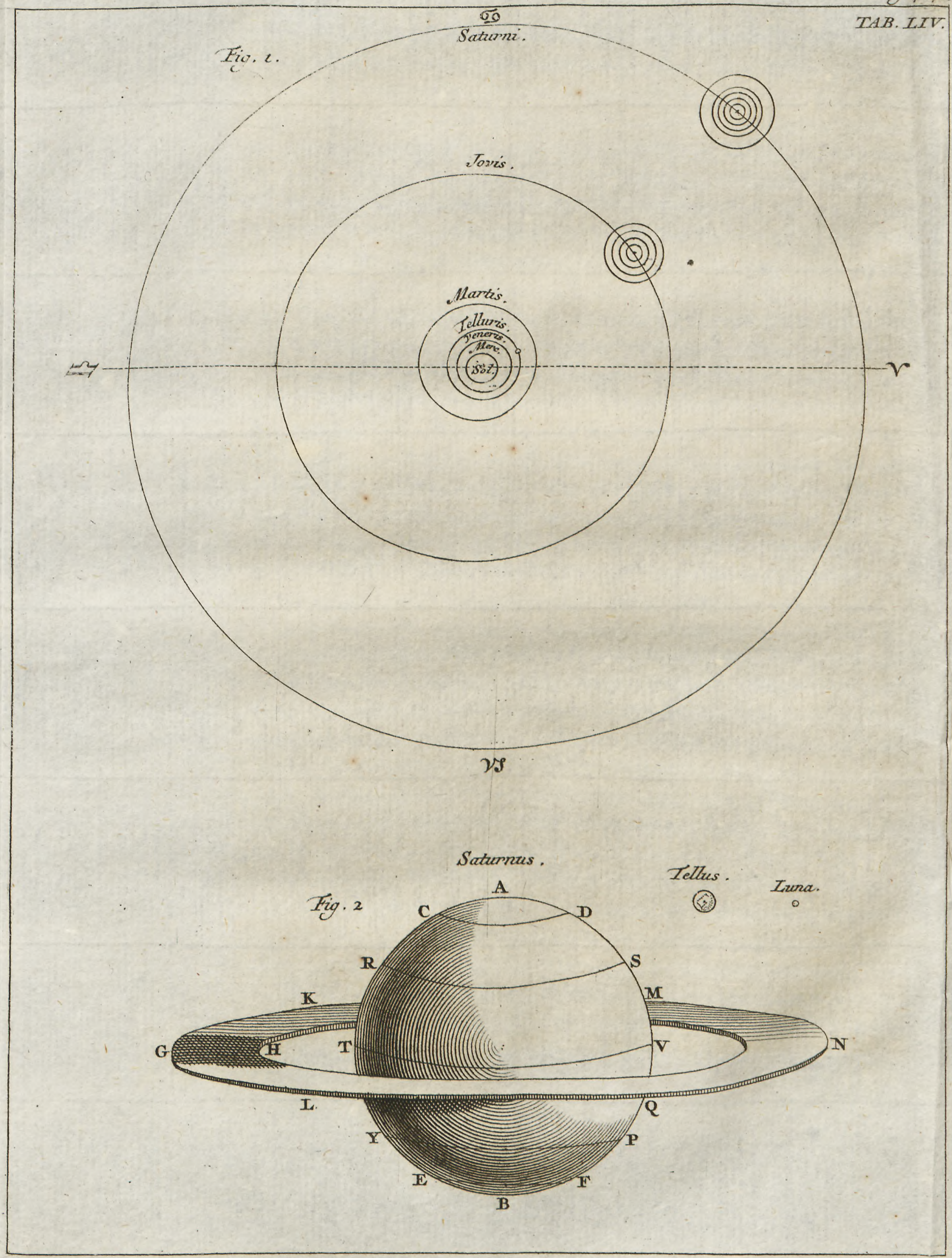
interiore, minor est. Simul autem, dum globi umbra in Annuli partem G H projicitur, etiam annuli umbra obscurat globi partem circa P F, quæ alioqui Solis luce frueretur. Ut proinde semper Zona quædam sit P Y E F, nunc latior, nunc angustior, cujus incolæ multo tempore conspectu Solis, annulique simul, priventur; qui tunc quoque stellarum partem aliquam illis aufert. Quod certè miraculi instar videri necesse est; intercepto Sole, in profundam noctem incidentibus; nec quid eam efficiat videntibus. Quo tempore Lunarum solo lumine se solantur. Altera anni parte dimidia, cum oppositam annuli superficiem Sol illustrat, eodem modo, luce fruitur hemisphærium T B V, quo prius T A V; & hoc vicissim tunc longas illas eclipses patitur. Sola æquinoctiorum sunt tempora, Sole in ipsum productum annuli planum incidente, cum lumine destitutus vix Saturnicolis apparere potest; quando nec nostris percipitur dioptris. Tenente nimirum Saturno, ex Sole viso, gradum Virginis, aut Piscium, vicesimum primum cum dimidio; quemadmodum in Saturnio systemate olim exposuimus. Ubi ratio quoque redditur eorum, quos diximus, exortuum Solis super Annuli planum, toto Saturnii anni decursu.

Apposui in schemate hoc, juxta Saturnum, Terræ nostræ, Lunæque globos, servata magnitudinum vera ratione; ut rursus intelligatur, quam exigua sit habitatio nostra, ad Saturni sphæram annulumque collata; quod continue cogitationi infixum habere expedit. Imaginem vero Saturniæ noctis, geminis annuli lucentis arcubus adversis, & quinque Lunis ornatæ, sibi quisque formare ex jam dictis poterit. Et de primi quidem ordinis Planetis, hæc fere erant quæ dicenda habebam.

Superest ut de Lunis quoque Saturno ac Jovi additis, ac præcipuè de nostra, quæramus, tam quæ ad phænomena astronomica attinent, quam quæ ad ornatum in earum superficie reperiendum, ac præsertim an aliquem esse probabile sit; quod hactenus facere distulimus.

De Luna pauciora conjici posse.

Ac videtur quidem, cum tam propinquus nobis sit Lunæ glo-


Fig. 1.
Saturni.
Jovis.
Martis.
Telluris.
Veneris.
Merc.
Sol.
Fig. 2
Saturnus.
Tellus.
Luna.
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
N
P
Q
R
S
T
V
Y

glob
cien
natu
tant
quan
gene
mari
conſ
rum
teris
Ill
dem
turn
prim
cum
& a
mus.
(poſ
ca J
bere
non
Ill
ſpici
tium
ciem
parte
circu
madv
ſum
meba
immo
tum
turali
Mari
pleri
plana

globus; telescopioque utentibus multa particulatim conspicienda præbeat; plura quoque ac probabiliora de universa natura ejus, quàm de Planetarum cæterorum conjici posse, tanto quippe remotiorum. Sed contra evenit ut vix quidquam de Lunæ rebus dicendum reperiam, nimirum quia ejus generis Planetam nullum coram intueri contigit; cum in primariis illis aliter hoc sese habeat. Sunt enim, ut jam satis constat, generis ejusdem ac Tellus nostra, in qua, quid rerum geratur, quidve exstet, propè intuemur, eoque de cæteris similia quædam conjectandi ratio suppetit.

Satellitum Saturni & Jovis eandem ac Lunæ rationem esse.

Illud vero sine omni dubitatione statuere possumus, ejusdem naturæ, ac Luna nostra, esse illas, quæ Jovem ac Saturnum comitari dictæ sunt, siquidem eodem prorsus modo primarios hosce Planetas circumeunt, simulque cum illis circum Solem feruntur, perinde ac cum Tellure Luna. Sed & aliam utrobique similitudinem intercedere postea videbimus. Quamobrem si quid de Lunæ statu conjicere possimus, (possumus autem pauca admodum) idem in quatuor illis circa Jovem, & in quinque Saturniis haud multo aliter se habere putandum erit. Illud semper menti infixum tenendo, non esse illas viliores aut minore ornatu excultas.

Lunam montibus & vallibus distinctam esse.

Illud igitur in Luna nostra apparet, etiam minoribus perspicillis trium quatuorve pedum longitudine, plurimis montium tractibus, rursusque planis vallibus latissimis, superficiem ejus divisam esse. Cernuntur enim montium umbræ ea parte quam a Sole aversam habent; ac frequenter jugo in circulum fere composito inclusæ valles quædam minores animadvertuntur; quarum medio monticuli, unus pluresve rursum eminent. Ex qua vallium rotunditate argumentum sumebat Keplerus, Lunicolarum, cum ratione operantium, immensas has esse molitiones. Sed hoc incredibile prorsus, tum ob nimiam earum magnitudinem; tum quod facile naturalibus causis cavitates ejusmodi orbiculares formari possint. Marium vero similitudinem illic nullam, (etsi & ille, & alii plerique omnes contra sentiunt) reperio. Nam regiones planæ ingentes, quæ montosis multo obscuriores sunt; quas-

Carere vero mari.

que

que vulgo pro maribus haberi video, & oceanorum nominibus insigniri; in his ipsis, longiori telescopio inspectis, cavitates exiguas inesse comperio rotundas, umbris intus cadentibus; quod maris superficiei convenire nequit: tum ipsi campi illi latiores non prorsus æquabilem superficiem præferunt, cum diligentiùs eas intuemur. Quocirca maria esse non possunt, sed materia constare debent minus candicante, quàm quæ est in partibus asperioribus: in quibus rursus quædam vividiori lumine cæteris præcellunt. Nulli quoque fluvii in Luna inesse videntur. Non enim effugerent aciem perspicillorum nostrorum; saltem si inter montes aut ripas præaltas, ut nostri plerique, laberentur. Sed neque nubes ullæ sunt unde pluviæ generentur ad suppeditandum fluviis humorem. Si enim essent, videremus eas nunc has nunc illas Lunæ regiones obtegere, ac visui nostro subducere, quod nequaquam contigit, sed perpetua apparet serenitas.

Fluviis,

Nubibus,

Aëre & aqua.

Porrò nec aëre aut atmosphæra Lunam cingi, qualis circum Tellurem hanc ambit, manifestum est. Quia si qua talis existeret, non posset extrema Lunæ ora tam præcise circumscripta spectari, quam subeunte stella aliqua sæpe animadversa est; sed evanida quadam luce, ac velut lanugine finiretur, ut omittam vapores atmosphæræ nostræ maximam partem ex aquæ particulis constare; ac proinde, ubi nulla sunt maria aut fluvii, non esse unde eorum copia sursum educatur. Hæc igitur insignis differentia quæ Lunam inter Terramque nostram reperitur, omnem fere aditum conjecturis obstruit. Nam si maria amnesque inesse cernerentur, haud leve argumentum esset cæterum quoque Terræ ornatum ei convenire, veramque adeo esse Xenophanis opinionem, qui habitari in Luna dicebat, eamque Terram esse multarum urbium & montium. Nunc vero in solo arido, & omnis aquæ experte, non videntur neque herbæ, neque animantia exstare posse, cum omnibus istis humor materiam & alimenta præstare debeat.

Hinc de animantibus & stirpibus in-

Anne igitur credendum, tantæ magnitudinis globum in hoc conditum esse ut noctu nobis lucem tenuem largiatur,

aut

aut æſtus maris cieat? Nemo erit qui pulcherrimo inde ſpectaculo fruatur Telluris noſtræ in ſe revolutæ, & nunc cum Europa Africam, nunc Aſiam, nunc Americam oſtentantis; nunc plene, nunc dimidio orbe lucentis? Omnes item quæ Jovem ac Saturnum circunſtant Lunæ, æquè inutiles vacuæque ferentur? Non habeo equidem quod dicam, cum nulla ab re ſimili conjectura ſuppetat. Magis tamen probabile videtur ob corporum præſtantiam, aliquid in ſuperficie eorum geri, aliquid creſcere ac vivere, qualecunque tandem id ſit, & quantumlibet à rebus noſtris diverſum. Poſſet forſan ſtirpium animaliumque ibi vitam aliud quid, aquæ noſtræ diſſimile, ſuſtentare. Poſſet exiguus humor in terra, non æque ac noſtra, aquam combibente, ſufficere radiis Solis, unde rorem educerent, alendis herbis arboribuſque idoneum. Quod idem Plutarcho in mentem veniſſe video in eo qui de Facie in orbe Lunæ eſt dialogo. Nam neque apud nos, niſi ſumma maris ſuperficie, ac tenui veluti pellicula opus eſſet, ad humorem terris, ſatiſque ſuppeditandum, quem Solis vis elicuiſſet, quique in rorem tantum, non vero in nubes condenſaretur. Sed hæ admodum leves ſunt conjecturæ aut ſuſpiciones potius, nec aliud habemus ex quo de Lunæ noſtræ, atque etiam reliquarum natura aliquid colligamus.

certiorem conjecturam eſſe.

Omnium enim, uti diximus, eadem putanda eſt; idque præter adductam ſuperius rationem, etiam hac alia confirmatur, quod ſicuti Luna noſtra eandem perpetuò faciem ad nos obverſam habet, ita & illæ Joviales ac Saturniæ ad ſuos Planetas primarios. Mirum videatur hoc ſciri potuiſſe; at non erat difficilis conjectura, poſtquam, ut paulo ante dixi, animadverſum fuit extremam Saturniarum tunc ſolum conſpici, cum Planetæ huic ad occidentem poſita eſt; ab oriente vero ſemper eam latere. Facile enim perſpicitur id inde evenire, quod magna ſui parte obſcuriorem ſuperficiem habeat hæc Luna; quæ pars obſcurior cum ad nos converſa eſt, tunc cerni nequeat præ luminis tenuitate. Cumque ſemper in orbitæ ſuæ latere quod orientem ſpectat obſcurata reperiatur, in altero nunquam, manifeſtum indicium eſt eandem glo-

Jovis ac Saturni Lunas, non ſecus ac noſtram Telluri, eandem partem ſuo Planetæ obvertere.

globuli regionem ſemper Saturnum reſpicere, quoniam ex eo illud contingere neceſſe eſt. Quis vero jam dubitet, cum & illius omnium remotiſſimæ & noſtræ Lunæ facies ſemper eadem ex primario Planeta ſuo ſpectetur, quin idem in cæteris, quæ circa Jovem ac Saturnum volvuntur, natura effecerit? Cauſa vero quare id fiat vix aliunde peti poteſt, quam quod denſior ponderoſiorque materia ſit Lunarum omnium parte ea, quâ ſemper à Planetis ſuis averſæ ſunt. Sic enim ea ipſa pars majore vi à centro circuitus recedere contendet: cum alioqui, ex motus legibus, eadem ſemper facies non ad Planetam, ſed ad fixas ſtellas eaſdem, continue obverti debuerit.

Lunæ incolis ſi qui ſint, qualis apparitura ſit cælorum conſtitutio, dierum ratio, &c.

Porro ex hoc poſitu Lunarum ad Planetas ſuos mira quædam ſpectacula evenire neceſſe eſt eas habitantibus, qui an ſint aliqui, ut jam apparuit, multo incertiſſimum eſt; ſed quaſi eſſent ponantur. Satis erit autem de noſtræ Lunæ indigenis dixiſſe. His igitur ſic in duo hemiſphæria globus ejus dividitur, ut qui alterum incolunt, ſemper Telluris noſtræ conſpectu fruantur, qui reliquum, ſemper eo careant. Niſi quod quidam, circa confinia utriuſque agentes, amittant eum per vices ac recuperent. Cernunt autem Gæoſcopi illi Tellurem in æthere pendentem multo majorem quam quanta nobis Luna apparet, quippe ferè quadruplo ampliore diametro. Sed illud mirabile, quod nocte dieque eodem cœli loco velut immobilem perpetuo hærere vident; alii recta ſupra caput defixam, alii certa altitudine ab horizonte diſtantem, quidam & in ipſo horizonte ſitam: atque interea convertentem ſe circum axem ſuum, regioneſque quas continet univerſas deinceps oſtendentem horarum viginti quatuor ſpatio, atque eas quoque proinde (quod utinam videre liceret) quæ ad utrumque polum nobis incolis adhuc incognitæ manent. Præterea & lumine creſcentem eam vident & imminutam menſtrua periodo, atque ita per vices plenam, dimidiatam, inque cornua tenuatam, eâdem formarum varietate quam Lunæ globus nobis exhibet. Sed lucem à Tellure noſtra accipiunt quindecuplo majorem quam nos ab illa. Adeo ut,

ut, in hæmisphærio meliore, ad nos obverso noctes insigniter claras habeant; nec tamen cum claritate illa ullus ad eos calor manare potest, etsi hoc aliter Keplero visum est. Sol verò semel illis oritur singulis mensibus nostris, semelque occidit, atque ita dies noctesque, quindecuplo quam nos longiores habent, at inter se æquales perpetuo æquinoctio. Qua dierum longitudine, quandoquidem non amplius ab illis quam à nobis Sol abest, necesse esset eos, quibus altè supra horizontem ascendit, æstu incommodo torreri, si corpora eorum perinde ac nostra afficiantur. Ascendit autem maximè iis qui circa confinia hemisphæriorum, quæ diximus, incolunt, qui vero inde procul distant, ac circa regiones habitant polis Lunæ suppositas, non magis ob longos istos dies calebunt, quam qui circa Islandiam aut novam Zemblam æstivo tempore cetos piscantur; qui persæpe frigora ingentia, ipsius solstitii tempore, ac trium licet mensium diebus, experiuntur. Sunt autem poli Lunæ, quos circum stellæ fixæ converti cernuntur in ea habitantibus, nequaquam iidem qui nobis, neque etiam cum Eclipticæ polis conveniunt, sed his circunferuntur, quinque gradibus semper distantes, idque periodo annorum novendecim. Anni autem spatium idem illic quod nobis; quod motu fixarum metiuntur ac reversione earum ad Solem. Idque iis perfacile est, cum diei tempore, non minus quam noctu, stellas conspiciunt, nihil impediente Solis claritate; quoniam, ut supra ostensum est, nullam vaporum sphæram habent; sine qua & nos interdiu cœlum sideribus plenum aspiceremus. Nec vero nubes quoque ullæ unquam obstant observantibus, adeo ut cursus Planetarum melius quàm nos investigare possint; sed tamen difficilius multò verum systema reperire. Quoniam incipientibus stare Terra sua videri debuit, in quo eos longius quàm nos error abduxit.

Quod ad Jovis & Saturni Lunas facile transferre est.

Hæc omnia vero ad Jovis & Saturni Lunas referuntur, quibus idem quod nobis Tellus est, sui sunt primarii Planetæ. Singula autem diei noctisque spatia simul sumpta, cujusque Lunæ periodus metitur, quas supra annotavimus.

Quo fit ut Saturni quintam incolentibus, cujus periodus dierum nostrorum erat 8☉, eveniant sui dies noctesque nostris quadraginta æquales. Iisdem vero, propter Saturni revolutionem tricennalem, fiunt æstates hyemesque singulæ annorum nostrorum quindecim. Itaque tum propter tam longa frigora, tamque longos somnos vigiliasque; etiamsi nil aliud esset, plane aliam quam apud nos vitam illic fore manifestum est.

Explicuimus igitur hactenus, quæ ad Planetas primarios secundariosque Solem circundantes spectant. Hinc vero priusquam ad Solem ipsum & stellas fixas, tertium nempe genus cœlestium corporum, pergamus, operæ pretium videtur, ut magnitudinem, ac magnificentiam totius Solaris mundi, aliqua ratione, atque evidentius quam hactenus factum sit, exprimamus. Quod quidem schemate in foliis hisce descripto haudquaquam possumus, propter parvitatem corporum Planetariorum ad vastissimas orbitas suas collatorum. Sed verbis supplebitur quod descriptione perfici nequit. Itaque repetitâ figurâ quam superioris libri initio posuimus, cogitetur ei similis ac proportione respondens, sed quæ descripta sit in amplissima politissimaque areæ cujusdam planitie, cujus extremus circulus, Saturni orbem referens, trecentos sexaginta pedes semidiametro contineat. In cujus deinde circunferentia globus Saturni cum suo ponatur Annulo, quantus in figura altera cernitur, ubi Solis & Planetarum sunt corpora. Cæterique similiter globi in sua quisque orbita collocentur; inque medio omnium Sol qua magnitudine ibi designatur, quatuor nempe pollicum diametro. Ita Telluris circuitus, quem *magnum orbem* vocant Astronomi, semidiametrum sortietur pedum triginta & sex. In quo Tellus ipsa milii grano non major circunferri cogitanda est; eique comes Luna, vix punctum visibile superans, in circello paulo plus quam duos pollices lato; velut in adscripto hic diagrammate. In quo linea A B circunferentiæ partem refert ejus, quam diximus, Telluris orbitæ, cujus triginta & sex pedes continet semidiameter. In ea Tellus est cir-

TAB. LIV. fig. 1. *Solaris mundi secundum veram proportionem descriptio.*

TAB. LV. fig. 1.

TAB. LV. fig. 2.

circellus C: Lunæ vero circum eam via, circulus DE; in quo Lunæ corpuſculum quale ad D expreſſum eſt.

Saturniarum vero Lunarum exterior in circulo feretur cujus ſemidiameter pollicum 29. Jovialium item exterior in minore aliquanto, cujus ſemid. poll. 19¼.

Sic demum habebitur germanus & omni proportione perfectus ſolaris Regiæ typus, in quo jam Tellus duodecim mille diametris ſuis à Sole aberit. Cujus ſpatii amplitudo ſi milliarium numero deſignanda ſit, plus quam ſeptemdecim milliones, ut vocant, milliarium Germanicorum comprehendet. Sed melius fortaſſe hanc vaſtitatem animo concipiemus, ſi motus cujuſdam celeritate eam metiamur, Heſiodi Poëtæ exemplo; qui altitudinem cœli, & Tartari profunditatem æquis ſpatiis definiens, novem dierum noctiumque lapſu, ferream incudem è cœlo dimiſſam, ad terram decimâ pervenire ſcripſit; ac tanto quoque tempore è Terræ ſuperficie cadentem ad Tartara ferri. Nos vero non incudis lapſum ſed continuam potius celeritatem globi ex majore tormento emiſſi huc adhibebimus; quem ſingulis horæ ſecundis ſcrupulis, ſive arteriæ pulſibus, centum circiter hexapedas conficere experimentis compertum eſt, quæ in Baliſticis Merſennus commemorat; cum ſonus eo tempore ad centenas octogenas extendatur.

Immenſitas intervallorum inter Solem & Planetas, illuſtratur comparatione cum motu globi è tormento emiſſi.

Ajo igitur, ſi ex Terra ad Solem tanta illa celeritate globus continuè feratur, fere annos 25 eſſe inſumpturum antequam iter hoc peragat. Ut proinde à Jove ad Solem 125 annis opus habeat, à Saturno 250. Et hic quidem calculus ex menſura Terræ diametri pendet, qui ex probatioribus Gallorum obſervationibus eſt hexapedarum Pariſienſium 6538594. cum gradus unus circuli maximi efficiat hexapedas 57060. Quanta itaque ſint iſtorum orbium ſpatia, quamque exilis, eorum reſpectu, Telluris globulus, in quo tam multa homines molimur, tantum navigamus, tot bella gerimus, ex his intelligitur. Quod utinam diſcant cogitentque Reges & Monarchæ noſtri; ut ſciant quantilla in re laborent cum de angulo aliquo terræ occupando totis viribus, magno multorum

malo, contendunt. Sed ad noſtra revertamur, ac de Sole videamus, cujus jam ſimul ad Planetas & eorum orbitas magnitudinem ampla illa deſcriptio, quam expoſuimus, demonſtrat.

In Sole omnem conjecturam deficere.

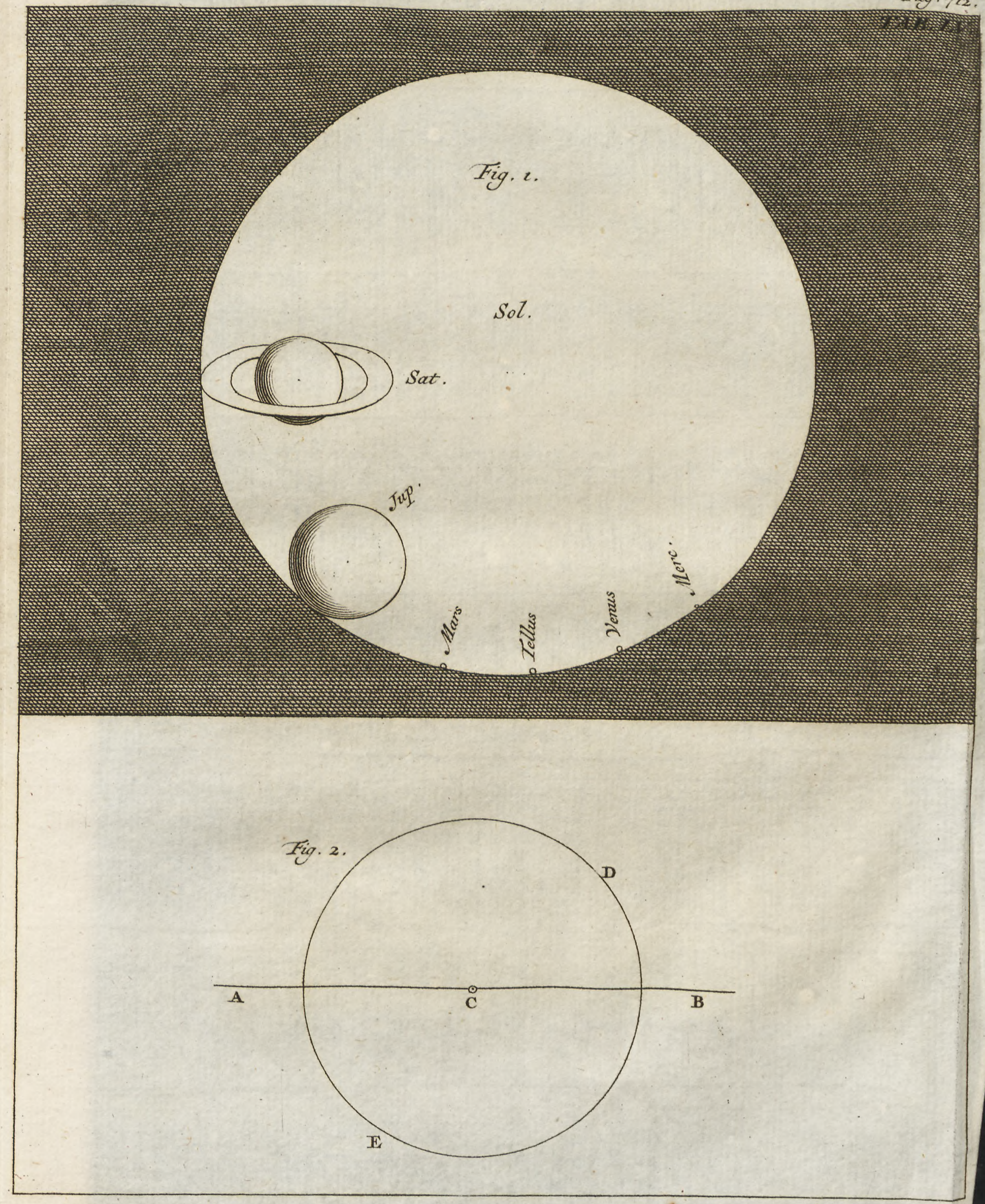
In hoc igitur ipſo Sole non improbabile quibuſdam viſum eſt animalia vivere poſſe. Sed cum multo magis etiam, quam in Lunis, conjectura omnis hic deficiat, neſcio qua ratione id ita eſſe opinati ſint. Non enim adhuc planè compertum eſt, utrum dura an liquida ſit vaſti illius globi materies; etſi propter lucis naturam, quam aliàs explicui, magis veriſimile ſit liquidam eſſe; quod etiam perfecta rotunditas ejus, lumenque per totam ſuperficiem æqualiter diffuſum ſuadere videtur. Nam exigua quædam in diſci circunferentia apparens inæqualitas, quæ teleſcopiis, nec tamen ſemper, cernitur, & ex qua miros *undarum fluctus, flammarumque eructationes*, nonnulli ſibi fingunt, nihil aliud eſt quàm vaporum prope Terram noſtram tremula agitatio, quæ & ſtellas noctu ſcintillare facit.

Faculas Solares incertas videri.

Neque ego faculas illas, quas unà cum maculis fere omnes celebrant, unquam videre potui, etſi has ſæpius ſpectaverim; ac valde dubito an aliquid in Sole, ipſo Sole lucidius appareat. Invenio enim, fideliores obſervationes conſulens, non niſi in nubeculis illis ſubfuſcis, quæ maculas plerumque circundant, aliquando ſolæ feruntur, puncta quædam clariora interdum notari, quæ non mirum eſſet, propter obſcuritatis illius viciniam, ſplendidiora quam ſint videri.

Propter calorem nulla illic vivere copora noſtris ſimilia.

Summum quidem in Sole calorem, fervoremque eſſe, certo credendum eſt, in quo nihil omnino noſtrorum corporum ſimile vivere poſſit, aut momento ſupereſſe. Itaque aliud genus viventium animo concipiendum eſſet, longeque ab omni natura eorum quæ unquam vidimus, aut cogitavimus, diverſum. Quod fere idem eſt ac ſi dicamus nihil hic conjectando nos conſequi poſſe. Eſt quidem tam præſtans, tantæque molis corpus haud dubiè maxima ratione, ac propter inſignem uſum aliquem creatum. Sed an non apparet jam abunde utilitas ejus in mirabili illa lucis caloriſque in totum Planetarum circumſtantium chorum effuſi-


TAB. LV.
Fig. 1.
Sol.
Sat.
Jup.
Mars
Tellus
Venus
Merc.
Fig. 2.
D
A
C
B
E



ſione; ex qua univerſo animantium generi non vita ſolum conſtat, ſed & jucunda ut ſit efficitur? Idque non in exiguis ſolum, qualis Tellus noſtra, ſed & in tanto majoribus Jovis & Saturni globis, quorum non eſt contemptibilis ad Solem collata magnitudo. Hæc quidem tanta ſunt ut nihil mirum ſit eorum gratia duntaxat Solem eſſe conditum. Nam quod Keplerus opinabatur, aliud quoque illi delegatum eſſe munus, ut nempe omnium circum ambientium Planetarum motus in ſuis orbibus incitaret, propria ſua circa axem converſione, quod in Epitome ſyſtematis Copernicei multis comprobare conatur, non poſſum aſſentiri, propter ea quæ in ſequentibus dicentur.

Stellas fixas totidem eſſe Soles.

Solem ex ſtellis inerrantibus unam eſſe, ante Teleſcopii inventionem, adverſari videbatur Copernici ſententiæ; quia cum ſtellæ, quæ dicuntur primæ magnitudinis, cenſerentur trium ſcrupulorum diametro, eſſentque ſecundum Copernicum tam procul remotæ, ut totus ille Orbis magnus, quo Terra defertur, velut puncti inſtar eſſet ad ſphæram affixarum comparatus; quandoquidem toto anni tempore, etſi locum Terra mutaret, nihil mutari cernerentur ſtellarum diſtantiæ; ſequebatur ſingulas earum, quæ cæteris clariores apparent, majores eſſe toto illo magni orbis ambitu: quod abſurdum erat. Atque hoc, ut palmarium contra Copernici doctrinam argumentum, Tycho Braheus objectabat. Sed poſtquam radios ſtellarum nudo viſu apparentes, Teleſcopia ſuſtulerunt; (quod ita optimè faciunt, ſi lens oculo proxima flammæ afflatu obſcuretur) atque ita haud aliter eas ac puncta lucentia ſpectandas præbuerunt; prorſus ſublata quoque eſt ea difficultas, nec quidquam jam impedit quo minus ſtellæ iſtæ pro totidem Solibus habeantur. Idque eo probabilius redditur, quod conſtet propria luce ſua eas lucere: tanta enim eſt diſtantia, ut à Sole illam mutuari nequaquam poſſint. Singulas vero Sole minores non eſſe nihil credi vetat, cum ex tam immenſo intervallo tam vividum lumen fundant. Hanc itaque ſententiam nunc paſſim tenent qui Copernici ſyſtema amplectuntur. Qui recte quoque hoc ſta-

Eas ſpargi per vaſta cæli

ſpatia, & alias ab aliis, ut proximas à Sole removeri.

ſtatuunt, non in una eademque ſuperficie hærere ſtellas iſtas; tum quod nulla ratio hoc ſuadeat, tum quod in eandem ſphæram Sol, qui earum una eſt, referri nequeat. Itaque veriùs eſſe ſpargi eas per vaſta cœli ſpatia, quantumque à Terra aut Sole ad proximas interjacet, tantum circiter ab his eſſe ad ſequentes, atque inde rurſus ad alias, continuo progreſſu.

Nec Solem præ cæteris eminere contra Keplerum notatur.

Scio etiam hic aliud ſentire Keplerum, in ea, quam diximus, Epitome. Quamquam enim exiſtimet tota cæli profunditate ſtellas diſſeminatas eſſe, vult tamen Solem hunc noſtrum multo amplius ſpatium circa ſe habere, quaſi ſphæram vacuam, ſupra quam confertius ſtellis cœlum incipiat. Putabat enim alioqui futurum ut paucæ tantum ſtellæ numerarentur nobis, eæque ſumma magnitudinis diverſitate: *nam cum omnium maximæ tam appareant parvæ, ut vix inſtrumentis poſſint notari aut menſurari, conſequens eſſe ut quæ duplo aut triplo &c. diſtarent longius, duplo & triplo appareant minores, poſitis æqualibus ipſis veris magnitudinibus; citoque veniatur ad eas quæ penitus fiant inſenſibiles: atque ita pauciſſimas viſum iri ſtellas, eaſque in maxima differentia;* cum contra amplius quam mille obſerventur, nec magnitudine ita multum diverſæ. Sed ex his nequaquam id quod ille intendit evincitur; ac præcipue in eo deceptus fuit, quod non advertit ignium, & flammæ eam eſſe naturam, ut ex maximis intervallis cerni poſſint, iiſque unde alia corpora, æque exiguis angulis comprehenſa, prorſus evaneſcant. Quod vel lucernæ comprobant, quæ per urbium noſtrarum vicos noctu incenduntur. Quæ cum ad centenos pedes inter ſe diſtent, tamen earum viginti & plures, in continua ſerie magis magiſque remotas, numerare licet, etſi viceſimæ flammula vix 6 ſecundorum ſcrupulorum angulo conſpiciatur. Idem vero multo magis fieri neceſſe eſt in eximia illa ſtellarum luce; adeo ut nihil mirum ſit, ad mille aut duo millia earum, oculis notari poſſe; Teleſcopiis vero adhibitis, etiam vigecuplo plures deprehendi. Sed ſuberat ratio, cur Keplerus Solem præ reliquis ſtellis præcipuum

puum quid habere cuperet; circumque eum esse unicum, in Natura, Planetarum systema, idque mundi medio situm. Hisce nimirum opus habebat ad confirmandum mysterium Cosmographicum suum, quo certis quibusdam proportionibus respondere volebat Planetarum à Sole distantias diametris sphærarum, quæ corporibus polyedris Euclideis inscribuntur & circunscribuntur singulis. Quod tum demum verisimile videri poterat, si in mundo universo unus tantum esset circa Solem aberrantium siderum chorus, adeoque & Sol ipse solus sui generis.

Sed mysterium illud totum, si bene perpendatur, somnium quoddam ex Pythagoræ aut Platonis Philosophia enatum esse apparet. Nec proportiones satis quadrant, ut ipse quoque auctor agnoscit; sed, cur hoc ita sit, alias causas plane frivolas comminiscitur. Idem levioribus etiam argumentis probat extremam mundi superficiem, stellas omnes continentem, sphæricæ esse figuræ; ac numerum præterea earum necessariò esse finitum, ex eo quod singularum finita sit magnitudo. Illud vero vanissimum, quod à Sole, ad superficiem cavam sphæræ fixarum, definit spatium sexies centena millia Terræ diametrorum. Quoniam scilicet, sicut Solis diameter ad diametrum Orbitæ Saturni; quos inter se esse statuit ut 1 ad 2000; ita sit hic diameter ad illum sphæræ fixarum interioris; quod nulla ratione nititur. Atque hæc quidem Viro summi ingenii, magnoque Astronomiæ instauratori excidisse mirum est. Nos vero unà cum præcipuis nostræ ætatis Philosophis, ne dubitemus eandem stellarum earum & Solis naturam existimare. Ex quo jam mundi idea multo major nascitur, quam quæ ex hactenus traditis percipiebatur. Quid enim nunc prohibet, quin unamquamque ex stellis hisce, sive Solibus, haud aliter ac Sol noster, circum se Planetas habere putemus, quæ rursus suis Lunis stipatæ sint? Imo hoc ita se habere, manifesta ecce ratio suadet. Etenim si cogitatione in cœli regionibus nos ponamus, non minus à Sole, quàm fixis stellis, remotos; nihil quicquam discriminis hasce inter atque illum tunc essemus animadversuri. Longè enim abest ut corpora Pla-

Nihil impedire, quo minus credamus circa unamquamque ex fixis, ut circa Solem, esse Planetas.

netarum, Solem ambientium, conſpecturi ſimus, vel ob tenuiſſimam eorum lucem, vel quod univerſæ, quibus feruntur, orbitæ in unum idemque lucidum punctum cum Sole confunderentur. Hic igitur poſiti, merito eandem omnium ſtellarum rationem naturamque eſſe exiſtimaremus; & ex una, propius inſpecta, de cæteris quoque judicari poſſe nihil ambigeremus. At nunc Dei benignitate, ad unam ex ipſis, Solem videlicet noſtrum, admoti ſumus, ac tam prope acceſſimus, ut circum eam ſex minores globos converti cernamus; & circa horum quoſdam, alios obire ſecundarios. Cur itaque non eo judicio nunc utamur; ac prorſus veriſimile putemus non ſolam hanc ſtellam tali comitatu cingi, aut aliqua in re cæteris præminere? Neque etiam ſolam circum axem ſuum converti; ſed potius cæteras omnes eadem hæc ſimilia habere? Ergo hac ratione etiam cuncta illa quæ in Planetis circumſolaribus ineſſe, ad Terræ noſtræ ſimilitudinem diſſeruimus, conſentaneum erit, ut ad innumeros Planetas alios, tot mille Solibus additos, æquè pertinere credamus. Eruntque & illic ſtirpes & animalia, atque etiam ratione inſtructa, quæ cœli convexa mirentur, & ſidera obſervent, motuſque eorum intelligant; atque omnia denique habeant, ſine quibus neque hæc haberi poſſe ſupra oſtendimus.

Quam mirabilis igitur quamque ſtupenda mundi amplitudo & magnificentia jam mente concipienda eſt. Tot Soles, tot Terræ, atque harum unaquæque tot herbis, arboribus, animalibus, tot maribus, montibuſque exornata. Et erit etiam unde augeatur admiratio, ſi quis ea, quæ de fixarum ſtellarum diſtantia & multitudine hiſce addimus, perpenderit.

Tantam igitur eſſe diſtantiam hanc, ut quæ Solem Terramque interjacet, Terræque diametrorum duodecim millia continet, ei comparata, exilis plane habenda ſit, non una ratione conſtat: atque hac inter cæteras, quod ſi proximæ quædam inter ſe ſtellæ notentur, quæ claritate plurimum differunt; velut in media caudæ, (quæ duplex eſt) Urſæ

majoris; nulla apparentis intervalli earum mutatio animadvertitur, quocunque anni tempore ſpectatarum; quod tamen fieri neceſſe eſſet, propter diverſas viſus poſitiones per annui Orbis ambitum, orireturque parallaxis aliqua ſi, ut conſentaneum eſt, propior ſit ſtella quæ lucidior apparet. Qui autem ante nos definiendi tam vaſti ſpatii rationem inierunt, nihil certi comprehendere potuerunt, propter nimiam obſervationum neceſſariarum ſubtilitatem, quæque omnem diligentiam ſuperet. Itaque mihi unica hæc via ſupereſſe viſa eſt, quam nunc inſiſtam, qua ſaltem veriſimile quid in re tam exploratu ardua conſequamur. Cum ergo ſtellæ ut jam diximus, totidem ſint Soles; ſi earum aliquam Soli æqualem eſſe ſumamus, erit illius tanto major quam Solis diſtantia, quanto apparens diameter diametro Solis minor erit. Sed tam exiguæ apparent ſtellæ, etiam quæ primæ ſunt magnitudinis, atque etiam Teleſcopio ſpectatæ, ut veluti puncta lucentia ſine viſibili latitudine refulgeant. Quo fit ut ejuſmodi obſervationibus nulla earum menſura deprehendi poſſit. Cum itaque hac non ſuccederet, tentavi qua ratione Solis diametrum ita imminuere poſſem ut non majorem lucem quam Sirius, aut aliud è clarioribus ſideribus, ad oculum mitteret. Ergo occluſi rurſus, ut ſupra, tubi duodecimpedalis vacui aperturam alteram lamella tenuiſſima, cujus medio tam exiguum effeci foramen, ut Lineæ partem duodecimam non ſuperaret, ſive pollicis centeſimam quadrageſimam quartam. Hunc tubum ea parte ad Solem obverti; altera oculo admovi; qui tunc particulam Solis cernebat, cujus diameter, ad totius diametrum, erat ut 1 ad 182. Sed eam particulam multo clariorem comperiebam, quàm noctu Sirius apparet. Itaque cum longè magis arctandum Solis diametrum viderem, id ita effeci, ut, in perforata ejuſmodi lamina, vitreum globulum objicerem minutiſſimum, pari circiter diametro ac prius illud foramen habebat; quo globulo ad microſcopia antehac uſus fueram. Ita per tubum in Solem intuenti, contecto undique capite, ne quid diei lux turbaret, non minor ejus claritas quam Sirii videbatur.

Modus probabiliter investigandi distantiam fixarum à Sole.

Atqui, ex Dioptrices legibus instituto calculo, fiebat jam Solis diameter $\frac{1}{152}$ ejus particulæ centesimæ octogesimæ secundæ, quam, per foramen exiguum, prius conspexeram. Ductis autem in se $\frac{1}{152}$ & $\frac{1}{182}$, fit $\frac{1}{27664}$. Ergo eousque contracto Sole, vel eousque remoto, (erit enim effectus idem) ut diameter ejus sit $\frac{1}{27664}$ ejus, quem in cœlo intuemur, supersit illi lux quæ Sirii luci non cedat. Solis vero eousque remoti distantia erit necessario, ad eam quam nunc habet, ut 27664 ad 1: & diameter paulum excedet 4 scr. tertia. Itaque cum æqualis ei Sirius ponatur, sequitur Sirii quoque diametrum totidem esse ejusmodi scrupulorum; distantiamque itidem, ad eam qua à Sole absumus, ut 27664 ad 1. Quod quàm incredibile sit intervallum, apparebit eadem ratione, quam in æstimanda Solis distantia adhibuimus. Nam si 25. annis opus habebat tormenti bellici globus, continua velocitate, quanta exploditur, incedens, ut à Terra ad Solem perveniret; jam numerus 27664 vicies quinquies ducendus est, atque ita fiunt 691600, adeo ut penè septingenta annorum millia insumpturus sit globus, in tanta celeritate sua, priusquam ad proximas stellarum inerrantium perveniat. Atque ad has stellas serena nocte oculos circumferentes, quantum horum judicio comprehendere possumus, vix aliquot milliaribus supra verticem eas exstare putamus. Quæsivi vero de proximis tantum. Cæteræ enim cum, ut jam diximus, iis spatiis in ulteriora cœli recedant, ut non minora sint deinceps à propioribus ad sequentes, quàm à Sole ad istas, quanta immensitas superest! Si enim plures quàm mille, nudo visu notantur; telescopiis verò decuplo aut vigecuplo amplius; quomodo sciri potest aut definiri, quanta sit multitudo ulteriorum, quas neque hoc auxilio attingere licet: aut quis numerus nimis magnus dicendus est, si ad Dei potentiam spectemus? Etenim, sæpe hæc cogitanti mihi, in mentem venit, tantùm in primis numerorum exordiis calculos omnes nostros versari. Esse enim in serie eorum infinita, qui non tantùm viginti aut triginta, aut centum, aut mille notis scribantur in progressione nostra denaria; sed

qui

qui tot characteribus constent, quot arenæ grana in tota Telluris mole continerentur. Quis verò dicere audeat tali numero non majorem esse multitudinem stellarum inerrantium? Nam longè ulterius progressi sunt, qui infinitam esse dixerunt; ut Veterum aliqui, atque etiam Jordanus Brunus; qui pluribus argumentis hoc se evicisse putat, sed, ut mihi videtur, parum firmis. Nec tamen contrarium quoque perspicuis rationibus probari posse existimo. Illud constat, spatium naturæ universæ infinitè undique protendi; at nihil obstat, quin, ultra definitam stellarum regionem, res alias innumeras Deus effecerit, à cogitationibus nostris, æque, ac sedibus, remotas.

Quid si verò nec innumeras quidem condidit, sed ultra eas vacuum reliquit infinitum; ut totum illud, quod exstare voluit, veluti nihil sit præ iis quæ producere ejus omnipotentia potuisset? Sed ulteriorem horum inquisitionem, totamque illam de infinito difficillimam disputationem persequi omitto, ne ad tot maximarum rerum comprehensionem, qua jam defuncti sumus, novus labor accedat. Ea tantùm hic subjungam, ex quibus, quænam sit nostra de toto mundi spatio opinio, cognoscatur; quatenus nempe Solibus seu stellis inerrantibus patet, quibus sua circumponi plenetaria systemata, probabile esse antea ostendimus.

Unumquemque Solem vortice cingi, sed Cartesianis multum dissimili; contra quem pluribus disputatur.

Existimo itaque unumquemque Solem circumdari vortice quodam materiæ celeriter motæ, sed qui multum dissimiles sint Cartesianis illis, tum spatii ratione, tum motus genere, quo in illis materia agitetur. Ea enim apud Cartesium est vorticum amplitudo, ut quisque eorum alios se circumsistentes contingat, occurrens singulis plana superficie, veluti cum in aqua sapone imbuta bullarum cumulos pueri inflant: moveri vero universam cujusque materiam statuit, in partem eandem rotando. At hunc motum non parum impediri oporteret, propter angulosam vorticum superficiem. Deinde cum sit ejusmodi, ut, velut circa axem cylindri, materia tota feratur, exoritur ei postea non exigua difficultas, cum globosam Solis formam ex hoc motu deducere conatur: fru-

ſtra prorſus, atque iis rationibus, quæ incautis aliquid eſſe videantur, cum reipſa nihil explicent. Vult præterea innatare, ac circunferri cum hac materia ætherea, Planetas; atque ea ratione videlicet in ſuis orbibus eas retineri, quòd non majore vi, quàm ipſamet, à centro motus recedere conentur. Sed hic ex Aſtronomicis complura objiciuntur, de quibus aliqua attigimus in diatriba de cauſſis gravitatis. Ubi & aliam rationem expoſuimus, quæ Planetas intra orbium ſuorum limites contineret. Ea eſt gravitas eorum Solem verſus; quæ unde exoriatur oſtendimus, quamque eo magis miror Carteſium præteriiſſe, quod de gravitate, qua corpora in Terram feruntur, primus ſolito meliora adferre cœpiſſet. Refert Plutarchus in libro ſupra memorato de Facie in orbe Lunæ, fuiſſe jam olim qui putaret ideo manere Lunam in Orbe ſuo, quod vis recedendi à Terra, ob motum circularem, inhiberetur pari vi gravitatis, qua ad Terram accedere conaretur. Idemque ævo noſtro, non de Luna tantum, ſed & Planetis cæteris ſtatuit Alphonſus Borellus; ut nempe Primariis eorum gravitas eſſet Solem verſus; Lunis vero ad Terram, Jovem, ac Saturnum, quos comitantur. Multoque diligentius ſubtiliuſque idem nuper explicuit Iſacus Neutonus, & quomodo ex his cauſis naſcantur Planetarum orbes Elliptici, quos Keplerus excogitaverat; in quorum foco altero Sol ponitur. Oportet autem, ſecundum noſtram de natura gravium ſententiam, quò Planetæ ad Solem ſuo pondere inclinent, vorticem turbinemve materiæ cœleſtis circa eum converti non totum in eaſdem partes, ſed ita ut variis motibus, iiſque celerrimis in omne latus ſecundum diverſas ſui portiones rapiatur, nec tamen dilabi poſſit, propter circunſtantem ætherem, qui non tali nec tam celeri motu agitetur. Hujuſmodi vortice gravitatem corporum in Terram, ejuſque effectus omnes explicare conati ſumus, in ea, cujus memini, diatriba. Eademque, ut puto, eſt ratio gravitatis Planetarum Solem verſus; & ex his quoque tam Terræ

no-

nostræ, quàm cæterarum, atque etiam Solis, rotunditas consequitur; quæ in Cartesiana hypothesi tantum habet incommodi.

Porro & spatia horum vorticum, ut dixi, multo quam ille contractiora pono. Sic enim fere eos statuo in vasta cœli profunditate dispersos, quemadmodum turbines aquæ exiguos, hinc inde in spatioso lacu stagnove, baculi agitatione, excitatos, ac magnis intervallis totisque stadiis distantes. Et sicuti horum motus nequaquam ab unis ad alios perveniunt, nec proinde sese mutuo impediunt; ita quoque cœlestium vorticum motus, circum astra aut Soles, se habere existimo.

Itaque neque alii alios destruere possunt aut absorbere, quemadmodum finxit Cartesius, cum ostendere vellet quomodo stella aut Sol aliquis vertatur in Planetam. Apparet autem, cum hæc scriberet, non attendisse eum ad immensam stellarum inter se distantiam; idque vel ex hoc uno, quod, cum primum Cometes aliquis intra vorticem nostrum, cujus centrum Sol occupat, descendit; vult eum nobis visibilem fieri, quod est absurdissimum. Quomodo enim, sidus ejusmodi, quod ex Solis lumine repercusso tantummodo splendet; ut cum plerisque Philosophis ipse statuit; quomodo, inquam, posset conspici à tanto intervallo, quod saltem decies millies contineret illud quod à Terra ad Solem est. Non enim ignorare poterat vastissimum, circa Solem undique extensum, spatium; cum sciret in Copernici systemate orbem magnum, hoc est, orbitam Terræ, velut punctum esse cum illo comparatum. Sed tota hæc de Cometarum, atque etiam de Planetarum, & mundi origine, commentatio apud Cartesium tam levibus rationibus contexta est, ut sæpe mirer tantum operæ in talibus concinnandis figmentis eum impendere potuisse. Mihi magnum quid consecuti videbimur, si quemadmodum sese habeant res, quæ in natura exstant, intellexerimus; à quo longissime etiam nunc

nunc absumus. Quomodo autem quæque effectæ fuerint, quodque sunt, esse cœperint, id nequaquam humano ingenio excogitari, aut conjecturis attingi posse, existimo.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII

OPERA MISCELLANEA.

Tomus Quartus.

Tomi quarti contenta.

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ
AUCTORE
CHRISTIANO HUGENIO.

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

C*Um in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quam latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeo tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hâc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua ado-*

adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæque contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quam quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquanto plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geometras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuêre, adeo ut a primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quod prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quod relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculóque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti expectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ

ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

Propositio I.

Si a *vel* b *expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere* $\frac{a+b}{2}$.

AD hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x-a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x-a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x-a \propto b$, & fit $x \propto \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut

ut vincens victo sit traditurus a. Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a+b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3: erit hic lusus omnino justus, & patet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, *vel* c *expectem*, *quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit*, *expectatio mea æstimanda est* $\frac{a+b+c}{3}$.

AD quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum primus vincat, aut c, si secundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd si $3x-b-c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret expe-

pectatio ad obtinendum *a*, quæ ad *b*, aut ad *c*. Pono itaque $3x - b - c \propto a$, & fit $x \propto \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad *a*, *b*, *c*, aut *d* æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

Propositio III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, *sit* p, *numerus autem casuum quibus mihi eveniet* b *sit* q, *sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit* $\frac{pa+pq}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus *x* pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm *x* habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum deponat quisque *x*, ita ut depositum sit $px+qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus *q*, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus *b*, aut ego contra ipsi idem *b*, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p-1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus *a*, & ego tantundem (*a* scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc *q* expectationis habere ad *b*, & $p-1$ expectationes ad *a*, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px+qx-bq-ap+a$, tunc enim obtineo $px+qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo *b* unicuique *q* lusorum, & *a* unicuique $p-1$ lusorum, quæ simul conficiunt $bq+pa-a$. Si itaque $qx+bx-bq-ap+a$ æqua-

æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p-1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px+qx-bq-ap+a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap+bq}{p+q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PROPOSITIO IV.

Ut igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opus est ut a facilioribus incipiamus.

SUmpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum pro-

ſequi non velimus, ſed pecuniam, de qua certamus, prout æquum eſt, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò conſiderare oportet luſus, qui utrobique deficiunt. Certum enim eſt, ſi inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depoſitum eſt lucretur is, qui priùs vigeſies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo caſu ſortem meam quantò hîc melior eſt, ubi à tribus luſibus binos conſequutus ſum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo luſus ſed ipſi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum eſt quid fieret, ſi in luſu pergeremus. Certum enim eſt, ſi primum ludum vincerem, me præſcriptum numerum impleturum & omne depoſitum conſecuturum, id quod vocetur a. Quod ſi autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriuſque ſors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifeſtum autem eſt me æquam habere ſortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua ſit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipſum per 1mam Propoſitionem tantum eſt ac ſi utriuſque ſortis dimidium, id eſt, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo colluſori $\frac{1}{4}a$, quæ ipſius portio ſtatim ab initio eodem modo reperiri potuiſſet. Unde patet, eum, qui ludum meum in ſe recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde ſemper tria contra unum deponere eum poſſe, qui unum ludum vincere contendat, priuſquam alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & colluſori meo tres luſus. Oportet hîc facere diſtributionem.

ADvertamus itaque rurſus, in quo eſſemus ſtatu, ſi ego vel ipſe primum vinceret luſum. Si ego vincerem, obtinerem depoſitum, id eſt, a; quòd ſi autem ille primum ludum vince-

ce-

ceret, deficerent ipſi duo luſus & mihi unus; ac proinde in eodem ſtatu eſſemus, qui in præcedenti Propoſitione poſitus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi oſtenſum eſt. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum eſt, per 1mam Propoſitionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ colluſori meo; ita ut mea ſors ad ſortem illius ſe habeat, ſic ut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requiſitus eſt præcedens, ita rurſus hicce inſervit ſequenti: nimirum, ſi ponamus mihi unum ludum deficere & colluſori meo 4or luſus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ iſtius quod depoſitum eſt, & ipſi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo tres luſus.

FIet itaque primo luſu; vel ut mihi unus luſus deficiat & ipſi tres (unde mihi per præcedentem Propoſitionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique noſtrum adhuc duo luſus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem ſic utrique æqua ſors futura eſt. Eſt mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua ſit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propoſitionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depoſitum eſt, & colluſori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos luſus & colluſori meo quatuor.

FIet itaque, ut, ſi primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, ſi eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi ſors obtingat ad $\frac{15}{16}a$

aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

Propositio VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

UT igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a, una ad 0, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

Pro-

Propositio IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

POnamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere, ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8vam. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2da Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2dam Propositionem tantundem ac

$\frac{o + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q}{3}$, id eſt, $\frac{5}{27}q$. Et certum eſt, hunc diviſorem 3 eſſe numerum colluſorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet caſu, videlicet ſi vel ipſe vel aliquis reliquorum primum ſequentem ludum vincat: oportet ſimpliciores caſus primò inveſtigare, & horum medio ſequentes. Nam ſicut hic ultimus caſus ſolvi non potuit priuſquam ille octavæ Propoſitionis calculo ſubductus eſſet, in quo deficientes luſus erant 1, 1, 2, ita etiam cujuſque pars ſupputari nequit in tali caſu, ubi deficientes luſus ſunt 1, 2, 3, quin primùm calculo ſubductus ſit caſus deficientium luſuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo luſus deficientes ſunt 1, 1, 3; qui ſimiliter per 8vam Propoſitionem ſupputari potuiſſet. Atque hoc quidem pacto conſequenter ſupputare licet caſus omnes, qui in ſequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 colluſoribus.

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Luſus, qui ipſis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod ad teſſeras attinet, de iis hæ quæſtiones proponi poſſunt: videlicet, quotâ vice unâ teſſerâ ſenarium jacere periclitandum ſit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quo-

quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones. Ad quas solvendas advertendum est.

Primò unius tesseræ sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam.

Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facilè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus.

Item trium tesserarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3tia sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus.

Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulteriùs jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patêre posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta; vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4or sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5que sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.

In tribus tesseris reperiuntur		punctorum		jactus.
	3 vel 18		1	
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

PRO-

Propositio X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur a. Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum a, sed quinque ad obtinendum o; id quod per 2dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet a. Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi a; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeo ut sors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui

Qui ſex vicibus idem ſuſcipit, ſors ejus eſt $\frac{31031}{46656}a$, & poteſt 31031 contra 15625 deponere; id eſt, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita conſequenter quilibet jactuum numerus inueniri poteſt. Sed licet majori compendio progredi, ut in ſequenti Propoſitione oſtendetur; ſine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

Propositio XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

SI quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantum eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem ra-

tionem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent a, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire quot teſſeris ſuſcipere quis poſſit, ut primâ vice duos ſenarios jaciat.

HOc autem tantundem eſt, ac ſi quis ſcire velit, quoto jactu quiſpiam unâ teſſerâ ſuſcipere poſſit, ut bis ſenarium jaciat. Quòd ſi quis duobus jactibus ſuſciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante oſtenſa ſunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in ſe reciperet, ſi primus ejus jactus ſenarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque ſenarius eſſe deberet, id quod tantundem

dem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente ſenario, opùs est ut ex duobus jactibus non niſi ſemel ſenarium jaciat. Quod per 10 Propoſitionem tantundem valet ac ſi $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipſum unum habere caſum, quo primâ vice ſenarium jaciat, & quinque caſus quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio unum caſum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 caſus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2dam Propoſitionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ ſeu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto aſſumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesſerâ, aut 10 tesſeris primo jactu ſuſcipi poſſe, ut duo ſenarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesſeris unum ſolummodo jactum, hâc conditione, ut, ſi ſeptenarius eveniat, ego vincam; at ille, ſi denarius obtingat; ſi vero quidquam aliud accidat, ut tum id quod depoſitum eſt æqualiter dividamus: Invenire qualis iſtius pars cuique noſtrum debeatur.

QUoniam 36 jactuum, qui duabus tesſeris proveniunt, 6 jactus exiſtunt ſeptem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, reſtant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare poſſunt; id quod ſi fiat, cuique noſtrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm ſi id non obtingat, habebo 6 caſus, quibus vincam, id eſt, ut a habeam; & 3 caſus, quibus diverſum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2dam Propoſitionem tantundem eſt ac ſi tali caſu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 caſus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 caſus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2dam Propoſitionem, tantundem eſt ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

Propositio XIV.

Si ego & alius duabus tesseris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primùm senarium jaciat; ita videlicet, ut ipsi primum jactum concedam: invenire rationem meæ ad ipsius sortem.

POnatur, sortem meam valere x, & id quod depositum est vocari a; eritque sors alterius $\infty\ a - x$. Et patet, quandocunque ipsius vices jaciendi revertuntur, sortem meam tum rursus debere esse $\infty\ x$. At quandocunque meæ vices sunt ut jaciam, sors mea pluris æstimanda est. Ponatur itaque pro ejus valore y. Jam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 tesseris, qui collusori meo senarium dare lususque victorem reddere possunt; & 31 jactus, quibus diversum eveniat, id est, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priusquam jacit, 5 casus ad obtinendum o, & 31 casus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propositionem valet $\frac{31\ y}{36}$. Posuimus autem casum meum à principio esse $\infty\ x$. Quocirca erit $\frac{31\ y}{36}\ \infty\ x$, adeoque $y\ \infty\ \frac{36\ x}{31}$. Deinde positum fuit, vicibus meis venientibus, sortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 casus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 casus, quibus vices collusoris mei revertuntur, id est, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam Pro-

Propositionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum sit $= y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} = y$, $\frac{30x + 6a}{36} = \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x = \frac{31a}{61}$, valor meæ sortis. Et per consequens collusoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio sortis meæ ad illius sortem sit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco subjungantur sequentia Problemata.

PROBLEMA I.

A & B unà ludunt duabus tesseris, hâc conditione, ut A vincat, si senarium jaciat, at B si septenarium jaciat. A primò unum jactum instituet; deinde B duos jactus consequenter; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B? Resp. ut 10355 ad 12276.

PROBLEMA II.

Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

PROBLEMA III.

A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita

ut ex unaquaque ſpecie habeat unam. Et invenitur ratio ſortis A ad ſortem B ut 1000 ad 8139.

Problema IV.

Aſſumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calculos ex iis exempturus ſit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B.

Problema V.

A & B aſſumentes ſinguli 12 nummos ludunt tribus teſſeris hâc conditione: ut, ſi 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipſi B; at ſi 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipſi A; & ut ille ludum victurus ſit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
NOVUS CYCLUS
HARMONICUS.

CHRISTIANI HUGENII NOVUS CYCLUS HARMONICUS.

Litteræ D. Hugenii de Cyclo Harmonico.

NOvam tibi mitto de Musica observationem. Spectat hæc prima Scientiæ illius fundamenta, id est, tonorum, qui in cantu & Instrumentorum fabrica observantur, determinationem. Quicunque licet parum versati sint in parte illa Theoriæ, norunt, quid sit, quod vocatur Temperamentum, quod tonos illos moderatur & quam necessarium illud sit in harmonia tuborum Organi vel chordarum Clavecymbali.

Celebriores auctores, uti Zarlinus & Salinas, illud referunt inter inventa pulcherrima & utilissima, quæ in musicis detegi possunt; & uterque contendit se primum Temperamentum hoc ad examen revocasse, & demonstrationibus Mathematicis constituisse. Ante illos experientia & necessitas illud quidem aliquo modo jam introduxerant, licet vera mensura & methodus nondum esset cognitæ. Inventio hujus Temperamenti in causa fuit, ut merito negligerentur omnes veterum Tetrachordarum & Diapasonorum divisiones quarum pleræquæ absurdæ & usus nullius erant in compositione plurimarum partium: hac etiam inventione nostrum systema tonorum magis abundat consonantiis, magisque est juxta naturam cantus, quam illorum erat.

Pono notas eſſe proportiones, in quibus conſiſtunt perfectæ conſonantiæ, ſcilicet: Quintam audiri, quando, poſt ſonum editum ex motu chordæ integræ, duæ tertiæ partes ipſius agitantur: vel proportionem, a qua conſonantia hæc pendet, eſſe ut 3 ad 2; Quartæ proportionem eſſe ut 4 ad 3; Tertiæ majoris ut 5 ad 4; Tertiæ minoris ut 6 ad 5; Sextæ majoris ut 5 ad 3; Sextæ minoris ut 8 ad 5. Et quantum ad Temperamentum, iidem autores, quos modo memoravi, nos docent, ut hoc applicetur inſtrumentis, conſonantiam Quintam minuendam eſſe quarta parte *Commatis* ut vocant, quæ adeo exigua eſt diminutio, ut auris hanc difficulter percipiat, & nullam inde capiat moleſtiam; cum *Comma* integrum ſit ratio inter tonum integræ chordæ, & hujus tonum quando parte $\frac{1}{81}$ minuitur. Sequitur inde, Quartam auctam eſſe hac ipſâ exigua quantitate. Tertia minor pariter, eſt diminuta $\frac{1}{4}$ Commatis, & conſequenter Sexta major in tantum aucta; ſed Tertia major perfectionem ſervat, ut & ideo etiam Sexta minor.

Juxta has conſonantiarum menſuras, diſponuntur omnes inſtrumentorum toni, tam Diatonici quam Chromatici, quos addidere Muſici, & pariter toni Enarmonici, quando & hi ut magis completa ſit ſymphonia adjiciuntur.

Obſervatio autem noſtra hæc eſt, ſi dividatur Octava in 31 partes æquales, quod fiet quærendo 30 medias proportionales inter totam chordam (quæ ſumitur pro regula Harmonicâ) & ejus dimidium, dabitur in tonis, quos producunt longitudines hæ, Syſtema parum admodum ab iſto quod modo memoravi ex Temperamento deductum, ita ut nemo auri quantumvis ſubtili præditus differentiam percipiet; quod tamen novum Syſtema toto cælo ab alio differet, novaſque afferet utilitates tum in Theoriam cum in Praxin.

Salinas inventum hoc dividendi octavam in 31 partes æquales memorat ſed ut hoc culpet, & P. Merſennus pariter poſt ipſum hanc rejicit diviſionem, unde mihi facile fides habenda erit, me nihil ex illis autoribus mutuatum eſſe; ſed ſi & hoc feciſſem, ſatis a me præſtitum crederem, ſi præſtan-

tiam

tiam ejus divisionis ex Geometriæ principiis demonstraverim, & illam vindicaverim adversus injustum duorum illorum celebrium Scriptorum pronunciatum.

In lib. 3. Musices Salinæ integrum exstat caput de hac divisione, cujus inscriptio est, *De prava constitutione cujusdam instrumenti, quod in Italia citra quadraginta annos fabricari cæptum est, in quo reperitur omnis tonus in partes quinque divisus;* Dicit instrumentum hoc nominis Archicymbali donatum fuisse, illudque fuisse *incerti autoris*; Musicos quosdam admodum idoneos id magni fecisse, præcipue quia continebat omnia intervalla, omnesque consonantias (ut credebant, ait) adscendendo, & descendendo & quia post certam periodum rediebatur ad eundem sonum vel æquipollentem, cum eo a quo initium factum erat; Quia Octava divisa erat in 31 partes æquales, quas vocabant Diesas (seu tonos perfectos) quarum tonus debebat continere 5; magnus semitonus 3; parvus 2; Tertia major 10; Tertia minor 8; Quarta 13; Quinta 18; Sexta minor 21; Sexta major 23. Sed addit, cum tentassent tale disponere instrumentum hoc sonum dedisse admodum ingratum, & qui insigniter aures præsentium offendebat, unde concludit, talem divisionem deviare ab omni ratione harmonica, sive examinetur secundum mensuram justarum consonantiarum sive Temperamenti. Præter experientiam & aliud affert argumentum deductum ex Methodo in hac divisione adhibita. P. Mersennus etiam contendit se bene illam refutavisse. Erravit uterque, quia illos latebat Methodus dividendi Octavam in 31 partes æquales, quod probabiliter & ipsi inventores non potuere; requiritur enim cognitio Logarithmorum, qui nondum illorum nequidem Salinæ tempore erant inventi. Tandem novum hoc Temperamentum, quod adeo repudiant, omnium præstantissimum merito dicitur, omnia habens commoda quæ ipsi tribuebantur; præcipuæ simplicitatem quam communicat Theoriæ tonorum, & parum admodum differt ab eo, quo utuntur omnes, ut auris differentiam non percipiat uti computatione probabo.

Dico ergo primum, Quintam noſtræ diviſionis non ſuperare Quintas Temperamenti quam $\frac{1}{110}$ Commatis, quæ differentia, auditu nullo modo percipi poteſt; ſed quæ alioquin daret iſtam conſonantiam tanto magis perfectam.

Quartæ conſequenter Temperamenti ordinarii non excedunt noſtras niſi illâ $\frac{1}{110}$ commatis, & hæ tendunt etiam tanto magis ad perfectionem.

Tertiæ minores ſunt minores $\frac{3}{110}$ vel circiter $\frac{1}{37}$ Commatis quàm in temperamento, & Sextæ majores in tantum excedunt Sextas majores Temperamenti; utræque fateor recedunt à perfecta proportione; ſed videmus differentiam $\frac{1}{37}$ Commatis non eſſe ſenſibilem, nec augere ſenſibiliter $\frac{1}{4}$ Commatis, qua conſonantiæ in Temperamento aberrant à veris.

Tandem Tertiæ majores ſuperant Tertias Temperamenti, quæ ſunt perfectæ, $\frac{4}{110}$ vel quaſi $\frac{1}{28}$ Commatis, quæ adeo exigua eſt differentia, ut niſi pro perfectis, non obſtante hoc augmento haberi queant; quid enim facit $\frac{1}{28}$ Commatis, cum $\frac{1}{4}$ adeo facile patiamur.

Deducimus ex exiguis omnibus hiſce differentiis, Organum aut Clavecymbalum conſtitutum juxta Temperamentum ordinarium, etiam diſpoſitum eſſe juxta novam diviſionem, quantum aure poterit diſcerni. Si vero quis ſibi hac in parte magis deſiderat ſatisfacere, & exactiſſime conſtituere inſtrumentum juxta 31 partes æquales Octavæ, tantum dividenda eſt monochorda juxta numeros, qui habentur in ſequenti Tabula, &, poſitâ totâ chordâ, æquiſonâ cum C Clavecymbali aut Organi, diſponere pariter alias chordas vel tubos, cum ſonis, ex memorata diviſione oriundis & qui audiuntur poſito pectine in locis notatis. Quod vero ad Archicymbalum de quo Salinas loquitur, ſpectat, dubito, an non habuerit 31 palmulas in quavis octava; ſed quoniam non poterit ſine confuſione talis abacus adhiberi præ multitudine palmularum, præſtaret meâ ſententiâ diſponere 31 chordas ſimplices pro quavis octavâ, quod poteſt fieri ſine difficultate; & conſtructis palmulis, quæ elevant ſubſilia, omnibus æqualis longitudinis, altitudinis, & latitu-

titudinis, quæ latitudo sit ⅐ palmulæ vulgaris, deinde superimponendus erit abacus mobilis, cum claviculis in inferiori parte singularum palmularum fixis; semel ita dispositi hi ut chordæ, quæ in quavis octava adhibentur, sonent, omnibus transpositionibus inservient. Quæ ergo fient sine labore per tonos, semitonos, & usque ad quintas partes tonorum; & certum est, omnes tonos & consonantias in singulis transpositionibus æque accuratas esse, quod utile & amœnum erit. Olim Parisiis construi curavi, tales abacos mobiles superimponendos abacis vulgaribus Clavecymbalorum transpositionibus plurimis, licet non omnibus completis, inservientes; quod inventum approbarunt & imitati sunt periti in musicis varii.

Sed ut quis certus sit de veritate illorum, quæ superius dixi, inspiciat Tabulam sequentem cujus contenta ut & usum explicabo.

Divisio Octavæ in partes 31. æquales.				*Divisio Octavæ secundum Temperamentum vulgare.*	
I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
N 97106450					
4,6989700043	50000	Ut²	C²	50000	4,6989700043
4,7086806493	51131				
4,7183912943	52278				
4,7281019393	53469	Si	B^x	53499	4,7283474859
4,7378125843	54678				
4,7475232293	55914	Sa	B	55902	4,7474250108
4,7572338743	57179	*	*	57243	4,7577249674
4,7669445193	58471				
4,7766551643	59794	La	A	59814	4,7768024924
4,7863658093	61146				
4,7960764543	62528	*	*	62500	4,7958800173
4,8057870993	63942	Sol^x	G^x	64000	4,8061799740
4,8154977443	65388				
4,8252083893	66866	Sol	G	66874	4,8252574989
4,8349190343	68378				
4,8446296793	69924				
4,8543403243	71506	Fa^x	F^x	71554	4,8546349804
4,8640509693	73122				
4,8737616143	74776	Fa	F	74767	4,8737125054
4,8834722593	76467				
4,8931829043	78196				
4,9028935493	79964	Mi	E	80000	4,9030899870
4,9126041943	81772				
4,9223148393	83621	Ma	E^b	83592	4,9221675119
4,9320254843	85512	*	*	85599	4,9324674685
4,9417361293	87445				
4,9514467743	89422	Re	D	89443	4,9515449935
4,9611574193	91444				
4,9708680643	93512	*	*	93459	4,9706225184
4,9805787093	95627	Ut^x	C^x	95702	4,9809224750
4,9902893543	97789				
4,9999999993	100000	Ut	Ç	100000	5,0000000000

Tabulæ Explicatio.

Secunda columna continet numeros qui exprimunt longitudines Chordarum; quibus habentur 31 intervalla æqualia secundum novam divisionem; Chorda tota continet partes 100000 & 50000 ejus dimidium dant Octavam.

A latere in 3ª. columna sunt syllabæ, quæ nobis in cantu inserviunt, & * pro quibusdam chordis enarmonicis, quarum prope sol* est maxime necessaria.

In 4ª. columna sunt litteræ quæ ordinario inserviunt ad designandos tonos.

Numeri 2æ. columnæ ope numerorum col. 1æ. detecti fuere, hi sunt illorum logarithmi respectivi; ad quos habendos divisi logarithmum numeri 2. qui est 0, 30102999566 per 31. unde venit numerus N. 97106450, quem addidi continuo Logarithmo num. 50000, qui est 4. 6989700043. & hisce additionibus detegimus omnes Logarithmos hujus columnæ usque ad maximum 4, 9999999993, qui parum deficiens a 5, 0000000000, (in cujus locum substitui potest) demonstrat bene subductum calculum. Qui Logarithmos intelligunt norunt ita ineundam computationem, si quærantur 30 numeri proportionales inter 100000 & 50000.

5a. columna continet in numeris longitudines chordarum juxta Temperamentum ordinarium, & in 6a. columna sunt eorum numerorum Logarithmi.

Possem explicare quomodo eos supputaverim, & pariter, quomodo id Temperamentum posset detegi, si nondum esset repertum; sed id foret nimis longum, & sufficiet, demonstrare methodum examinandi, & numerorum ἀκρίβειαν, & omnia quæ dixi de nova divisione & de ratione quam habet cum Temperamento.

Ponamus, determinandum esse, an Quinta *Ut*, *Sol*, temperamenti vulgaris, minor sit ¼ Commatis, quam vera Quinta, cujus ratio est trium ad duo. A log. *Ut*, qui est 5, 0000000000 substraho log. *Sol* qui est 4, 8252574989, id, quod restat

O,

0, 1747425011, exhibet quantitatem Quintæ Temperamenti.

Pariter differentia Logarithmorum 3 & 2 quæ in tabulis Logarithmorum habetur 1760912594, exhibet quantitatem Quintæ perfectæ; hinc substraho Quintam Temperamenti inventi & restat 13487583; id quod debet dare Log. $\frac{1}{4}$ Commatis; & hoc verum est; nam log. Commatis toni id est differentia logar. 81 & 80 est 53950319, cujus Quarta pars est 13487580. Si velimus examinare an Quævis Quinta novæ divisionis ut *Re*, *La*, differat a vera $\frac{1}{4}$ minus $\frac{1}{110}$ Commatis; debemus a Log. *Re*, qui est 4,9514467743, substrahere Log. *La*, qui est 4,7766551643, restat 1747916100, quem subtraho a Logarithmo veræ Quintæ qui erat 1760912594, restat 12996494, qui minor est Log. Quartæ partis Commatis, scilicet 13487580; a quo igitur eum subtraho & restat 491086: Debemus nunc videre, quam partem Commatis hoc faciat; idcirco divido Log. Commatis, scilicet 53950319 per 491086, quotiens est fere $\frac{1}{110}$. Ita ut pateat, nostram Quintam non superari $\frac{1}{4}$ Commatis a Quinta perfecta, sed $\frac{1}{110}$ Commatis deesse. Eodem modo potest examinari quidquid spectat Temperamentum; nihil enim in computationibus Musicis instituendis Logarithmorum usui anteponendum.

FINIS.

CHRISTIANI HUGENII
VARIA
DE
OPTICA.

CHRISTIANI HUGENII VARIA DE OPTICA.

I.

Excerpta ex literis D^ni^ Hugenii, Academiæ Regiæ Scientiarum Socii, ad Autorem Diarii Eruditorum de Catoptrico conſpicillo D^ni^ Newtoni.

UT deſideras tibi ſententiam meam exponam de Teleſcopio D[ni] Newtoni. Licet nondum viderim hujus inventi effectum, illud me poſſe aſſerere perſuaſum habeo, pulcrum & ingenioſum eſſe, proſperumque eventum ſortiturum; ſi modo ad ſpecula cava formanda detegi queat, de quo minime deſperandum puto, materia quæ poliri poſſit, ut vivide radios reflectat, ut vitrum. Commoda hujus conſpicilli præ illis, in quibus vitra tantum adhibentur, ſunt, primo quod ſpeculum cavum, licet Sphæricum, multo melius colligat radios parallelos in unum punctum, quam noſtra vitra Sphærica, uti Geometrice poteſt demonſtrari. Unde ſequitur duorum conſpicillorum ejuſdem longitudinis, quorum unum erit novæ illius inventionis, alterum ordinario vitro objectivo inſtructum, primum, magnam habens aperturam, majori copia collecturum radios ab objectis procedentes, licet parvum ſpeculum quoſdam inter-

cipiat, ideoque magis poterit amplificare objecta, quam alterum. Adeo ut Telescopium novum dimidiæ aut tertiæ partis longitudinis conspicilli ordinarii, aut forte etiam minus, æqualem effectum cum hoc præstabit.

Secunda utilitas est, hoc invento vitari incommodum, quod a vitris objectivis separari nequit, mutua nempe duarum superficierum ad se inclinatio. Nam licet hæc parva sit, tamen obest radiis, qui vitra ad latera transeunt & magis oberit, si vellemus uti vitris hyperbolicis vel ellipticis quibus majores concedendæ forent aperturæ.

Tertiam utilitatem censeo, reflexione Speculi metallici non perire tot radios quot in vitris, quæ in utraque superficie reflectunt notabilem radiorum quantitatem & multos intercipiunt obscuritate suæ materiæ.

Cum præterea difficulter admodum vitrum detegatur quod longioribus conspicillis inserviri queat, quia sæpe non ubique homogeneum est, quartum novi Telescopii commodum erit, in metallo nil præter superficiei perfectionem requiri.

Qui viderunt conspicillum D^ni^ Newtoni, observarunt, illud aliquâ difficultate dirigi ad objecta; sed huic malo occurri potest satis facile, jungendo huic conspicillo alterum exacte parallelum, per quod primùm quæretur objectum. Desiderabitur fateor alter observator, si conspicillum catoptricum sit magnum, quoniam ille, qui observat, in illa observat extremitate, quæ maxime elevata est. Sed ad incommodum hoc non attendendum est, si spectetur utilitas inventi: Si loco speculorum Sphæricorum possent obtineri parabolica exacte formata & polita, conspicilla hæc effectum præstarent quod de vitris ellipticis vel hyperbolicis speravimus; credo autem id in speculis facilius obtineri posse.

II.
CONSTRUCTIO PROBLEMATIS OPTICI.
Propositio 39 Libri v. Alhazeni, & 22 lib. vi. Vitellionis.

Puncta B, C, & circulus E K, cujus centrum est A, data sunt in eodem plano; inveniendum est punctum K in peripheria circuli, ita ut lineæ B K, C K faciant cum linea A K angulos inter se æquales. TAB. LVI. fig. 1.

DUctis AB, AC; fiat AC, AF:: AF, AQ; & AB, AE:: AE, AP: sint etiam AP, & AQ, bifariam divisæ in R & S; in angulo BAC sint perfecta parallelogramma PAQH & ARZS. In RZ producta sumantur ZY & ZX, utraque æqualis lineæ quæ potest differentiam inter quadrata QS & ZS: fiat XV æqualis XY & parallela AB; & lateribus XV & XY describatur hyperbola, quæ transibit per puncta Q & H, uti patet per constructionem; hyperbola hæc QXH occurret circulo in puncto K, quod quæritur.

Ductis KO & KI parallelis AC & AB, quarum KI occurrit YX in puncto D. Ob hyperbolam rectangulum YDX æquale est quadrato KD ordinatæ, vel quadrato OR; & rectangulum YTX æquale est quadrato HT, vel quadrato PR; & demto a rectangulo YTX, rectangulum YDX & a quadrato PR, quadratum OR, supererit rectangulum RDT vel AIQ, quod æquale erit rectangulo AOP. PO ergo est ad AI, vel OK ipsi æqualem, ut QI ad AO, vel IK; & ductis lineis KP, KQ triangula KOP, KIQ erunt similia & ideo æquiangula; idcirco anguli APK, AQK, qui iidem sunt, vel supplementa angulorum æqualium OPK, IQK erunt inter se æquales; sed per constructionem AB, AE vel AK, :: AK vel AE, AP; ideo duo triangula BAK, KAP sunt similia, & ob eandem causam duo triangula CAK, KAQ, sunt etiam similia; ideo angulus BKA est æqualis angulo APK, & an-

angulus CKA æqualis ang. AQK, ſed demonſtravimus angulos APK & AQK eſſe æquales, ergo anguli BKA, CKA erunt inter ſe æquales Q. E. D.

Si punctum H cadat in circumferentiam circuli punctum H erit punctum K, quod quæritur & lineæ HP, KP, KO in unicam HP coaleſcunt; & ſimiliter lineæ HQ, KQ, KI in unam HQ, & quæ ſuperius demonſtrata ſunt & hic locum habent, in quo caſu Hyperbolâ non indigemus.

III.

ALITER.

Dato Speculo Cavo aut Convexo, itemque Oculo & Puncto Rei viſæ, invenire Punctum Reflexionis.

TAB. LVI. fig. 2.

ESto ſpeculum ex ſphæra quæ Centrum habeat A punctum; oculus vero ſit in B, & punctum viſibile in C, Planumque ductum per A, B, C, faciat in ſphæra Circulum D*d*, in quo invenienda ſint Reflexionis Puncta. Per tria Puncta A, B, C, deſcribatur Circuli Circumferentia, cujus ſit Centrum Z; occurrat autem ei producta AE, Perpend. BC, in R; & ſit duabus RA, OA, tertia Proportionalis NA; eritque NM, Parallela BC, altera Aſymptoton. Rurſus ſint Proportionales EA, $\frac{1}{2}$ AO, AI, & ſumma IY æquali IN, ducatur YM Parallela AZ; eaque erit altera Aſymptotos. Denique ſumptis IX, IS, quæ ſingulæ poſſint dimidium quadratum AO, una cum quadrato AI; erunt Puncta X & S in Hyperbola, aut ſectionibus oppoſitis D*d*, ad inventas Aſymptotos deſcribendis, quarum interſectiones cum Circumferentia DO, oſtendent Puncta Reflexionis quæſita. Conſtructio hæc, in omni Caſu, quo Problema ſolidum eſt, locum habet, præterquam in uno, ubi non Hyperbola ſed Parabola deſcribenda eſt; cum nimirum Circumferentia per Puncta A, B, C, deſcripta, tangit Rectam AE.

COM-

IV.
COMPENDIUM.

DUctâ lineâ AT, parallelâ CB, eaque bisecta in V, punctum hoc est illud, per quod transire debet una Hyperbolarum Oppositarum, quarum Asymptoti inventæ fuerunt YM, MN. TAB. LVI. fig. 3.

Sed en Tibi bonam illam Constructionem, quæ in omnibus Casibus obtinet. Sit Circulus datus ED, cujus Centrum est A; Puncta data, B & C. TAB. LVI. fig. 4.

Ductis Lineis AB, AC, fiant Proportionales BA (Radius Circuli) & FA: Eodem modo CA, (Radius Circuli) & GA. Tum jungatur FG, eaque bisecetur in H; & per hoc punctum ducantur Lineæ LHK, MHN, se invicem intersecantes ad Angulos Rectos, quarumque LHK sit Parallela ei quæ bisecat Angulum BAC. Hæ sunt duæ Asymptoti Hyperbolarum describendarum per puncta F & G, & quarum una transibit etiam per Centrum A, quarum Intersectiones cum Circuli Peripheria notabunt puncta Reflexionis quæsita.

V.
ALIA SOLUTIO.

Problema Alhazeni.] *Dato Circulo, cujus Centrum A, Radius AD, & punctis duobus B, C; invenire punctum H in Circumferentia Circuli dati, unde ductæ HB, HC, faciant ad Circumferentiam Angulos æquales.* TAB. LVI. fig. 5.

Ponatur Inventum, ductaque AM recta, quæ bifariam secet Augulum BAC, ducatur ei perpendicularis HF, itemque BM, CL. Jungatur porrò AH, cui perpendicularis sit HE; rectisque BH, HC, occurrat AM in punctis K, G.

Sit

Sit jam $AM = a$ $MB = b$ $AL = c$ $LC = n$ Radius $AD = d$ $AF = x$ $FH = y$	Quia ergo æquales Anguli KHE & CHZ, five EHG; eftque EHA angulus rectus; erit ut KE ad EG, ita KA ad AG. Quia verò BM ad MK, ut HF ad FK, erit, ut BM + HF ad HF, ita MF ad FK, i.e. $b+y : y :: a-x : \frac{ay-xy}{b+y}$. add. $FA = x$ fit $KA = \frac{ay+bx}{b+y}$.

Rurfus, quia CL ad LG, ut HF ad FG, erit permutando & dividendo CL — HF ad HF, ut LF ad FG, $n-y : y :: c-x : \frac{cy-xy}{n-y}$, quâ ablatâ ab $AF = x$, fit $GA = \frac{nx-cy}{n-y}$. Eft autem $EA = \frac{dd}{x}$, quia Proportionales FA, AH, AE: Ergo EA — GA, hoc eft, EG, $= \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y}$. Et KA — EA, hoc eft, $KE = \frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x}$.

Sed diximus, quod KE ad EG, ut KA ad AG; i.e.

$$\frac{ay+bx}{b+y} - \frac{dd}{x} : \frac{dd}{x} - \frac{nx+cy}{n-y} :: \frac{ay+bx}{b+y} : \frac{nx-cy}{n-y}.$$

Unde invenitur

$$2anxxy + 2bnx^3 - ddbnx - ddnxy = +naddy + bddx$$
$$-2acxyy - 2bcxxy + ddbcy + ddcyy \quad - addyy - bddxy$$

Eft autem $\frac{2bbc}{a}x^3 = \frac{2bbcddx}{a} - \frac{2bbcyyx}{a}$, quia $xx = dd - yy$.

Et quia $n = \frac{bc}{a}$, ergo $\frac{-2bbcxyy}{a} - \frac{ddbcyx}{a} - 2acxyy$
$+ddcyy = -addyy - bddxy$:

Et

Et divisis omnibus per y & ductis in a

$$-2bbcxy - ddbcx - 2aacxy + ddcay = -aaddy - bddax$$

$$abddx - cbddx + acddy + aaddy = 2aacxy + 2bbcxy$$

$$\frac{abddx - cbddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy,$$ quæ æquatio est ad Hyperbolam.

Vel quia $bc = na$, $\frac{abddx - anddx + acddy + aaddy}{2aac + 2bbc} = xy$.

Sit $\frac{add}{aa + bb} = p$; Ergo $\frac{pbx - pnx + pcy + pay}{2c} = xy$.

Unde porrò non difficulter invenitur sequens Constructio: jungantur BA, AC, & applicato seorsim ad utramque Quadrato Radii AD, fiant inde AP, AQ; & juncto PQ, dividatur ipsa bifariam in R, & per punctum R ducantur RD, RN, sese ad Rectos Angulos secantes, quorumque RD, sit parallela AM, quae dividet bifariam Angulum BAC. Erunt jam RD, RN Asymptoti oppositarum Hyperbolarum, quarum altera per Centrum A transire debet, quæque secabunt Circumferentiam in punctis H quæsitis. Transibunt autem Hyperbolæ per Puncta P, Q.

TAB. LVI. fig. 6.

Ratio Constructionis apparet, ductis $P\gamma$, & $Q\zeta$, perpendicularibus in AM. Fit enim $A\gamma = \frac{add}{aa + bb}$ sive p; & $A\zeta = \frac{ap}{c}$. Item $P\gamma = \frac{pn}{c}$, & $Q\zeta = \frac{pb}{c}$. Quare $AO = \frac{pc + pa}{2c}$, & $OR = \frac{pb - pn}{2c}$. Unde Cætera facilia.

---

pag. præced. lin. pen. lege $-2acxyy$
lin ult. lege $-addyy - bddxy$:

VI.

Excerpta ex litteris D$^{ni.}$ Hugenii Acad. Reg. ſcient. Socii, ad auctorem Diarii Paris. de novo Microſcopio ex Hollandia allato.

MIcroſcopium hoc ex unico formatur exiguo globulo vitreo, ſimili illis, quibus in Hollandia & Anglia animalcula fuere obſervata in aqua puteali & pluvia, ut & illa in qua piper fuit maceratum, de quibus egiſti in 9. & 11. diario hujus anni (1678); ſed globuli de quibus nunc ago aliis hiſce minores ſunt.

Inter ipſos quos ex Hollandia attuli quidam magnitudine non ſuperant arenæ granulum; alii adeo exigui ſunt ut vix videri queant, quare objecta in immenſum amplificant; eo enim hæc majora apparent quo globuli ſunt minores.

Objectum obſervandum inter vitri laminam & lapidis ſpecularis lamellam includitur; hæc machinæ adaptantur quæ mihi aliis huc uſque uſitatis magis commoda videtur. Exigua guttula æquæ, in qua per duos aut tres dies piper fuit maceratum, ita incluſa, magna videtur natantibus piſciculis bene repleta piſcina.

Quæ pecularia circa aquam hanc obſervavi, ne quæ in diario veſtro ſunt relata iterum memorem, hæc ſunt; ex omni pipere non eadem generantur animalcula; piper quoddam animalcula ceteris majora format, ſive hoc a piperis vetuſtate pendeat, ſive ab alia cauſa, quæ in ſequentibus detegi poterit.

Similia animalcula ex aliis ſeminibus ut ex ſemine coriandri etiam producuntur.

Hoc idem obſervavi in ſucco Betulæ, ubi per quinque aut ſex dies hunc ſervaveram.

Quidam animalcula viderunt in aqua in qua nux aromatica, aut caſia, maceratæ fuere: & probabile admodum eſt in multis aliis rebus ſimilia detegi poſſe.

Quis

Quis forte defendet animalcula haec corruptione, aut fermentatione, generari; ſed alia dantur quorum origo ab hac diverſa eſt, talia ſunt quæ in animalium ſemine deteguntur, quæ cum hoc ipſo nata videntur, & tanta copia obſervantur ut totum ſemen quaſi ex hiſce conſtet.

Translucida omnia ſunt, celerrime moventur, & ranis, antequam horum pedes formentur, ſimilia ſunt.

Hæc animalcula in Hollandia primum fuere obſervata, & horum inventio admodum mihi utilis videtur, & quæ opus ſuppeditabit illis qui in animalium geneſin inquirunt.

F I N I S.

CHRISTIANI HUGENII
EXPERIMENTA
PHYSICA.

CHRISTIANI HUGENII EXPERIMENTA PHYSICA.

Excerpta ex literis D[ni] *Hugenii, Academiæ regiæ ſcientiarum Socii, ad Auctorem Diarii Eruditorum, de Phænomenis aquæ aëre purgatæ.*

ANtequam tibi communicarem quæ obſervavi de ſuſpenſione aquæ in vacuo, altera vice experimenta inſtituere volui, ut de obſervationibus olim a me factis certus eſſem, & ut melius penetrare poſſem in cauſas miri adeo effectus. Primum tibi ipſas referam obſervationes, & dein pergam ad conjecturas de ipſarum cauſa.

Experimenta quæ illuſtris Boyleus anno 1661 publicavit, cum deſcriptione machinæ Pneumaticæ mihi ab eo tempore dederunt occaſionem examinandi hanc materiam; Unum ex experimentis illius eſt, ſi tubo vitreo, 4 pedes longo, aqua repleto, cujus extremitas aperta, everſo tubo, immergitur aqua vitro contento, ſuperimponas recipiens vel vas, unde aër educitur, poſt exhauſtum aërem, quantum ope machinæ fieri poteſt, aqua tubi deſcendet in vitrum, donec ad altitudinem unius tantum pedis ſuſtineatur, ſuperiore tubi parte aquâ & aëre manente vacuâ. Cenſet optime, aquam ad illam altitudinem unius pedis ſupra ſuperficiem aquæ in vitro hæ-

hærere propter aërem in recipiente superstitem, & qui ope machinæ, non satis exactæ, annihilari non potuit.

Similem construi machinam curaveram, & licet nondum mutaveram quæ in sequentibus correxi, ita tamen omnia adaptaveram, ut instituto experimento memorato aqua in tubo ad libellam aquæ in vitro descenderit; Quare in instituendo experimento non tubo longitudinis memoratæ indigebam. Adhibui tubum novem pollicum cum globo cavo in extremitate ut patet in hac figurâ.

TAB. LVI. fig. 7.

Concipiendum est vitrum CC in totum aquâ repleri, extremitatemque apertam immergi aquâ in vitro D; utrumque obtegitur vase B, cujus os apertum applicatur molli cuidam cimento, quo lamina AA induitur; hæc perforata est in medio parvo foramine, per quod exit aër, quando agitatur antlia; si adhibita aqua frigida experimentum instituatur in totum vas C evacuatur, donec aqua ad libellam aquæ in vitro D descendat.

EXPERIMENTUM I.

Aqua, sublatâ aëris pressione, hæret in tubo.

SEd ad finem mensis Decembris ejusdem anni 1661. cum reliquissem aquam illam in vacuo per 24 horas, (quo plane purgatur bullis aëris quas ejicit, quando adhibetur frigida) cumque implevissem vas C, admiratus vidi, licet optime eduxerim aërem ex vase B, aquam nullatenus descendere ex vase, quod plenum remanebat. Non poteram suspicari ullum in machinâ meâ vitium dari, nec vas B non bene fuisse obturatum; sed ut quidquid rei esset expiscarer, detraxi phialam C ex vase, & postquam in hac admisi parvam bullulam aëris, reposui phialam ut ante; & agitatâ machinâ, vidi tandem omnem aquam descendisse prope ad libellam illius quæ erat in vitro D. Id mihi persuasit, non dari vitium in machinâ & aquam aëre purgatam manere suspensam; licet vas B fuerit plane aëre vacuum vel ad minimum ita, uti erat quando aqua non-

nondum aëre purgata descendebat ex Phialâ; altera vice ut aqua descenderet, effeci immissâ in collum Phialæ bullâ adeo parvâ, ut ægre videri posset.

EXPERIMENTUM II.

Notabile quid in descensu aquæ aëre purgatæ.

SEd alio tempore mihi quid valde memorabile contigit. Cum non immisissem bullam aëream, post exhaustum aërem bullam formari observavi in inferiori parte colli Phialæ; Hæc bulla, continuo magis magisque aucta, ubi ad magnitudinem parvi pili pervenit, reliquit vitrum & incepit adscendere in collo Phialæ, ubi autem pervenit ad altitudinem unius pollicis supra superficiem aquæ in vitro D, non ulterius adscendit, sed subito sese expandit superiora versus & unico momento occupavit totam Phialam, ex qua eodem tempore aqua descendit per parvum id spatium, quod reliquum erat inter interiorem colli superficiem & bullam, quæ extensa erat, omnisque remansit infra illam altitudinem unius pollicis, ad quam bulla cæpit sese expandere. Omnia hæc porro mihi contigerunt instituenti experimenta cum tubis duorum pedum & majoribus, ubi aqua manebat suspensa eodem modo ut in tubo 9 pollicum.

Communicavi hæc experimenta cum societate regia Anglicana, sed noluere statim illis fidem dare, mihi autem indicarunt verisimiliter aquam Phialæ non descendisse, propter aërem non bene evacuatum: sed respondi, nullam dari rationem illud suspectandi si attendamus ad illud quod notavi in fine experimenti fuisse observatum; & præterea me ex experimentis frequenter repetitis de bona machinæ conditione certissimum esse. Tandem cum anno 1663 essem in Angliâ me præsente in consessu Societatis Regiæ idem experimentum eodemque cum successu institutum est, licet tubi fuerint quatuor & quinque pedum; dein in mentem venit Dno Boyle idem instituere experimentum, non adhibitâ anthâ, cum argento vivo in tubo vitreo, cujus extre-

mitas aperta immersa erat in alio argento vivo; quum primo detexisset methodum perfecte Mercurium aëre purgandi per tres vel quatuor dies. Tandem experimentum successit, & cum in experimento Torricelliano Mercurius descendat ad altitudinem 27 vel 28 pollicum supra superficiem Mercurii, in quo impositus est tubus, ita a Dno Boyle, & eodem etiam tempore a Dno Vicecomite Brounker, Præside Societatis Regiæ Anglicanæ, fuit institutum, ut primo hæreret ad altitudinem 34 pollicum, dein 52, postea 55 & tandem ad altitudinem 75 pollicum, tubo semper manente pleno, & huc usque nondum notum est, quænam sit omnium maxima altitudo possibilis. Dus Boyle etiam observavit, extracto tubo e Mercurio, in quo aperta ejus extremitas erat imposita, & retento tubo non clauso in aëre libero, Mercurium nihilominus non cecidisse. Porro in his experimentis, ut in illis quæ cum aquâ instituuntur, minimâ aëris bullâ in tubo, sive sponte sive concussione formatâ, subito Mercurium deprimit ad ordinariam altitudinem 27 vel 28 pollicum.

EXPERIMENTUM III.

Adhibito spiritu vini loco aquæ.

SEd ut ad experimenta nostra redeam, non solum illa iterum cum aqua institui, sed & cum Spiritu vini rectificato, & inveni, ad purgationem aëris tantum requiri, ut per unam horam in vacuo relinquatur, licet producat plus aëris quam aqua, uti ex hujus operationis circumstantiis quas referam quæque notabiles satis sunt, æstimari facillime potest. Postquam vas B proxime ope antliæ aëre evacuatum est, magnæ bullæ spiritus vini exeunt & tanta quidem copia, ut pars ejiciatur supra oram vitri D, quod pariter accidit in aquâ parumper calefactâ; sed non in illâ quæ frigida immittitur. Illæ ebullitiones continuo minuuntur, ita ut ex vini Spiritu, tantum majores aëris bullæ ad certa temporis intervalla singulatim exeant, & tandem nil omnino emergat.

In-

Interim bullæ, quæ aſcenderunt in tubum C, ita dilatantùr ut plane impleant globum, ut & totam colli longitudinem, ita ut omnis vini ſpiritus fugatus ſit, & ut pariter emittat multas magnas bullas per aperturam; quod clare indicat, eſſe aërem in lagena, vel aliam materiam elaſticam ut aër, quandoquidem illa fugat ſpiritum vini longe infra ſuperficiem illius qui eſt in vitro D contentus: etiam ſi iterum aërem intrare ſinas in vas B, ſpiritus vini quidem adſcendet in lagenam C, non autem plane illam replebit, ſed ſuperius hærebit ſatis notabilis aëris bulla.

EXPERIMENTUM IV.

Aër, ex Spiritu vini aut aqua exhauſtus, hæc corpora iterum intrat.

SEd hic notandum, bullam illam ſi ita relinquatur per ſpatium unius vel duarum horarum, ſemper evanuiſſe, & in ſpiritum vini, unde emerſerat, rediiſſe. Expertus etiam fui, ſi immittatur porro bulla veri aëris magnitudine unius piſi, etiam illam periiſſe, poſtquam per unam noctem relicta fuerit. Idem quoque accidit in aqua. Sed multo majus tempus requiritur, ut evaneſcat bulla.

Quod attinet cauſam præcipui noſtri Phænomeni, ſuſpenſionis nempe aquæ & Mercurii, hæc eſt quam mihi perſuadere potui huc uſque omnium veriſimillimam.

Præter preſſionem aëris, quæ ſuſtinet Mercurium ad altitudinem 27 pollicum in experimento Torricelliano, & quam dari ex infinitis aliis effectibus, quos videmus, conſtat, concipio & aliam preſſionem illâ fortiorem materiæ aëre ſubtilioris, quæ haud difficulter penetrat vitrum, aquam, Mercurium, & omnia alia corpora quæ aëri impenetrabilia obſervamus. Hæc preſſio addita ad aëris preſſionem poteſt ſuſtinere 75 pollices Mercurii & forte adhuc plures, quamdiu tantum agit in ſuperficiem inferiorem, vel in ſuperficiem Mercurii, in quem aperta tubi extremitas immergi-

gitur: ſed quam primum materia hæc poteſt agere etiam ad alteram partem (quod evenit ſi tubum concutiendo, vel immittendo parvam aëris bullam, occaſio detur huic materiæ effectum ſuum inchoandi) preſſio illius æqualis erit ab utraque parte, ita ut ſola ſuperſit aëris preſſio quæ ſuſtinet Mercurium ad ordinariam altitudinem 27 pollicum; Eadem de cauſa in experimento aquæ aëre purgatæ, poſt remotam preſſionem aëris evacuando recipiens B, altera illa preſſio ejuſdem materiæ agit etiam ut antea in ſuperficiem aquæ in vitro D, & cohibet ne aqua in Phiala C deſcendat. Sed ubi minima bulla aëris intrat phialam, materia quam dixi tranſire per vitrum & aquam, ſubito inflat bullam, editque preſſionem æqualem illi, quæ agit in ſuperficiem aquæ in vitro D, quare omnis aqua phialæ defluit, & ad libellam cum illa, quæ eſt in vitro ſeſe conſtituit.

Quæret forte quiſpiam cur preſſio ejus materiæ non agat in aquam ſuſpenſam in phiala C, & in Mercurium in tubo Dni Boyle, etiam dum vaſa hæc plena ſunt, quoniam ſuppoſui, illam haud difficulter penetrare vitrum æque ac aquam & Mercurium? Et quare particulæ ejus materiæ non ſe jungant, & incipiant preſſionem, cum continuo in aqua & Mercurio eant & redeant, & vitrum non impediat illarum communicationem cum particulis exterioribus.

Ut huic difficultati fiat ſatis, quæ revera maxima eſt, dicam, licet partes ejus materiæ, quam ſuppoſui, tranſitum inveniant inter illas, ex quibus vitrum aqua & Mercurius formantur, non tamen dari tranſitum ſatis latum ut plures ſimul tranſeant, neque ut ſe moveant vi, quæ requiritur ut diſpergantur partes Mercurii vel aquæ, quæ inter ſe habent quendam nexum. Et ex hoc ipſo nexu ſequitur, (licet ad partem ſuperficiei interioris vitri, quæ tangit aquam vel Mercurium ſuſpenſum, plures partes premantur actione particularum ejus materiæ, cum tamen plurimæ partes aquæ aut Mercurii non premantur, quæ a partibus vitri teguntur,) partes aquæ aut Mercurii ſeſe mutuo ſuſtinere, omneſque ſuſpenſas hærere; quia minor eſt preſſio in ſuperficiem aquæ vel argen-

genti vivi, quæ contingit vitrum, quam in inferiorem, quæ tota exposita est actioni materiæ, a qua secunda pendet pressio. Solutionem hanc fateor non mihi ita satisfacere, ut nullus mihi supersit scrupulus; nihilominus tamen persuasum habeo novam illam dari pressionem, præter aëris pressionem, cum ob experimenta supra relata tum ob duo alia nunc referenda.

EXPERIMENTUM V.

Laminæ metallicæ arcte inter se cohærent in vacuo licet nihil inter has detur.

QUando duæ laminæ metallicæ vel marmoreæ, quarum superficies sint perfecte planæ, ad se mutuo applicantur, ita cohærent, ut superiore elevatâ inferior eam insequatur, cujus effectus causa tribuitur merito pressioni aëris in superficies externas; duæ mihi sunt laminæ, quarum quævis circiter est magnitudinis pollicis quadrati, quæ ex materiâ conflatæ sunt, ex qua olim specula formabantur, & quæ ita junguntur, ut, licet nihil interponas, superior non solum alteram sustineat, sed interdum etiam pondus trium librarum cum inferiori conjunctum; in quo statu perseverant quamdiu desideraveris.

Has ita junctas & oneratas tribus libris suspendi in machinæ meæ recipiente, quod aëre evacuavi in tantum, ut superstes aër non pressione sua aquam ad altitudinem unius pollicis sustineret, & nihilominus laminæ meæ separatæ non sunt.

Idem etiam institui experimentum interposito spiritu vini inter laminas & inveni quod in recipiente vacuo aëre sustinerent sine separatione eadem pondera, quæ sustinebant recipiente aëre pleno.

Videtur id mihi manifeste satis indicare magnam superesse pressionem in recipiente, postquam aëre vacuus est, & hanc non magis quam ipsius aëris pressionem in dubium vocari posse; sed & alia ad illius confirmationem.

EXPERIMENTUM VI.

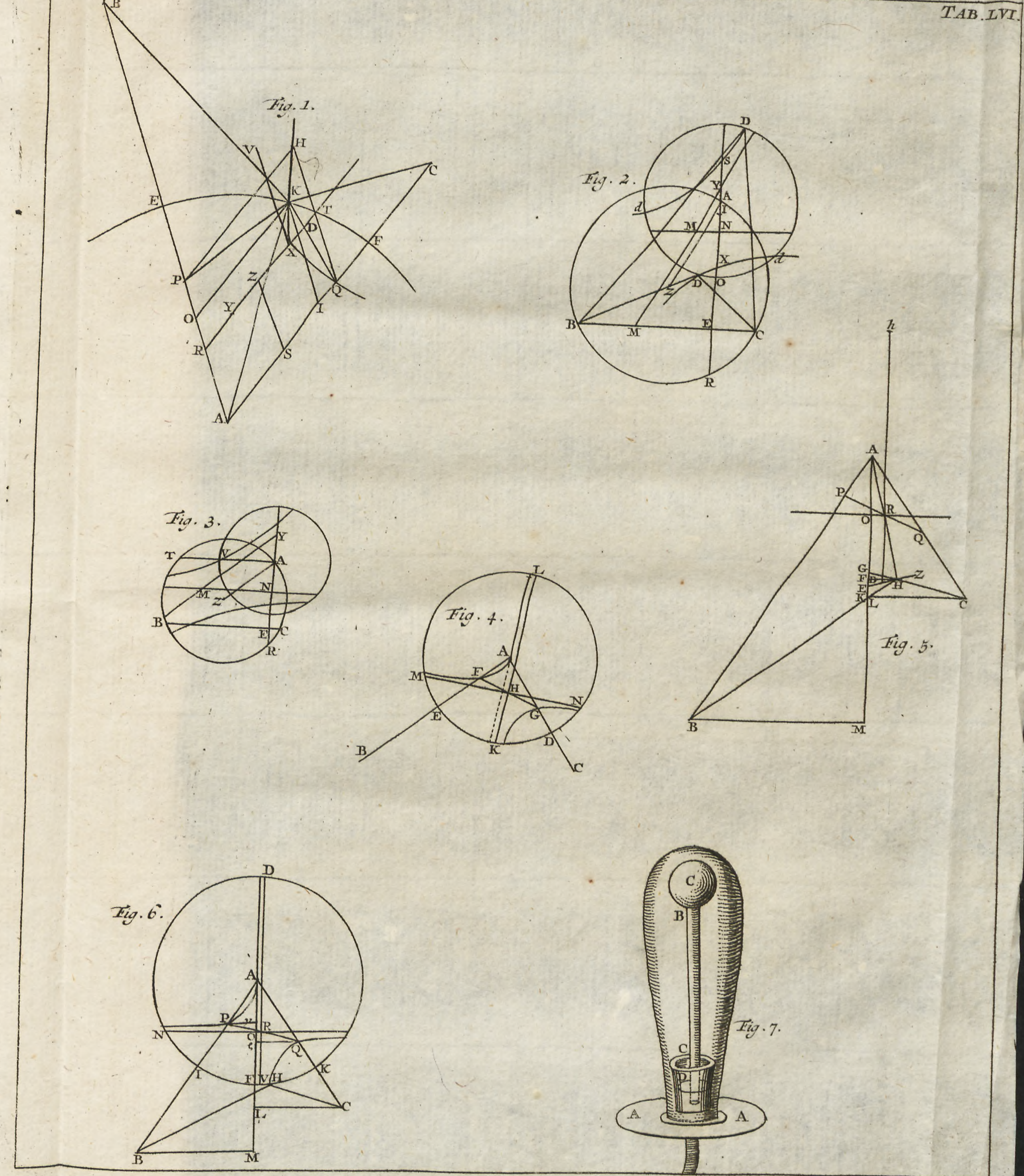
Effectus Siphonis in vacuo.

NOtum eſt, effectum ſiphonis crurum inæqualium, quo evacuatur aqua vaſis ſupra oram, non amplius tribui fugæ vacui, ſed ponderi aëris, qui premendo in ſuperficiem aquæ in vaſe, illam cogit ut in ſiphonem adſcendat, dum in alio crure illa gravitate ſuâ deſcendit. Inveni methodum qua effici, ut aqua e ſiphone fluxerit, poſtquam recipiens vacuum erat aëre; & obſervavi effectum, ſi aqua purgata fuerit aëre, eodem modo ac extra recipiens procedere.

Breviſſimum ſiphonis crus erat octo pollicum & apertura duarum linearum. Nec dubitari debet quin recipiens aëre bene vacuum fuerit; nam id poſſum affirmare, tum quoniam nullum antliâ aërem ulterius extrahere potui, tum ob alia ſigna certiora.

Magis ergo confirmatur noſtra hypotheſis materiam dari prementem aëre ſubtiliorem. Si quis laborem in ſe ſuſcipere vellet quærendi, quanta ſit vis hujus preſſionis quod melius fieri non poteſt niſi proſequendo experimenta cum tubis Mercurio plenis longioribus, quam quibus uſus eſt D[nus] Boyle, inveniet forte, vim illam ſatis validam eſſe ad efficiendam unionem partium vitri & aliorum corporum, quæ nimis arcte cohærent, quam ut juncta tantum forent per contiguitatem & quietem uti voluit Carteſius.

F I N I S.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

INDEX RERUM

Quatuor Tomis contentarum.

TOMUS PRIMUS

OPERA MECHANICA.

TOMUS SECUNDUS.

OPERA GEOMETRICA.

T O-

INDEX RERUM.

TOMUS TERTIUS.

OPERA ASTRONOMICA.

Ro-

TOMUS QUARTUS

OPERA MISCELLANEA.

FINIS.

CATALOGUS
QUORUNDAM LIBRORUM,
Qui apud JANSSONIOS VAN DER AA, Bibliopolas Lugduni Batavorum, venales proſtant.

A*bregé de l'Hiſtoire generale des Turcs, par Vanel*, 12°. 4 *voll. avec fig.*
Admiranda rerum admirabilium Encomia, 12°.
Æſchinis Socratici Dialogi tres, per Horreum, 8°. Gr. & Lat.
Alaric ou Rome vaincuë, Poëme Heroïque, par Monſr. de Scudery 12°. *avec fig.*
AMINTAS HERDERSPEL VAN T. TASSO, DOOR WELLEKENS, 8°.
Andry de la Generation des Vers dans le Corps de l'Homme 12°.
Annales de la Cour & de Paris, pour les Annees 1697 & 1698. 12°.
Annus Sacer Poëticus, ſive ſelecta de Divis Cœleſtibus Epigrammata 12°. 2 Tomis.
Antonii Jus feudale, cum additamentis Strykii, 4°.
Apologie pour leurs Sereniſſ. Majeſtés Britanniques, contre un infame Libelle intitulé le vray Portrait de Guillaume Henry de Nauſſau, nouvel Abſçalom, nouvel Herode, nouveau Cromwel, nouveau Neron, 12°.
—— *pour les Proteſtans, ou l'Auteur juſtifié pleinement leur conduite & leur ſeparation de la Communion de Rome.* 12°.
Athanaſii Opera, Gr. Lat. fol. 2 Voll.
Aurea Bulla Caroli V. Imp. de jure & ordine ſuccedendi in ducatum Mediolanenſem, &c. 4°.
Bauhuſii & Cabillavi Epigrammata, 24°.
Bellefontaine Medicine Dogmatique Mechanique, avec la Pharmacopée Rationelle, 12°. 2 voll.
BELLOSTE CHIRURGIEN D'HÔPITAL, 12°. avec fig.
Biblia Græca LXX. Interpretum, curâ L. Bos, 4°.
Bidermanni Acroamatum Academicorum Libri III. 12°.
Biſſchop Chorus Muſarum, ſive Poëmata, 8°.
Blancardi Opera Medica, Theoretica, Practica & Chirurgica, 4°.
Blegny Art de guerir les Maladies Veneriennes, 12°. 3 Tomes *avec fig.*
Boleſlavii Homo bene moriens 12°.
—— Gemmeum monile Animæ Chriſtianæ, 12°.
Bontekoe Metaphyſica, OEconomia Animalis & Geulinx Phyſica vera, 8°.
Borgeſii Enodatio Juris Naturæ, 8°.
Breſmal Circulation des Eaux ou l'Hydrographie des Minerales d'Aix & de Spa, 8°.
Bruguier Reponſe au Livre intitulé le Renverſement de la Morale de Jeſu Chriſt, par les Erreurs des Calveniſtes, 12°.

Burgundius ad Consuetudines Flandriæ aliarumque Gentium, 12°.
Camerarii Symbola ac Emblemata Ethico Politica, 8°.
Catalogus Librorum Manuscriptorum Angliæ & Hiberniæ, fol.
Cherubin Effets de la Force de la Contiguité des Corps, 12°.
Choix des bons Mots, 12°.
Claubergii Opera Omnia Philosophica, curâ Schalbruchii, 4°.
Clos de Aquis Mineralibus Galliæ & de Mixtis naturalibus, 12°.
Crebilon Oeuvres, 12°.
Defence de la Monarchie de Sicile contre les Entreprises de la Cour de Rome, 12°.
Description du Chateau de Versailles, 12°. avec fig.
DIVORCE CELESTE PAR PALLAVICIN, 12°.
Donkers Idea Febris petechialis, 8°.
Dousæ Poëmata, 8°.
EEUWIGDUURENDE LIEFDES ALMANAK, 8°.
Epistolæ Præstantium ac Eruditorum Virorum, fol. Charta Maj.
Flâvissæ Poëticæ sive Electorum Poëticorum Thesaurus Sacro-Profanus, 8°.
Fleetwood Inscriptionum Antiquarum Sylloge, 8°.
Gassendi Abregé de la Philosophie, 12°. 7 Voll.
GOBART TRACTATUS PHILOSOPHICUS DE BAROMETRO, 12°. cum fig.
Guide, ou nouvelle Description d'Amsterdam, 8°.
Hartmanni Praxis Chymiatrica, 8°.
Hartsoeker Principes de Physique, 4°.
HAVERCAMP DE NUMMIS ALEXANDRI MAGNI, 4°. cum fig.
Herbinius de Cataractis in Genere, 4°. cum fig.
Heucheri novi Proventus Horti Medici Acad. Vitembergensis, 4°.
Hildani Observationes & Epistolæ Chirurgico-Medicæ, 4°. 2 Voll.
Hippocratis Aphorismi per Almeloveen, 24°.
—— Metrica paraphrasi translati ab H. v. Poot. 24°.
HISTOIRE DES INDES ORIENTALES PAR Mr. SOUCHU DE RENNEFORT, 12°.
—— *des Iles Antilles de l'Amerique* 4°. avec fig.
Homere Iliade & Odyssée, par Mad. Dacier, 12°. 6 Tomes, avec fig.
—— *Iliade Poëme avec un discours sur Homere, par Mr. de la Motte.* 12°.
Huetius de Interpretatione, 8°.
Huygens Traité de la Lumiere. 4°.
Jablonski Disquisitio de Lingua Lycaonica, 4°.
Jean danse mieux que Pierre, Pierre danse mieux que Jean. 12°. 5 Voll.
Instruction pour reunir les Eglises pretendues Reformees a l'Eglise Romaine, par Mr. Comiere. 12°.
Jurieu Justification de la Morale des Reformez, contre les Accusations de Mr. Arnaud, 8° 2 Tomes.
Jus Austriacum in successione Regnorum Hispaniæ vindicatum, 4°.

Knibbe Manuductio ad Oratoriam Sacram, 8°. 2 Voll.
Lamy Elemens de Mathematique, ou traité de la Grandeur en General, 12°.
Leti Critique Historique, Politique, Morale, Economique & Comique, sur les Loteries Anciennes & Modernes, &c. 12°.
Letres Provinciales par Louis Montalte 8°. 3 Voll.
—— *de Fr: Rabelais, avec des Observations*, 8°.
—— *du Cardinal Bentivoglio, Ital. franc.* 12°.
Lipenii Bibliotheca Juridica, Struvii, fol.
Logique par Mrs. de Port Rojal, 12°.
—— *courte & facile par le Sr. Du Boisverd.* 8°.
LYK-PREDIKATIE OVER DE DOOD VAN D' Hr. MITSEN, DOOR J. DE HARTOGH, 4°.
Machiavelli Historia Florentina, 12°.
Malvezzi Opere Historische e Politische, 12°.
—— *Il Tarquino Superbo*, 12°.
Manzini Opere, 12°.
—— *furori della Gioventu Esercitii Rhetorici*, 12°.
Marechal Francois, 12°.
Mascampi Epitome Historiæ Civilis, 8°.
Medulla Justinianea, 12°.
Melanges Historiques, 12°.
Menken de la Charlatanerie des Savans, 8°.
Moïens de reunir les Protestans avec l'Eglise Romaine 12°.
Mollenbroccius de Arthritide, 8°.
Monavii Bronchotomia, quæ est gutturis aperiendi artificiosa ratio, 8°.
Mort Idea Actionis Corporum 12°.
MUNDI OPERA OMNIA MEDICO-PHYSICA, 8°.
Oeuvres de Mr. Le Noble 12°. 19 Voll.
Oudini Commentarius de Scriptoribus Ecclesiæ Antiquis, fol. 3 Voll.
Pacii Analysis & Isagoge 8°. 2 Voll.
Parladorii Opera Juridica, 4°. 2 voll.
Passe partout Galant, 12°.
PASTOR FIDO, 32°. Appresso P. Mortier.
Petau Histoire Universelle, 12°. Paris 5 Tomes.
Pilpay Conseils & Maximes, 8°.
Plazzonus de Partibus Generationis inservientibus, 12°.
PLUIMERS GEDICHTEN 4°. TWEEDE DEEL.
Pourtraits des plus Celebres Professeurs de Leide, 4°.
Preparations pour la Ste. Cene, avec le Voyage de Bethel, 12°.
Rochefoucault Reflexions ou Sentences & Maximes morales, 12°.
Schiere Doctrina Testamentorum & Fœderum omnium Divinorum, 4°.

Se-

CATALOGUS LIBRORUM.

Senecæ & Syri Mimi Sententiæ, cum Notis Diverſorum & Gruteri, 8°.
SERRE DOLCI PENSIERI SOPRA LA MORTE, 8°.
THEATRE ET AUTRES POESIES DE MADEM: BARBIER, 12°. avec fig.
VARIOLARUM METHODUS PER TRANSPLANTATIONEM, 8°.
Veſlingii Syntagma Anatomicum, ſive Anatomia, 4°. cum fig.
VIEUSSENS NOVUM VASORUM CORPORIS HUMANI SYSTEMA, 8°.
VIGNOLE REGLE DES CINQ ORDRES D'ARCHITECTURE, 4°. avec fig.
Voyage de Groenland, par le Pere Cordelier Pierre de Meſange, 12°. 2 Voll.
—— *aux Côtes de Guinée & en Amerique*, 12°.
—— *Le Prudent Voyageur, par L. du May*, 12°. 3 Voll.
WECHWYSER DER EENVULDIGEN, DOOR J. DE HARTOGH, 8°.
Weſtenberg ad Pandectas, 8°.
Dictionaire Engliſch and Frenſch & Frenſch and Englich of Miege 8°.
—— Italiaanſch en Nederduyts, door Moſes Giron, 4°.
—— Antiquitatum Romanarum & Græcar. per Danetum, in Uſum Delphini, 4°.
Grammaire Francoiſe d'un tour nouveau, compoſée en faveur de ceux qui preferent la Pratique a la Theorie, par Mr. Derbaud, 12°. avec fig.

Multi etiam alii apud Eosdem reperiuntur.

AVIS AU RELIEUR.

LE Relieur prendra garde que le papier qui eſt à côté des Figures doit être conſervé pour faire deborder les Figures hors du Livre, & les placer ſuivant la page marquée ſur chaque planche.

BERIGT AAN DEN BOEK-BINDER.

DEn Boek-binder zy gewaarſchout het papier ter zyde de Figuren niet af te ſnyden; maar zodanig in te ſetten, dat de Figuren buyten het Boek uitſlaan: dezelven moeten geplaaſt werden volgens de paginaas op yder Tabel genoteert.